前　言
QIAN YAN

随着2002年我国高等学校招生全面实行"3+X"考试，新一轮高考改革的第一步目标已经实现。我国基础教育和高考改革持续深入的崭新局面，为我们编写02—03年新版《高中总复习优化设计》系列丛书提供了广阔的背景。在积极组织市场调查研究，认真学习高考改革精神和深入研究高考"3+X"命题特点的基础上，我们进一步加大了对本系列丛书的结构调整力度，更加突出优化、设计、新颖等基本特色和精品意识，力求新版图书在保持传统特色的同时，与时俱进，为广大考生提供更新更好的"优化设计"。

新颖：反映"3+X"考试的最新信息，从新颖、别致的角度，选择基础性、综合性、多元性的例题和试题，体现创新思维和实践能力的要求。

优化：放眼整体，全程优化，创造性地设计各分册的内容框架。既考虑讲解的启发作用，又突出练习的主体功能；既考虑本学科的系统完整，又兼顾跨学科的综合沟通。

科学：在对近年高考备考实践进行深入分析研究的基础上，全面吸收了率先实行综合考试地区的备考成功经验，以知识整合、技能演练、能力提升等为内在线索进行栏目、板块的设置、编排，体现了最新复习导向。

实用：本书的传统特色之一是"以讲带练"。本次修订从练习的方式、内容、时间控制等多角度进行综合设计、优化取舍，更适合教师整体操作和学生个体使用。

本分册以"试验修订本教材"为蓝本，以数学高考"更加注重对能力和素质的考查；命题遵循中学教学大纲但不拘泥于大纲；试题中增加应用性和能力性题目"的指导思想为依据，立足教材，编织知识网络；突出基础，蕴含数学思想；培养创新意识，强调应用能力。全书体现了数学高考能力立意方向，反映了时代特色，适用于2003年高考第一阶段备考复习。

本书在原有栏目的基础上增设了以下栏目：

[学法指导]概述本章涉及的基本数学思想和方法，介绍复习本章内容的基本方略，指明复习中应注意的问题。

[题型拓展]这是在坚实基础上的拓展，也是以综合应用为特色的拓展。目的在于为基础较好的读者提供发展创新思维、提高应用能力的一个演练场。

本书在试题选择上有以下特色：

一、各章节围绕要点、考点选择题目，有梯度编排，归结于考点综合，脉络分明，利于构建数学认知结构。

二、应用能力、综合考试的根基还是学科基础，作为基础学科的数学也是如此。本书突出第一轮复习特点，做

足“基础”文章，每章节必有以教材习题为原型的改编题目，将蕴含在基础知识中的数学思想和数学基本方法印证于解题过程之中，以巩固基础、深化理解、正向迁移。

三、各章节均编排了一些立意鲜明、背景新颖、设问灵活的习题，同时加大了探索性、应用性题型的数量，以升华读者的学科综合素质，提高以数学为载体，将知识迁移到不同情境去的能力。

四、注重错题分析，以提高辨误、归纳能力。

本书还在编写中努力体现数学与传统和现代科技的交融，注意培养后续学习的潜能。

为了帮助教师充分把握本书的设计思想和意图，促进对本书的有效使用，本书配有《教师用书》，《教师用书》对本书中试题进行了详细解析及思路点拨，并附有大量备课资料和必要的教学建议，内容更加丰富全面，将会使教师的教学指导与备课更加得心应手。

在本书即将付梓之际，我们收到了教育部最新修订的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订版）》和数学教学大纲。新的课程计划与数学教学大纲认真贯彻了《基础教育课程改革纲要（试行）》精神，体现了新课程理念，重新表述了数学学科的教学目的，突出了数学思想方法教学，注重发展学生创新意识、应用意识、提高数学思维、建模、实践能力，必修内容有所减少，要求有所降低，选修Ⅰ中“统计”内容有修改，选修Ⅱ中“微分”和“积分”被删除；“介绍微积分建立的时代背景和历史意义”予以保留。为了适应这一变化和要求，我们特聘请有关专家，删除了本书中原编入但与最新大纲明显不相符合的部分内容，对“积分”加注了星号“*”，请读者使用时给予注意。

本书编者身处中学数学教学第一线，投身实践，潜心研究，精心设计，集全国各地先进经验于本书，希望能给广大师生高三总复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限，书中难免有疏忽与不妥，敬请广大读者批评赐教。

编　者

2002年6月

目录

LU MU

目录

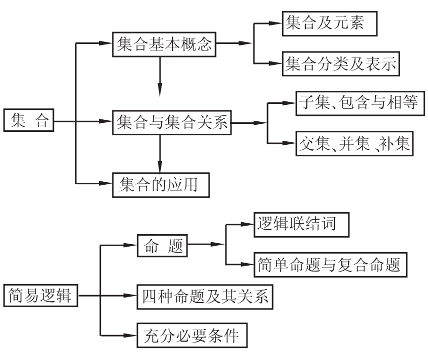
LU MU

目录

LU MU

第一章 集合与简易逻辑

知 识 结 构



考核内容与要求

1. 考核内容

集合. 子集. 补集. 交集. 并集.

逻辑联结词. 四种命题. 充要条件.

2. 考核要求

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念;了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义;掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或""且""非"的含义;理解四种命题及其相互关系;掌握充要条件的意义.

(3)学会运用数形结合,分类讨论的思想方法分析和解决有关集合的问题,形成良好的思维品质.

学 法 指 导

1. 复习集合,可以从两个方面入手,一方面是集合的概念之间的区别与联系,另一方面是对集合知识的应用.

关于集合的概念,主要是把握集合与元素,集合与集合之间关系,弄清有关的术语和符号. 对于集合的应用,可以考虑以下几个方面的问题:(1)利用集合语言表述问题,利用集合的思想方法解决问题.

(2)有关不等式的解;涉及到集合的运算及集合的表示.

(3)逻辑联结词"或""且""非"与集合中的"并""交""补"是相关的,二者相互对照可加深对双方的认识和理解.

(4)在数学的其他内容及日常生活中的应用.

2. 复习逻辑知识时,要抓住所学的几个知识点,通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.

§1.1 集合与集合运算

复 习 目 标

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能够掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

理解并掌握集合交、并、补的运算法则,能够运用集合语言与集合思想解决有关问题.

回 顾 性 题 组

▶1. 不等式组 $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2-3x<0 \end{cases}$ 的解集是 …………………… ( )

(2002 年 · 全国春季高考)

A. $\{x\mid -1<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x<3\}$

C. $\{x\mid 0<x<1\}$　　D. $\{x\mid -1<x<3\}$

▶2. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是 …………… ( )

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

(2001 年 · 京、皖、蒙春季高考)

▶3. 设集合 $A=\{x\mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x\mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$, 则 $A\cup B$ 中的元素个数是 …………………… ( )

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

(2000 年 · 全国高考)

▶4. 设 U 是全集,非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$,若求含 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集 $\varnothing$,则这个运算表达式可以是______.　(2000 年 · 上海春季高考)

▶5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-px+15=0\}$, $B=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$, 若 $A\cap B=\{3\}$, 则 $p+q=$________.

▶6. 已知集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{x\mid x\in A, x\in \mathbf{N}^*\}$, $C=\{x\mid x\subseteq A\}$, 则 A、B、C 之间的关系是________________.

样 板 性 题 组

▶1. 已知 $A=\{x\mid x^2-2x+a\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$, 且 $A\subsetneqq B$, 求实数 a 的取值范围.

解:可得 $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$, 对于 A, 分以下三种情况:(1) $\Delta<0\Rightarrow a>1$, 此时 $A=\varnothing$, 满足 $A\subsetneqq B$; (2) $\Delta=0\Rightarrow a=1$, 此时 $A=\{1\}$, 满足 $A\subsetneqq B$; (3) $\Delta>0\Rightarrow a<1$, 此时 $A=\{x\mid 1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$, $A\not\subseteq B$. 综上知所求 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

▶2. 已知 $A=\{x\mid x^3+3x^2+2x>0\}$, $B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$ 且 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$, $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$, 求 a、b 的值.

解：$A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>0\}$，

设 $B=[x_1,x_2]$，由 $A\cap B=(0,2]$，知 $x_2=2$，且 $-1\leqslant x_1\leqslant 0$ ①

由 $A\cup B=(-2,+\infty)$ 知 $-2\leqslant x_1\leqslant -1$ ②

由①、②知 $x_1=-1,x_2=2$，$\therefore a=-(x_1+x_2)=-1,b=x_1x_2=-2$.

评述：本题应熟悉集合的交与并的涵义，熟练掌握在数轴上表示区间（集合）的交与并的方法.

▶3. 已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值.

解：$\begin{cases}a-3=-3\\a^2\neq 2a-1\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=-3\\a^2\neq a-3\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq 1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}$

或 $\begin{cases}a=-1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=-1$

巩固性题组

▶1. 设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 是……（ ）

A. $\varnothing$ B. $\{d\}$ C. $\{a,c\}$ D. $\{b,e\}$

（2000 年・京、皖春季高考）

▶2. 已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$，$N=\{1,a^2-6a+10,3\}$，且 $M\cap N=\{2,3\}$，则 a 的值是 ……（ ）

A. 1 或 2 B. 2 或 4 C. 2 D. 1

▶3. 已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{x|mx-3=0\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为________.

▶4. 已知 $M=\{x|\frac{x+1}{2}\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{x|x=3k,k\in\mathbf{N}^*\}$，则 $(\complement_{\mathbf{N}^*}M)\cap P=$________.

▶5. 已知 $A=\{x|\log_2(x^2-2x-3)>\log_2 5\}$，$B=\{x|x^2-ax-2a^2\leqslant 0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

▶6. 已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，$Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$，且 $P\cap Q=Q$，求 m 的取值范围.

小结归纳

1. 对于集合问题，要首先确定属于哪类集合（数集、点集或某类图形），然后确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

3. 含参数的集合问题，多根据集合元素的互异性来处理，有时需进行讨论.

4. 集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融汇贯通. 解决问题时常用数形结合、分类讨论等数学思想.

§1.2 逻辑联结词与四种命题

复习目标

了解命题的概念和命题的构成；理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义；理解四种命题及其相互关系.

回顾性题组

▶1. 下列命题为真的个数是 ……（ ）

(1)$\frac{1}{5}$ 非整数；(2)5 是 10 的约数或是 26 的约数；(3)逻辑联结词有“或”“非”“且”；(4)$3\geqslant 2$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

▶2. 由“p：$8+7=16$，q：$\pi>3$”构成的复合命题，下列判断正确的是 ……（ ）

A. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为真

B. p 或 q 为假，p 且 q 为假，非 p 为真

C. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为假

D. p 或 q 为假，p 且 q 为真，非 p 为真

▶3. 对于命题“正方形的四个内角相等”，下面判断正确的是……（ ）

A. 所给命题为假 B. 它的逆否命题为真

C. 它的逆命题为真 D. 它的否命题为真

▶4. 有以下四个命题

(1)60 是 5 和 4 的倍数

(2)梯形不是平行四边形

(3)有两个内角互补的四边形是梯形或圆内接四边形或平行四边形

(4)等腰三角形的底角相等，其中简单命题是________（只填序号）

▶5. 命题 p：0 不是自然数，命题 q：$\sqrt{2}$ 是无理数，则在命题“p 且 q”“p 或 q”“非 p”“非 q”中真命题是________，假命题是________.

样板性题组

▶1. 指出下列复合命题的构成形式：

(1)实数的平方不是负数；

(2)4 是 12 和 16 的一个公约数；

(3)一个内角是直角的菱形是正方形，对角线垂直的矩形也是正方形.

解：(1)是非 p 形式复合命题，其中 p：实数的平方是负数.

(2)是 p 且 q 形式的复合命题，其中 p：4 是 12 的一个约数；q：4 是 16 的一个约数.

(3)是 p 或 q 形式的复合命题，其中 p：有一个内角是直角的菱形是正方形；q：对角线垂直的矩形是正方形.

▶2. 判断并证明下列命题的真假

(1)如果一个整数 n 的平方是偶数，那么这个整数 n 本身也是偶数；

(2)不存在实数 k，使抛物线 $y=kx^2+3x-1$ 与 x 轴只有一个交点.

解：(1)真命题，用反证法证明.

假设整数 n 不是偶数，则 n 可以写成：

$n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$.

$\because k\in\mathbf{Z}\Rightarrow 2k^2+2k\in\mathbf{Z}\Rightarrow 2(2k^2+2k)$ 为偶数.

$\therefore 2(2k^2+2k)+1$ 为奇数.

即 n^2 为奇数，与已知矛盾.

∴假设不成立，原命题为真命题.

(2)假命题，举反例如下：

取 $k=-\frac{9}{4}$，则抛物线 $y=-\frac{9}{4}x^2+3x-1$ 与 x 轴只有一个交点.

说明：欲说明一个命题为真命题，须通过逻辑证明；而说明一个命题为假命题，则举一个反例即可.

▶3. 命题：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$，写出该命题的逆命题，否命题，逆否命题，并判断这些命题的真假.

分析：原命题中，a、b 为实数是前提，条件是 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集(即不等式有解)，结论是 $a^2-4b\geqslant 0$，由四种命题的关系可得出其他三种命题.

解：逆命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集.

否命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集，则 $a^2-4b<0$.

逆否命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2-4b<0$，则 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集.

原命题、逆命题、否命题、逆否命题均为真命题.

巩固性题组

▶1. 给出命题："已知 a、b、c、d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$"，对其原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言，真命题是…………………………………………（　）

A. 0 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

▶2. 由下列各组命题构成"$p\vee q$""$p\wedge q$""$\neg p$"形式的复合命题中，"$p\vee q$"为真，"$p\wedge q$"为假，"$\neg p$"为真的是……（　）

A. p:3 是偶数，　q:4 为奇数

B. p:$3+2=6$，　q:$5>3$

C. p:$a\in\{a,b\}$，　q:$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. p:$Q\subsetneqq\mathbf{R}$，　q:$\mathbf{N}=\mathbf{Z}^*$

▶3. 用反证法证明命题：若整数系数一元二次方程：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理数根，那么 a、b、c 中至少有一个是偶数时，下列假设中正确的是…………………………（　）

A. 假设 a、b、c 都是偶数

B. 假设 a、b、c 都不是偶数

C. 假设 a、b、c 至多有一个是偶数

D. 假设 a、b、c 至多有两个是偶数

▶4. "正数或零能够开平方"是由简单命题 p：________和 q：________构成的________形式的复合命题.

▶5. 分别用"p 或 q""p 且 q""非 p"填空：

(1)命题："$\sqrt{5}$的值不超过 3"是________形式.

(2)命题："矩形的对角线互相垂直平分"是________形式.

(3)命题：方程组 $\begin{cases}x+y=-7\\xy=12\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=-4\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-3\end{cases}$ 是________形式.

▶6. 用反证法证明：若 $a^2+b^2=c^2$，则 a、b、c 不可能都是奇数.

小结归纳

1. 有的"p 或 q"与"p 且 q"形式的复合命题语句中，字面上未出现"或"与"且"字，此时应从语句的陈述中搞清含义从而分清是"p 或 q"还是"p 且 q"形式. 一般地，若两个命题属于同时都要满足的为"且"，属于并列的为"或".

2. 原命题与它的逆否命题同为真假，原命题的逆命题与否命题同为真假，所以对一些命题的真假判断(或推证)，我们可通过对与它同真假的(具有逆否关系的)命题来判断(或推证).

§1.3　充分条件与必要条件

复习目标

掌握充分必要条件的意义，能够判定给定的两个命题的充要关系.

回顾性题组

▶1. "$\alpha\neq\beta$"是"$\cos\alpha\neq\cos\beta$"的…………………………（　）

A. 充要条件

B. 充分条件

C. 必要但不充分条件

D. 非充分也非必要条件

▶2. 已知条件 P：$-5<x<1$，条件 Q：$x^2=4$，则 P 是 Q 的……………………………………………………（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

▶3. 如果命题 p 是命题 q 的充分条件，那么 q 是 p 的________条件，$\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

▶4. 集合 $A=\{x|x+1>0\}$，$B=\{x|x-2<0\}$，则"$x\in A\cap B$"是"$x\in A$ 或 $x\in B$"的________条件.

▶5. 指出下列各命题中 p 是 q 的什么条件

(1)在$\triangle ABC$中，$p:A>B$　$q:BC>AC$

(2)$p:a=3$，$q:(a+2)(a-3)=0$

(3)$p:a>2$，$q:a>5$

(4)$p:a<b$，$q:\frac{a}{b}<1$

▶6. 设 A 是 B 的充分不必要条件，C 是 B 的必要不充分条件，D 是 C 的充要条件，问 D 是 A 的什么条件？

样板性题组

▶1. 已知 $p:|3x-4|>2$，$q:\frac{1}{x^2-x-2}>0$，则$\neg p$是$\neg q$的什么条件.

解：$\because |3x-4|>2\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\frac{2}{3}$，

$\therefore \neg p:\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$，又$\because \frac{1}{x^2-x-2}>0$

$\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<-1$，$\therefore \neg q:-1\leqslant x\leqslant 2$

又$\because \neg p\Rightarrow \neg q$，但$\neg q\not\Rightarrow p$

$\therefore \neg p$是$\neg q$的充分但不必要条件.

评注：逻辑联结词“或”“且”“非”是与集合中的“交”“并”“补”相关的. 若条件 r 中的元素组成的集合为 p，那么$\neg p$组成的集合就是集合 p 的补集. 学生中容易出现由 $q:\frac{1}{x^2-x-2}>0$ 得$\neg q:\frac{1}{x^2-x-2}\leqslant 0$ 的错误，应予以避免.

▶2. 下列说法对不对？如果不对，分析错误的原因：

(1)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的充分条件；

(2)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的必要条件；

解：(1)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的充分条件是指：$x^2=x+2\Rightarrow x\sqrt{x+2}=x^2$.

但这里“$\Rightarrow$”号不成立，因为 $x=-1$ 时，“$\Rightarrow$”号左边为真，但右边为假. 得出错误结论的原因可能是应用了错误的推理：

$x^2=x+2\Rightarrow x=\sqrt{x+2}\Rightarrow x^2=x\sqrt{x+2}$.

这里推理的第一步是错误的(请同学补充说明具体错在哪里)

(2)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的必要条件是指：$x\sqrt{x+2}=x^2\Rightarrow x^2=x+2$.

但这里“$\Rightarrow$”号不成立，因为 $x=0$ 时，“$\Rightarrow$”号左边为真，但右边为假. 得出错误结论的原因可能是用了错误的推理.

$x\sqrt{x+2}=x^2\Rightarrow\sqrt{x+2}=x\Rightarrow x+2=x^2$.

这里推理的第一步是错误的(请同学补充说明具体错在哪里)

评注：此题的解答比较注重逻辑推理. 事实上，也可以从真值集合来分析. $x^2=x+2$ 的真值集合是$\{-1,2\}$，$x\sqrt{x+2}=x^2$ 的真值集合是$\{0,2\}$，$\{-1,2\}\not\subseteq\{0,2\}$，而$\{0,2\}\not\subseteq\{-1,2\}$，所以(1)、(2)两个结论都不对.

▶3. 已知 $a>0$，求证：$x^2>a$ 的充要条件是 $|x|>\sqrt{a}$(二次不等式的开方解法)

证明：(1)充分性：因为$|x|>\sqrt{a}>0$，所以，$|x|^2=|x||x|>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$，即 $x^2>a$.

(2)必要性：因为 $x^2>a$，$a>0$，所以 $x<-\sqrt{a}$ 或 $x>\sqrt{a}$.

当 $x<-\sqrt{a}$ 时，$x<0$，从而有 $|x|=-x$，所以 $-|x|<-\sqrt{a}$，即$|x|>\sqrt{a}$.

当 $x>\sqrt{a}$时，$x>0$，从而有$|x|=x$，所以$|x|>\sqrt{a}$. 总之恒有$|x|>\sqrt{a}$.

巩固性题组

▶1. 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sin B$ 是 $A=B$ 的 ……………(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

▶2. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M\cap P$”的 ……………………………………………(　　)

A. 充分条件但非必要条件

B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件

D. 非充分条件也非必要条件

▶3. 如果$\neg A\Rightarrow B$，那么 A 是$\neg B$的________条件.

▶4. 命题 A：两曲线 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$ 相交于点 $P(x_0,y_0)$，命题 B：曲线 $F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$(λ 为常数)过点 $P(x_0,y_0)$，则 A 是 B 的________条件.

▶5. 设全集为 U，在下列条件中，哪些是 $B\subseteq A$ 的充要条件？

(1)$A\cup B=A$；　　(2)$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，

(3)$(\complement_U A)\subseteq(\complement_U B)$；　(4)$A\cup(\complement_U B)=U$

▶6. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

小结归纳

同集合部分一样，高考试题中对充分必要条件的考查，往往是与其他知识融合在一起. 而单独对其考查，往往是在选择题中，难度一般不大.

素质能力测试(一)

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分)

1. 下列集合中,表示同一集合的是 …………………… ( )

A. $P=\{1,2\}, Q=\{(1,2)\}$

B. $P=\{3,2\}, Q=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\}, N=\{y|x+y=1\}$

D. $M=\{(3,2)\}, N=\{(2,3)\}$

2. 下列四个命题:①$\varnothing=\{0\}$;②空集没有子集;③任何一个集合必有两个或两个以上的子集;④空集是任何一个集合的子集. 其中正确的有 …………………… ( )

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

3. 集合 $M=\{x^2,2x-1,-x-1\}$,$N=\{x^2+1,-3,x+1\}$,且 $M\cap N=\{0,-3\}$,则 x 的值为 …………………… ( )

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

4. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$,$B=\{x||x|<a\}$,若$\subsetneqq A$,则实数 a 的取值范围是 …………………… ( )

A. $a<1$　B. $a\leqslant 1$

C. $-1<a\leqslant 3$　D. $0<a\leqslant 1$

5. 集合 $A=\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{y|y=3l+1,l\in\mathbf{Z}\}$,$S=\{y|y=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是 …………… ( )

A. $S\subsetneqq B\subsetneqq A$　B. $S=B\subsetneqq A$

C. $S\subsetneqq B=A$　D. $S\supsetneqq B=A$

6. 下列判断正确的个数为 …………………… ( )

(1)$x^2\neq y^2\Leftrightarrow x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 是正确的;(2)命题 $5<2$ 且 $7>3$ 为真;(3)$x^2=y^2\Rightarrow x=-y$ 说法是不正确的;(4)原命题为假,则它的否命题不一定为假.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

7. 已知 p:$x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解;q:a、b 是整数;则 p 是 q 的 …………………… ( )

A. 充分不必要条件

B. 充要条件

C. 必要不充分条件

D. 不充分非必要条件

8. 下列判断错误的是 …………………… ( )

A. 命题"若 q 则 p"与"若$\neg p$ 则$\neg q$"是互为逆否命题

B. "$am^2<bm^2$"是"$a<b$"的充分必要条件

C. "矩形的两条对角线相等"的否命题为假

D. "命题 $\varnothing\subsetneqq\{1,2\}$或 $4\notin\{2,3\}$"为真

9. 方程 $mx^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是 …………………… ( )

A. $0<m\leqslant 1$ 或 $m<0$　B. $0<m\leqslant 1$

C. $m<1$　D. $m\leqslant 1$

10. 用反证法证明如果 $a>b$,那么$\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$,假设的内容应是 …………………… ( )

A. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$

B. $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

C. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$且$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

D. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$或$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

二、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

11. 设 $A=\{x\in\mathbf{Z}|\frac{8}{4-x}\in\mathbf{Z}\}$,则 $A=$________(用列举法表示)

12. 在 100 个学生中,有篮球爱好者 60 人,排球爱好者 65 人,则既爱好篮球又爱好排球的人数最少有________个,最多有________个.

13. 已知 $M=\{m|\frac{m-4}{2}\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|\frac{x+3}{2}\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap N=$________.

14. 判断下列命题的真假

(1)$4\leqslant 5$ 是________命题.

(2)"方程$\frac{x+1}{x^2-1}=1$ 没有实根"是________命题.

(3)"1 既是奇数,又是质数"是________命题.

(4)"方程$(x+3)^2+(y-5)^2=0$ 的解是 $x=-3$ 或 $y=5$ 是________命题.

15. 所给命题(1)"菱形的两条对角线互相平分"的逆命题;(2)$\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$ 或 $\{0\}=\varnothing$;(3)对于命题 p 且 q,若 p 假 q 真,则 p 且 q 为假;(4)"有两条边相等且有一个角是 60°"是"一个三角形为等边三角形"的充要条件. 其中为真的序号为________.

三、解答题(每小题 10 分,共 40 分)

16. 已知 $A=\{x|x^2-4x+(-5)>0\}$,$B=\{x||x-a|<4\}$,且 $A\cup B=\mathbf{R}$,求实数 a 取值的集合.

17. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值,并求出这个元素;

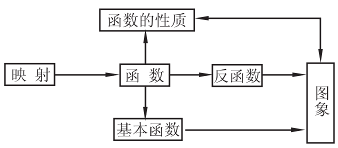
(2)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

▶18. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0(a \in \mathbf{R})$ 的解集分别是 A 与 B，若使 $A \subseteq B$，求 a 的取值范围.

▶19. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$，是否存在常数 a、b、c，使得不等式 $x \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 x 都成立？若存在，求出 a、b、c，若不存在，请说明理由.

第二章 函 数

知 识 结 构



考核内容与要求

1. 映射与函数:理解映射与函数的概念及意义,掌握求函数的表达式、定义域、值、值域、最值的方法,理解函数与图象的对应关系,掌握作函数图象的基本方法,能绘出基本函数的图象,能应用函数思想解决实际应用方面的问题.

2. 单调性、奇偶性:理解基本概念,能正确判断给定函数的单调区间、单调性或奇偶性,会求较简单函数的单调区间.

3. 反函数:掌握基本概念,会求给定函数的反函数以及反函数的定义域、值域. 会利用奇偶性或互反函数的图象关系作函数的图象.

4. 二次函数、指数函数与对数函数:掌握这些函数的基本性质、运算法则和技巧,熟悉各类函数的图象并能利用图象解决与函数有关的问题.

5. 强化化归思想,培养应用能力,引导学生用函数的思想看待问题,处理问题.

学 法 指 导

一、函数是中学数学中最重要的内容之一,应主要从定义、图象、性质三方面加以研究和考查,在复习时要全面掌握、透彻理解每一个知识点.

1. 准确把握函数方面的数学符号及数学语言.

2. 深刻理解一些常见函数(指、对数函数,一、二次函数等)的性质,熟悉它们的解析式与图象,以及解析式与图象之间的有机联系,把握数形之间的相互利用.

3. 掌握函数图象变换的常用方法(平移、翻转等).

4. 对于二次函数问题应特别引起重视,复习时应适当加深加宽,不能停留在浮浅的基础阶段.

5. 含参数函数的讨论是函数问题中的重点,复习时应适当加强这方面的训练,做到条理清楚、分类明确、不重不漏.

6. 利用函数理论解应用题也应引起足够的重视.

二、数学思想

数学中的四大思想——函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转换思想在函数一章中全都得到了充分体现,本章更应突出数形结合思想与分类讨论思想,通过对例题、习题的理解,重点培养这两方面的能力.

三、数学方法

1. 函数中的最值问题在高考中多次出现,是高考中的重要题型之一,应能掌握几种求最值的常用方法,如配方法、判别式法、均值定理法等,而对于二元函数,应化成一元函数求最值.

2. 含参数函数的讨论问题是高考热点问题,应高度重视,复习时宜适当加强,进行多种类型的训练,但不宜过于繁杂.

3. 关于函数性质问题的考查,在高考中,使用具体函数的越来越少,而使用抽象的函数符号的越来越多,面对这种形势,在复习函数性质时,应注意将具体函数的有关知识进行延伸,以适应高考的要求.

§2.1 映射与函数

复 习 目 标

了解映射的概念,能根据定义判断所给的对应是否为映射. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.

回 顾 性 题 组

▶1. 下列从 A 到 B 的对应法则 f 是映射的为…………( )

A. $A=\mathbf{R}$,$B=\mathbf{R}^+$,f:取绝对值

B. $A=\mathbf{R}^+$,$B=\mathbf{R}$,f:开平方

C. $A=\mathbf{R}^+$,$B=\mathbf{R}$,f:取对数

D. $A=\mathbf{Q}$,$B=\{$偶数$\}$,f:乘 2

▶2. 点(x,y)在映射 f 下的象为$(\frac{\sqrt{3}x+y}{2},\frac{-x+\sqrt{3}y}{2})$,则点$(2,0)$在 f 作用下的原象为________.

▶3. 集合 $A=\{3,4\}$,$B=\{5,6,7\}$,那么可建立从 A 到 B 的映射个数是________,从 B 到 A 的映射个数是________.

▶4. 下列四组函数中,表示相同函数的一组是…………( )

A. $y=2^{\log_2(x+1)}$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

B. $y=\frac{x^2}{x}$ 和 $y=\log_3 3^x$

C. $y=(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}})^2$ 和 $y=e^{\ln(x+1)}$

D. $y=(\sqrt{x})^2$ 和 $y=a^{\log_a x}(a>0$ 且 $a\neq1)$

▶5. 若 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,则 $f(x)=$________.

▶6. $g(x)=1-2x$,$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$,则 $f(\frac{1}{2})$等于 ……………………………………( )

A. 1　　B. 3　　C. 15　　D. 30

样板性题组

▶1. 已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，并作图象.

评述：了解函数符号的意义，理解相互之间的关系.

答案：$f[g(x)]=\begin{cases}2x^2-1 & x\geqslant 0\\ -3 & x<0\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}(2x-1)^2 & x\geqslant \frac{1}{2}\\ -1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$ 图象略.

▶2. A、B 两地相距 150 公里，某汽车以每小时 50 公里的速度从 A 地到 B 地，在 B 地停留 2 小时之后，又以每小时 60 公里的速度返回 A 地. 写出该车离开 A 地的距离 S（公里）关于时间 t（小时）的函数关系，并画出图象.

解：由 $50t=150$ 得 $t_1=3$，

由 $60t=150$ 得 $t_2=\frac{5}{2}$.

∴当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时，$S=50t$；当 $3<t\leqslant 5$ 时，$S=150$；当 $5<t\leqslant 7.5$ 时，$S=150-60(t-5)$，故所求函数关系式为：

$S=\begin{cases}50t & t\in[0,3]\\ 150 & t\in(3,5]\\ 150-60(t-5) & t\in(5,7.5]\end{cases}$ 图象（略）

▶3. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)+f(x+2)=0$，当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x-1$，求当 $1<x\leqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

解：设 $1<x\leqslant 3$，则 $-1<x-2\leqslant 1$，又对任意的 x，有 $f(x)+f(x+2)=0$，∴ $f(x+2)=-f(x)$，∴ $f(x-2)=-f[(x-2)+2]=-f(x)$；又 $-1<x-2\leqslant 1$ 时，$f(x-2)=2(x-2)-1=2x-5$，

∴ $f(x)=-f(x-2)=-2x+5(1<x\leqslant 3)$

评述：将 $1<x\leqslant 3$ 转化成 $-1<x-2\leqslant 1$ 再利用已知条件是解本题的关键.

▶4. $\triangle ABC$ 中，$|AB|=4$，$|AC|=2$，P、Q 分别是 AB、AC 上的动点，且满足 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，若设 $|AP|=x$，$|AQ|=y$，(1)写出 x 的取值范围；(2)求 $y=f(x)$ 的解析式；(3)作出 $y=f(x)$ 的图象.

解：由已知 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 得 $\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin A\Rightarrow xy=4$. 而 $|AB|=4$，$|AC|=2$，点 P、Q 分别在 AB、AC 上运动.

∴ $0<x\leqslant 4$，$0<y\leqslant 2$ 有 $xy\leqslant 2x$.

∴ $2x\geqslant 4$ 得 $x\in[2,4]$

∴ $y=\frac{4}{x}(2\leqslant x\leqslant 4)$. 图略.

评述：本题是函数在几何问题上的应用，应借助图形研究变量间的关系，以建立函数式，所写出的函数式不可忘记定义域.

巩固性题组

▶1. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是……………………………………（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

▶2. 设集合 A 中含 4 个元素，B 中含 3 个元素. 现建立从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$，且使 B 中每个元素在 A 中都有原象，则这样的映射有____个.

▶3. 如图 2—1，$y=f(x)$ 的图象为圆心在原点的两段弧，则 $f(x)$ 的解析式应是____.

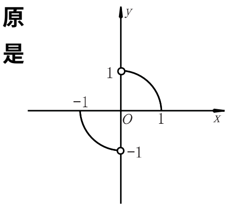


图 2—1

▶4. 已知 $f(x+1)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0\\ \lg(-x) & x<0\end{cases}$，则 $f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)=$________.

▶5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(ab)=f(a)+f(b)$，且 $f(2)=p$，$f(3)=q$，则 $f(36)=$________.

▶6. 如果函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+x)=-f(1-x)$，试求 $f(2)+f(-2)$ 的值.

小结归纳

1. 理解映射的概念，即对于映射 $f:A\to B$，须（Ⅰ）A、B 为非空集合，（Ⅱ）A 中无"剩余"元素，即没有不参与对应的元素，（Ⅲ）单值对应.

2. 理解函数与映射的关系. 函数的三要素为定义域、值域和对应法则，其中定义域与对应法则放在一起构成一个完整的函数，缺一不可.

3. 若函数在定义域的不同子集上对应法则不同，可用几个式子来表示函数，这种形式的函数叫分段函数，它是一类重要函数.

§2.2　函数的定义域、值域、解析式

复习目标

知识目标：(1)由所给函数表达式求函数定义域.

(2)掌握求值域的几种常用方法.

(3)能根据函数所具有的某些性质或它所满足的一些关系，求出它的解析式.

能力目标：培养学生思维的严密性、多样性.

回顾性题组

▶1. 函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是……………………………………………（　　）

A. $[-1,1]$　　B. $[\frac{1}{2},2]$

C. $[\sqrt{2},4]$　　D. $[1,4]$

▶2. 已知 $f(x^2-4)=\lg\frac{x^2}{x^2-8}$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

▶3. 在区间$[\frac{1}{2},2]$上函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 在同一点取得相同的最小值，那么 $f(x)$ 在$[\frac{1}{2},2]$上的最大值是 …………………………………………………… (　　)

A. $\frac{13}{4}$　　B. 4　　C. 8　　D. $\frac{5}{4}$

▶4. 函数 $y=\sqrt{1-2x}+x$ 的值域是______.

▶5. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+1$，则函数 $f(x)$ 的解析式为…………………………………………………………………… (　　)

A. $f(x)=x^2$

B. $f(x)=x^2+1(x\geqslant1)$

C. $f(x)=2x^2-2x+2(x\geqslant1)$

D. $f(x)=x^2-2x(x\geqslant1)$

▶6. 若 $f(\frac{1}{x})=\frac{x}{1-x}$. 求 $f(\cos^2x)$.

样板性题组

▶1. 在△ABC 中，$BC=2$，$AB+AC=3$. 中线 AD 的长为 y，若以 AB 的长为 x，建立 y 与 x 的函数关系，指出其定义域.

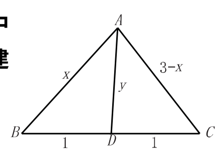


图 2—2

解：设$\angle ADC=\theta$，

则$\angle ADB=\pi-\theta$，

根据余弦定理得：

$1^2+y^2-2y\cos\theta=(3-x)^2$　　①

$1^2+y^2-2y\cos(\pi-\theta)=x^2$　　②

由①＋②整理得：$y=\sqrt{x^2-3x+\frac{7}{2}}$

其中$\begin{cases}x>0\\x+2>3-x\\(3-x)+2>x\end{cases}$　解得$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$.

∴函数的定义域为$(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

评述：函数的定义域是使式子有意义的自变量的取值范围，同时也要注意变量的实际意义的要求.

▶2. 若函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x^2+c}$的值域为$[-1,5]$，求实数 a,c.

解：由 $y=f(x)=\frac{ax+1}{x^2+c}$ 得 $x^2y-ax+cy-1=0$，当 $y=0$ 时，$ax=-1$，∴$a\neq0$；当 $y\neq0$ 时，

∵$x\in\mathbf{R}$，

∴$\Delta=a^2-4y(cy-1)\geqslant0$，∴$4cy^2-4y-a^2\leqslant0$，

∵$-1\leqslant y\leqslant5$，∴$-1,5$ 是方程 $4cy^2-4y-a^2=0$ 的两根，

∴$\begin{cases}\frac{1}{c}=4\\-\frac{a^2}{4c}=-5\end{cases}$，∴$\begin{cases}a=\pm\sqrt{5}\\c=\frac{1}{4}\end{cases}$

评述：求 $f(x)=\frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}(a_1{}^2+a_2{}^2\neq0)$的值域时，常利用函数的定义域非空这一隐含的条件，将函数转化为方程，利用 $\Delta\geqslant0$，转化为关于函数值的不等式；求解时，要注意二次项系数为字母时要讨论.

▶3. 求函数 $y=x+\sqrt{-x^2+4x-3}$的值域.

分析：本题易看出用换元法，但若设 $\sqrt{-x^2+4x-3}=t$，则 x 不易用 t 表示，故此法不妥；对函数变形 $y=x+\sqrt{1-(x-2)^2}$发现 $\sqrt{1-(x-2)^2}$类似三角中的平方关系，故可用三角换元.

解：$y=x+\sqrt{-x^2+4x-3}$变形为 $y=x+\sqrt{1-(x-2)^2}$，

设 $x-2=\sin\theta$，其中 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，则 $x=2+\sin\theta$

∴$y=2+\sin\theta+\cos\theta=2+\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

∵$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$，

∴$1\leqslant y\leqslant2+\sqrt{2}$

评述：换元法在求无理式函数的值域中经常用，其目的是把无理式转化成有理式或三角函数，但要注意引入的变量要继承原变量所确定的所换部分的取值范围.

▶4. 设二次函数 $f(x)$满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$的解析式.

解法一：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，由

$f(x-2)=f(-x-2)$得 $4a-b=0$　　①，

又$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，

∴$b^2-4ac=8a^2$　　②，

由已知 $c=1$　　③. 由①②③得 $b=2$，$a=\frac{1}{2}$，$c=1$.

∴$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$

解法二：由 $f(x-2)=f(-x-2)$知 $y=f(x)$的图象的对称轴 $x=-2$，

∴可设 $f(x)=a(x+2)^2+k$.（余略）

解法三：∵$y=f(x)$的图象有对称轴 $x=-2$，又$|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，∴$y=f(x)$与 x 轴的交点为$(-2-\sqrt{2},0)$，$(-2+\sqrt{2},0)$，故可设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$，∵$f(0)=1$，

∴$a=\frac{1}{2}$. ∴$f(x)=\frac{1}{2}(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

即 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$

评述：三种方法均是用待定系数法求二次函数的解析式，可以看到充分挖掘题目的隐含条件及充分利用图形的直观性，是简化运算的有效手段.

巩固性题组

▶1. 求函数 $y=\log_a(a^x-1)(a>0,a\neq1)$的定义域.

▶2. 高为 h，底面半径为 R 的圆柱形容器内，以单位时间内体积为 a 的速度充水，试求出水面高 y（用时间 t 表示）的函数式，并求其定义域.

▶3. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$，求当 $x\in(-\infty,-2)$ 时的解析式.

▶4. 求函数 $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$ 的定义域.

▶5. 已知函数 $y=1-2a-2ax+2x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最小值 $f(a)$，求 $f(a)$ 的表达式；并指出当 $a\in[-2,0]$ 时，函数 $Q=\log_{\frac{1}{3}}f(a)$ 的值域.

小 结 归 纳

1. 解析式表示函数与自变量之间的一种对应关系，是函数与自变量之间建立联系的桥梁.

2. 解析式只表示一种对应关系，与所取的字母无关，如 $y=2x+1$ 与 $u=2t+1$ 是同一个函数.

3. 求函数解析式的方法一般有待定系数法和换元法，如果已知函数式的构造模式，可用待定系数法；如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式来求 $f(x)$，常用换元法；当已知表达式较简单时，甚至可直接用凑合法求解.

4. 用赋值法（特殊值法），求函数式中的参数，是一种比较常用的方法.

5. 根据实际问题求函数表达式，是应用函数知识解决实际问题的基础，在设定或选定自变量后去寻求等量关系，以求得表达式，要注意函数定义域应由实际问题确定.

6. 要熟悉求函数值域的几种基本方法，遇到求值域的问题，应优先考虑采用特殊方法，如不等式法、配方法、几何法、换元法等，当特殊方法不易解决时，再采用一般方法如方程法求解. 如一题可有多种方法解决时，应注意选择最优解法.

7. 求函数值域没有通用方法和固定模式，要靠自己积累经验，掌握规律.

8. 求函数值域，不但要重视对应法则，而且要特别注意定义域对值域的制约作用.

9. 函数的值域常常化归为求函数的最值问题，要重视函数单调性在确定函数最值过程中的作用.

10. 函数的值域可以转化为求其反函数的定义域，这种手段往往可以使问题出现“柳暗花明又一村”的效果，反函数的值域就是原函数的定义域.

§2.3 函数的单调性

复 习 目 标

理解函数单调性的概念，能判断一些较简单函数的单调性；了解周期函数的意义.

回 顾 性 题 组

▶1. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有单调性，且 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上……………………（　　）

A. 至少有一个实根　　B. 至多有一个实根

C. 没有实根　　D. 必有惟一的实根

▶2. 已知偶函数 $y=\log_a|x-b|$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增，则 a,b 分别满足 ……………………（　　）

A. $a>1,b>0$　　B. $a>1,b\in\mathbf{R}$

C. $0<a<1,b=0$　　D. $a>1,b=0$

▶3. 设 $f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）是以 3 为周期的奇函数，且 $f(1)>1$，$f(2)=a$，则 ……………………（　　）

A. $a>2$　　B. $a<-2$

C. $a>1$　　D. $a<-1$

▶4. 函数 $y=\log_a(x^2+2x-3)$ 当 $x=2$ 时 $y>0$，则此函数的单调递减区间是 ……………………（　　）

A. $(-\infty,-3)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-1,+\infty)$

▶5. 已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+5)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是________.

样 板 性 题 组

▶1. 求函数 $f(x)=x^2-2ax+3$ 在 $(-2,2)$ 内的单调性.

解：$f(x)=(x-a)^2+3-a^2$，结合图象易见：

(1) 当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内是增函数；

(2) 当 $-2<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(-2,a]$ 内是减函数，在 $(a,2)$ 内是增函数；

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内是减函数.

评述：本例涉及分类讨论和数形结合两种数学思想.

▶2. 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $[-1,1]$ 上是奇函数，又是减函数.

(1) 证明：对任意的 x_1、$x_2\in[-1,1]$，有

$[f(x_1)+f(x_2)](x_1+x_2)\leqslant 0$；

(2)若 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求实数 a 的取值范围.

(1)证明:若 $x_1+x_2=0$,显然不等式成立;若 $x_1+x_2<0$,则 $-1<x_1<-x_2<1$,

$\because f(x)$ 在$[-1,1]$上是奇函数又是减函数,

$\therefore f(x_1)>f(-x_2)\Rightarrow f(x_1)>-f(x_2)\Rightarrow$

$f(x_1)+f(x_2)>0$,$\therefore$ 原不等式成立;

同理可证当 $x_1+x_2>0$ 时原不等式也成立.

(2)解:由 $f(1-a^2)+f(1-a)<0\Rightarrow f(1-a^2)<-f(1-a)\Rightarrow$

$f(1-a^2)<f(a-1)$,由函数单调减,故可得以下不等式组:

$$\begin{cases}-1\leqslant 1-a^2\leqslant 1\\-1\leqslant a-1\leqslant 1\\1-a^2>a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant a^2\leqslant 2\\0\leqslant a\leqslant 2\\-2<a<1\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant a<1$$

故所求 a 的取值范围是$[0,1)$.

▶3. 定义在 R 上的函数 $y=f(x)$,$f(0)\neq 0$,当 $x>0$ 时,$f(x)>1$,且对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$,有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$.

(1)证明:$f(0)=1$;

(2)证明:对任意的 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $f(x)>0$;

(3)证明:$f(x)$ 是 R 上的增函数;

(4)若 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$,求 x 的取值范围.

证明:(1)令 $a=b=0$,则 $f(0)=f^2(0)$,又

$f(0)\neq 0$,$\therefore f(0)=1$

(2)当 $x<0$ 时,$-x>0$,$\therefore f(0)=f(x)\cdot f(-x)=1$,

$\therefore f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}>0$,又 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 1>0$,

$\therefore x\in\mathbf{R}$ 时恒有 $f(x)>0$

(3)设 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$,$\therefore f(x_2)=f(x_2-x_1+x_1)=f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)$,$\because x_2-x_1>0$,

$\therefore f(x_2-x_1)>1$,

又 $f(x_1)>0$,$\therefore f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)>f(x_1)$

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$,$\therefore f(x)$ 是 R 上的增函数.

(4)由 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$,$f(0)=1$ 得

$f(3x-x^2)>f(0)$,又 $f(x)$ 是 R 上的增函数,

$\therefore 3x-x^2>0$,$\therefore 0<x<3$

评述:解本题的关键是灵活应用题目条件,尤其是(3)中“$f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]$”是证明单调性的关键,这里体现了向条件化归的策略.(3)也可以:设 $x_2=x_1+t(t>0)$,$f(x_2)=f(x_1+t)=f(x_1)\cdot f(t)>f(x_1)$;或者:设 $x_1<x_2$,则 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=\dfrac{f(x_2)\cdot f(-x_1)}{f(x_1)\cdot f(-x_1)}=\dfrac{f(x_2-x_1)}{f(0)}>1$,又 $f(x_1),f(x_2)>0$,$\therefore f(x_2)>f(x_1)$.

巩固性题组

▶1. 函数 $y=\log_a(2-ax)$在$[0,1]$上是减函数,则 a 的取值范围是 ……………………………………………………… (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

▶2. $y=(\dfrac{1}{2})^{x^2+2x-3}$的单调递减区间是________,$y=\log_{\frac{1}{3}}(3-2x-x^2)$的单调递增区间是________.

▶3. 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{3}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,如果当 $x\in(-\infty,1]$时,$f(x)$有意义,求 a 的取值范围.

▶4. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}(a\neq 0)$在 $x\in(-1,1)$上的单调性.

▶5. 设函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数,并在区间$(-\infty,0)$上单调递增,$f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,当 a 取何值时,函数 $y=(\dfrac{1}{2})^{a^2-3a+1}$是单调递减函数?

小结归纳

1. 讨论函数单调性必须在定义域内进行,即函数的单调增减区间是其定义域的子集,因此讨论函数单调性,必须先确定函数的定义域.

2. 根据定义证明函数单调性的一般步骤是:(1)设 x_1、x_2 是给定区间内的任意两个值,且 $x_1<x_2$;(2)作差 $f(x_2)-f(x_1)$,并将此差式变形(要注意变形的程度);(3)判断 $f(x_2)-f(x_1)$的正负(要注意说理的充分性)以确定其增减性.

3. 讨论复合函数单调性的根据是:设 $y=f(u)$,$u=g(x)$,$x\in[a,b]$,$u\in[m,n]$都是单调函数,则 $y=f[g(x)]$在$[a,b]$上也是单调函数.

(1)若 $y=f(u)$是$[m,n]$上的增函数,则 $y=f[g(x)]$的增减性与 $u=g(x)$的增减性相同;

(2)若 $y=f(u)$是$[m,n]$上的减函数,则 $y=f[g(x)]$的增减性与 $u=g(x)$的增减性相反.

§2.4　函数的奇偶性

复习目标

知识目标:

理解函数奇偶性的定义. 能判断一些较简单函数的奇偶性,掌握奇偶函数的对称关系.

能力目标:

培养学生灵活应用奇偶性定义解题的能力.