前　言

QIAN YAN

随着 2002 年我国高等学校招生全面实行“3+X”考试，新一轮高考改革的第一步目标已经实现。我国基础教育和高考改革持续深入的崭新局面，为我们编写 02—03 年新版《高中总复习优化设计》系列丛书提供了广阔的背景。在积极组织市场调查研究，认真学习高考改革精神和深入研究高考“3+X”命题特点的基础上，我们进一步加大了对本系列丛书的结构调整力度，更加突出优化、设计、新颖等基本特色和精品意识，力求新版图书在保持传统特色的同时，与时俱进，为广大考生提供更新更好的“优化设计”。

新颖：反映“3+X”考试的最新信息，从新颖、别致的角度，选择基础性、综合性、多元性的例题和试题，体现创新思维和实践能力的要求。

优化：放眼整体，全程优化，创造性地设计各分册的内容框架。既考虑讲解的启发作用，又突出练习的主体功能；既考虑本学科的系统完整，又兼顾跨学科的综合沟通。

科学：在对近年高考备考实践进行深入分析研究的基础上，全面吸收了率先实行综合考试地区的备考成功经验，以知识整合、技能演练、能力提升等为内在线索进行栏目、板块的设置、编排，体现了最新复习导向。

实用：本书的传统特色之一是“以讲带练”。本次修订从练习的方式、内容、时间控制等多角度进行综合设计、优化取舍，更适合教师整体操作和学生个体使用。

本分册以“试验修订本教材”为蓝本，以数学高考“更加注重对能力和素质的考查；命题遵循中学教学大纲但不拘泥于大纲；试题中增加应用性和能力性题目”的指导思想为依据，立足教材，编织知识网络；突出基础，蕴含数学思想；培养创新意识，强调应用能力。全书体现了数学高考能力立意方向，反映了时代特色，适用于 2003 年高考第一阶段备考复习。

本书在原有栏目的基础上增设了以下栏目：

[内容综述]对本章主要内容和重点、难点、热点进行阐释，以便读者进一步明确并强化对上述内容的理解与掌握。

[学法指导]概述本章涉及的基本数学思想和方法，介绍复习本章内容的基本方略，指明复习中应注意的问题。

[基础水平测试]学习者通过试做基础水平测试题，可以充分了解本人当前水平和薄弱环节，准确定位本章复习重点、难点，是制定个性化复习计划的有效途径。

本书在试题选择上有以下特色：

一、各章节围绕要点、考点选择题目，有梯度编排，归结于考点综合，脉络分明，利于构建数学认知结构。

二、应用能力、综合考试的根基还是学科基础，作为基础学科的数学也是如此。本书突出第一阶段复习特点，做足"基础"文章，每章节必有以教材习题为原型的改编题目，将蕴含在基础知识中的数学思想和数学基本方法印证于解题过程之中，以巩固基础、深化理解、正向迁移。

三、各章节均编排了一些立意鲜明、背景新颖、设问灵活的习题，同时加大了探索性、应用性题型的数量，以升华读者的学科综合素质，提高以数学为载体，将知识迁移到不同情境去的能力。

四、注重错题分析，以提高辨误、归纳能力。

本书还在编写中努力体现数学与传统和现代科技的交融，注意培养后续学习的潜能。

本书是为了帮助教师把握《高中总复习优化设计》的设计思想和意图，促进对该书的有效使用而专门编写的。本书对《高中总复习优化设计》中试题进行了详细解析及思路点拨，并附有大量备课资料和必要的教学建议，内容更加丰富全面，将会使教师的教学指导与备课更加得心应手。

在本书即将付梓之际，我们收到了教育部最新修订的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订版）》和数学教学大纲。新的课程计划与数学教学大纲认真贯彻了《基础教育课程改革纲要（试行）》精神，体现了新课程理念，重新表述了数学学科的教学目的，突出了数学思想方法教学，注重发展学生创新意识、应用意识、提高数学思维、建模、实践能力，必修内容有所减少，要求有所降低，选修Ⅰ中"统计"内容有修改，选修Ⅱ中"微分"和"积分"被删除；"介绍微积分建立的时代背景和历史意义"予以保留。为了适应这一变化和要求，我们特聘请有关专家，删除了本书中原编入但与最新大纲明显不相符合的部分内容，对"积分"加注了星号"＊"，请读者使用时给予注意。

本书编者身处中学数学教学第一线，投身实践，潜心研究，精心设计，集全国各地先进经验于本书，希望能给广大师生高三总复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限，书中难免有疏忽与不妥，敬请广大读者批评赐教。

编　者

2002年6月

目录 MU LU

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函 数

第三章 数 列

第四章 三角函数

目录 LU MU

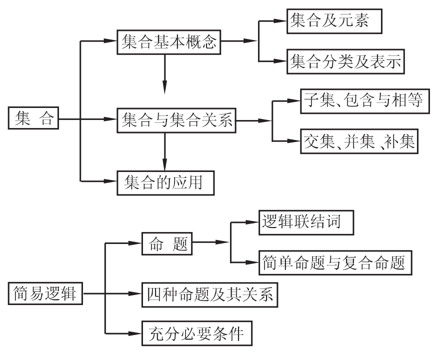
目录 MU LU

目录 MU LU

备课札记

第一章　集合与简易逻辑

知 识 结 构



考核内容与要求

1. 考核内容

集合. 子集. 补集. 交集. 并集.

逻辑联结词. 四种命题. 充要条件.

2. 考核要求

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念;了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义;掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或""且""非"的含义;理解四种命题及其相互关系;掌握充要条件的意义.

(3)学会运用数形结合,分类讨论的思想方法分析和解决有关集合的问题,形成良好的思维品质.

内 容 综 述

1. 主要内容

本章共分两大节. 第一大节是"集合",有集合与集合的元素的概念,集合的表示法,集合与集合之间的包含与相等的关系,子集的概念及与子集相联系的全集与补集的概念,集合的运算及交集、并集等. 最后是绝对值不等式与一元二次不等式的解法. 第二大节是"简易逻辑",这一节里首先是逻辑连结词"或""且""非"的含义及判断复合命题真假的方法. 其次是四种命题及相互的关系,反证法,最后是充要条件的有关知识.

2. 重点难点热点阐释

第一大节的重点是有关集合的基本概念,难点是有关集合的各个概念的涵义及这些概念之间的相互区别与联系. 第二大节的重点是逻辑连结词"或""且""非"与充要条件,难点是对一些代数命题真假的判断.

高考命题趋势

从近几年的考题中看,集合这部分的考题通常是用列举法或描述法给出集合后,考查空集与全集的概念;元素与集合,集合与集合之间的关系;集合的交、并、补运算. 以上内容又以集合的运算为重点考查内容. 逻辑连结词与充要条件这部分,以充要条件为重点考查内容. 考题大都为容易的选择题(难度系数在 0.7 左右). 在此不必牵扯过多的精力.

学 法 指 导

1. 复习集合,可以从两个方面入手,一方面是集合的概念之间的区别与联系,另一方面是对集合知识的应用.

关于集合的概念,主要是把握集合与元素,集合与集合之间关系,弄清有关的术语和符号. 对于集合的应用,可以考虑以下几个方面的问题:

(1)利用集合语言表述问题,利用集合的思想方法解决问题.

(2)有关不等式的解;涉及到集合的运算及集合的表示.

(3)逻辑联结词"或""且""非"与集合中的"并""交""补"是相关的,二者相互对照可加深对双方的认识和理解.

(4)在数学的其他内容及日常生活中的应用.

2. 复习逻辑知识时,要抓住所学的几个知识点,通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.

教 学 建 议

本章内容是高中数学的基础知识,这部分内容主要是为学习其他知识作准备的,随着后续章节的复习,对集合与逻辑知识的应用将越来越广泛和深入,相应地对这部分知识的理解和掌握的水平也会越来越高. 因此在复习中,适当地把握本章的教学要求是教学中应重视的问题.

备课札记

基础水平测试

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 命题"菱形的对角线互相垂直平分"是 ……………………………………………………( )

A. 简单命题

B. 非 p 形式的命题

C. p 或 q 形式的命题

D. p 且 q 形式的命题

答案:D

2. 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y<0$ 且 $xy>0\}$ 和 $P=\{(x,y)|x<0$ 且 $y<0\}$,那么 …( )

A. $M\supsetneqq P$

B. $M=P$

C. $M\subsetneqq P$

D. M 和 P 之间不存在互相包含的关系

答案:B

3. 若 $a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是 ……………………………………………( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

答案:B

4. 下列不等式中与不等式 $x<|x-1|$ 解集相同的一个是 ……………………………( )

A. $x<x-1$　　B. $\begin{cases}x<1-x\\x\leqslant x\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2<(x-1)^2\\x>0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x<1-x\\x\leqslant 1\end{cases}$

答案:D

5. 若 $ax^2+ax+a+3>0$ 对一切实数 x 恒成立,则实数 a 的取值范围是…………( )

A. $\{a|-4<a<0\}$　B. $\{a|a<-4$ 或 $a>0\}$

C. $\{a|a\geqslant 0\}$　D. $\{a|a<0\}$

答案:C

6. 设 A 是 B 的充分条件,B 是 C 的充要条件,C 是 D 的必要条件,那么 D 是 A 的…( )

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:D

二、填空题(每小题 6 分,共 24 分)

7. "$(1-|x|)(1+x)>0$"是"$|x|<1$"的______条件.

答案:必要而不充分

8. 已知 $A\subseteq\mathbf{R}$,$B\subseteq\mathbf{R}$,$C\subseteq\mathbf{R}$,且 $A=\complement_{\mathbf{R}}B$,$B=\complement_{\mathbf{R}}C$,则 A ______ C.

答案:"="

9. 已知集合 M、P 都是全集 U 的子集,$S=\{x|x\in M$,且 $x\notin P\}$,则 $\complement_U S=$__________.

答案:$\{x|x\in P$ 或 $x\in\complement_U M\}$

10. 命题"到圆心的距离不等于半径的直线不是圆的切线"的逆否命题是________.

答案:圆的切线是到圆心的距离等于半径的直线

三、解答题(每小题 20 分,共 40 分)

11. 解不等式 $|3x-4|>1+2x$

解:原不等式等价于下面两个不等式组.

① $\begin{cases}3x-4\geqslant 0\\3x-4>1+2x\end{cases}$

② $\begin{cases}3x-4<0\\-(3x-4)>1+2x\end{cases}$

解①得 $x>5$　解②得 $x<\frac{3}{5}$

∴原不等式的解集为 $\{x|x<\frac{3}{5}$ 或 $x>5\}$

12. 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,若 $A\cap B=B$,求实数 a 的范围.

解:$A=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$,又 $A\cap B=B$,∴$B\subseteq A$

①当 $B=\varnothing$ 时,即 $\Delta=4(a+1)^2-4a^2+4<0$

解得 $a<-1$,满足 $B\subseteq A$

②当 $B=\{0\}$ 时,则有 $\begin{cases}a^2-1=0\\\Delta=0\end{cases}$

∴$a=-1$ 时满足 $B\subseteq A$

③当 $B=\{-4\}$ 时,则有

$\begin{cases}(-4)^2+2(a+1)\times(-4)+a^2-1=0\\\Delta=0\end{cases}$

无解

④当 $B=\{-4,0\}$ 时,则有

$\begin{cases}a^2-1=0\\(-4)^2+2(a+1)\times(-4)+a^2-1=0\end{cases}$

解得 $a=1$

综上所述 a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant -1$ 或 $a=1\}$

§1.1 集合与集合运算

复习目标

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能够掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

理解并掌握集合交、并、补的运算法则,能够运用集合语言与集合思想解决有关问题.

回顾性题组

▶1. 不等式组$\begin{cases}x^2-1<0\\x^2-3x<0\end{cases}$的解集是……（　　）

（2002 年・全国春季高考）

A. $\{x|-1<x<1\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

答案：C

▶2. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$的子集个数是　……………………………………………………（　　）

A. 32　　B. 31

C. 16　　D. 15

（2001 年・京、皖、蒙春季高考）

答案：A

▶3. 设集合 $A=\{x|x\in \mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\in \mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是 ……………………………………（　　）

A. 11　　B. 10

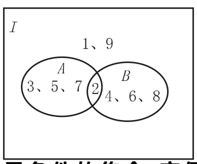
C. 16　　D. 15

（2000 年・全国高考）

答案：C

▶4. 设 U 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$，若求含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是______.　　（2000 年・上海春季高考）

解析：(1)如韦恩图所示，则$(\complement_U Q)\cap P=\varnothing$.



(2)构造满足条件的集合，实例论证

$I=\{1,2,3\}$，$P=\{1\}$，$Q=\{1,2\}$，则$(\complement_I Q)=\{3\}$，$(\complement_I P)=\{2,3\}$易见$(\complement_I Q)\cap P=\varnothing$.

答案：$(\complement_I Q)\cap P$

▶5. 已知集合 $A=\{x|x^2-px+15=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，则 $p+q=$________.

解析：把 $x=3$ 代入两个方程，得 $p=8$，$q=6$.

答案：14

▶6. 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\in A,x\in \mathbf{N}^*\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$，则 A、B、C 之间的关系是______________.

解析：用列举法表示出 $B=\{1\}$，$C=\{\varnothing,\{1\},\{0\},A\}$，易见其关系. 这里 A、B、C 是不同层次的集合，C 以 A 的子集为元素，同一层次的集合可有包含关系，不同层次的集合之间只能是从属关系.

答案：$B\subsetneqq A$，$A\in C$，$B\in C$.

样板性题组

▶1. 已知 $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

解：可得 $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，对于 A，分以下三种情况：(1)$\Delta<0\Rightarrow a>1$，此时 $A=\varnothing$，满足 $A\subsetneqq B$；(2)$\Delta=0\Rightarrow a=1$，此时 $A=\{1\}$，满足 $A\subsetneqq B$；(3)$\Delta>0\Rightarrow a<1$，此时 $A=\{x|1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$，$A\not\subseteq B$. 综上知所求 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

▶2. 已知 $A=\{x|x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$且 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x|x>-2\}$，求 a、b 的值.

解：$A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>0\}$，

设 $B=[x_1,x_2]$，由 $A\cap B=(0,2]$，知 $x_2=2$，且 $-1\leqslant x_1\leqslant 0$　　①

由 $A\cup B=(-2,+\infty)$知 $-2\leqslant x_1\leqslant -1$　　②

由①、②知 $x_1=-1$，$x_2=2$，

$\therefore a=-(x_1+x_2)=-1$，$b=x_1x_2=-2$.

评述：本题应熟悉集合的交与并的涵义，熟练掌握在数轴上表示区间(集合)的交与并的方法.

▶3. 已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值.

解：$\begin{cases}a-3=-3\\a^2\neq 2a-1\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=-3\\a^2\neq a-3\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq 1\\a\neq 0 \text{ 且 } a\neq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\a\neq 0 \text{ 且 } a\neq 1\end{cases}$

$\Rightarrow a=-1$

巩固性题组

▶1. 设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$是 ………………………………………………（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

（2000 年・京、皖春季高考）

解析：思路 1：根据补集的定义，先求$(\complement_U M)=\{b,e\}$，$(\complement_U N)=\{a,c\}$，再求$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\varnothing$.

思路 2：根据并集的定义，先求 $M\cup N=\{a,c,d\}\cup\{b,d,e\}=I$. 根据反演律. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\varnothing$.

思路 3：此题根据集合文氏图，给出全集 I 与 M、N 的关系图，从而得出结论.

答案：A

▶2. 已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$，$N=\{1,a^2-6a$

备课札记

备课札记

$+10,3\}$，且 $M\cap N=\{2,3\}$，则 a 的值是 …………………………………………（　　）

A. 1 或 2　　B. 2 或 4　　C. 2　　D. 1

解析：解方程组 $\begin{cases}a^2-3a+5=3\\a^2-6a+10=2\end{cases}$ 得 $a=2$

答案：C

▶3. 已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{x|mx-3=0\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为________.

解析：若 $m=0$，则 $B=\varnothing$，满足 $A\cup B=A$；若 $m\neq0$，则 $B=\{\frac{3}{m}\}$，要使 $A\cup B=A$，应 $\frac{3}{m}=1$ 或 3. 可得 $m=3$ 或 1，故所求 m 的值为 0，1，3.

答案：0、1、3

▶4. 已知 $M=\{x|\frac{x+1}{2}\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{x|x=3k,k\in\mathbf{N}^*\}$，则 $(\complement_{\mathbf{N}^*}M)\cap P=$________.

解析：$M=\{x|x=2m-1,m\in\mathbf{N}^*\}$，为正奇数集合. 则 $\overline{M}$ 为正偶数集合.

答案：$\{x|x=6n,n\in\mathbf{N}^*\}$

▶5. 已知 $A=\{x|\log_2(x^2-2x-3)>\log_2 5\}$，$B=\{x|x^2-ax-2a^2\leqslant0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：解得 $A=\{x|x<-2$ 或 $x>4\}$. $a>0$ 时，得 $B=\{x|-a\leqslant x\leqslant 2a\}$，由 $-a<-2$ 或 $2a>4$ 得 $a>2$；$a<0$ 时，得 $B=\{x|2a\leqslant x\leqslant -a\}$，

由 $2a<-2$ 或 $-a>4$ 得 $a<-1$.

▶6. 已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant4\}$，$Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$，且 $P\cap Q=Q$，求 m 的取值范围.

解：点集 P 表示平面上以 $O_1(-2,3)$ 为圆心，2 为半径的圆所围成的区域（包括圆周），点集 Q 表示平面上以 $O_2(-1,m)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部. 要使 $P\cap Q=Q$，应 $\odot O_2$ 内含或内切于 $\odot O_1$. 故有，$|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$，即 $(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant(2-\frac{1}{2})^2$.

解得 $3-\frac{\sqrt5}{2}\leqslant m\leqslant3+\frac{\sqrt5}{2}$.

评述：本题选题目的是：熟悉用集合语言表述几何问题；利用数形结合方法解题.

小结归纳

1. 对于集合问题，要首先确定属于哪类集合（数集、点集或某类图形），然后确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

3. 含参数的集合问题，多根据集合元素的互异性来处理，有时需进行讨论.

4. 集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融汇贯通. 解决问题时常用数形结合、分类讨论等数学思想.

备课资料

△备选题

▶1. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 a、$k\in\mathbf{N}^*$，$x\in A$，$y\in B$，$f:x\to y=3x+1$ 是 A 到 B 上的一个函数，求 a、k 的值.

解：$x=1$ 时有 $y=4$；$x=2$ 时有 $y=7$；$x=3$ 时应有 $y=10\in B$. ∵$a^4\neq10$（∵$a\in\mathbf{N}^*$）∴$a^2+3a=10$. 解得 $a=2$ 或 $a=-5$（不合题意，舍去）；

$x=k$ 时 $y=3k+1=a^4=16\Rightarrow k=5$.

∴$a=2$，$k=5$.

评述：本题考查集合的无序性、互异性及对函数对应法则的理解.

▶2. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，写出集合 $M=\{x|x=\log_2|a|\}$ 的全部子集.

解：由已知条件可得 $5\in I$ 且 $3\in A$.

∴ $\begin{cases}a^2+2a-3=5\\|a+1|=3\end{cases}$ 解得 $a=-4$ 或 $a=2$

∴$M=\{\log_2|2|,\log_2|-4|\}=\{1,2\}$，故 M 的子集有：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

§1.2　逻辑联结词与四种命题

复习目标

了解命题的概念和命题的构成；理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义；理解四种命题及其相互关系.

回顾性题组

▶1. 下列命题为真的个数是 ……………（　　）

(1) $\frac{1}{5}$ 非整数；(2) 5 是 10 的约数或是 26 的约数；(3) 逻辑联结词有“或”“非”“且”；(4) $3\geqslant2$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：D

▶2. 由“p：$8+7=16$，q：$\pi>3$”构成的复合命题，下列判断正确的是 ……………………（　　）

A. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为真

B. p 或 q 为假，p 且 q 为假，非 p 为真

C. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为假

D. p 或 q 为假，p 且 q 为真，非 p 为真

答案：A

▶3. 对于命题"正方形的四个内角相等"，下面判断正确的是 ……………………… (　　)

A. 所给命题为假

B. 它的逆否命题为真

C. 它的逆命题为真

D. 它的否命题为真

答案：B

▶4. 有以下四个命题

(1)60 是 5 和 4 的倍数

(2)梯形不是平行四边形

(3)有两个内角互补的四边形是梯形或圆内接四边形或平行四边形

(4)等腰三角形的底角相等，其中简单命题是________(只填序号)

答案：(4)

▶5. 命题 p：0 不是自然数，命题 q：$\sqrt{2}$是无理数，则在命题"p 且 q""p 或 q""非 p""非 q"中真命题是________，假命题是________.

答案：真命题有：p 或 q；非 p　假命题有：p 且 q；非 q

样板性题组

▶1. 指出下列复合命题的构成形式：

(1)实数的平方不是负数；

(2)4 是 12 和 16 的一个公约数；

(3)一个内角是直角的菱形是正方形，对角线垂直的矩形也是正方形.

解：(1)是非 p 形式复合命题，其中 p：实数的平方是负数.

(2)是 p 且 q 形式的复合命题，其中 p：4 是 12 的一个约数；q：4 是 16 的一个约数.

(3)是 p 或 q 形式的复合命题，其中 p：有一个内角是直角的菱形是正方形；q：对角线垂直的矩形是正方形.

▶2. 判断并证明下列命题的真假

(1)如果一个整数 n 的平方是偶数，那么这个整数 n 本身也是偶数；

(2)不存在实数 k，使抛物线 $y=kx^2+3x-1$ 与 x 轴只有一个交点.

解：(1)真命题，用反证法证明.

假设整数 n 不是偶数，则 n 可以写成：

$n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1.$

$\because k\in\mathbf{Z}\Rightarrow 2k^2+2k\in\mathbf{Z}\Rightarrow 2(2k^2+2k)$为偶数.

$\therefore 2(2k^2+2k)+1$ 为奇数.

即 n^2 为奇数，与已知矛盾.

∴假设不成立，原命题为真命题.

(2)假命题，举反例如下：

取 $k=-\frac{9}{4}$，则抛物线 $y=-\frac{9}{4}x^2+3x-1$ 与 x 轴只有一个交点.

说明：欲说明一个命题为真命题，须通过逻辑证明；而说明一个命题为假命题，则举一个反例即可.

▶3. 命题：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$，写出该命题的逆命题，否命题，逆否命题，并判断这些命题的真假.

分析：原命题中，a、b 为实数是前提，条件是 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集(即不等式有解)，结论是 $a^2-4b\geqslant 0$，由四种命题的关系可得出其他三种命题.

解：逆命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集.

否命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集，则 $a^2-4b<0$.

逆否命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2-4b<0$，则 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集.

原命题、逆命题、否命题、逆否命题均为真命题.

巩固性题组

▶1. 给出命题："已知 a、b、c、d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$"，对其原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言，真命题是 … (　　)

A. 0 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解析：原命题和逆否命题为真.

答案：B

▶2. 由下列各组命题构成"$p\vee q$""$p\wedge q$""$\neg p$"形式的复合命题中，"$p\vee q$"为真，"$p\wedge q$"为假，"$\neg p$"为真的是 …………………… (　　)

A. p：3 是偶数，　　q：4 为奇数

B. p：$3+2=6$，　　q：$5>3$

C. p：$a\in\{a,b\}$，　　q：$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. p：$Q\subsetneqq\mathbf{R}$，　　q：$\mathbf{N}=\mathbf{Z}^*$

解析：考虑 p 假 q 真即可.

答案：B

▶3. 用反证法证明命题：若整数系数一元二次方程：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有有理数根，那么 a、b、c 中至少有一个是偶数时，下列假设中正确的是 …………………………… (　　)

A. 假设 a、b、c 都是偶数

B. 假设 a、b、c 都不是偶数

C. 假设 a、b、c 至多有一个是偶数

D. 假设 a、b、c 至多有两个是偶数

答案：B

▶4. "正数或零能够开平方"是由简单命题 p：________和 q：________构成的________形

备课札记

备课札记

式的复合命题.

答案:正数能够开平方　0 能够开平方　p 或 q

▶5. 分别用“p 或 q”“p 且 q”“非 p”填空:

(1)命题:“$\sqrt{5}$ 的值不超过 3”是________形式.

(2)命题:“矩形的对角线互相垂直平分”是________形式.

(3)命题:方程组 $\begin{cases}x+y=-7\\xy=12\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=-4\end{cases}$,$\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-3\end{cases}$ 是________形式.

答案:(1)非 p　(2)p 且 q　(3)p 或 q

▶6. 用反证法证明:若 $a^2+b^2=c^2$,则 a、b、c 不可能都是奇数.

证明:假设 a、b、c 都是奇数,则 a^2、b^2 也都是奇数,则 a^2+b^2 是偶数;而 c^2 是奇数,这与 $a^2+b^2=c^2$ 矛盾,因此,原命题正确.

小 结 归 纳

1. 有的“p 或 q”与“p 且 q”形式的复合命题语句中,字面上未出现“或”与“且”字,此时应从语句的陈述中搞清含义从而分清是“p 或 q”还是“p 且 q”形式. 一般地,若两个命题属于同时都要满足的为“且”,属于并列的为“或”.

2. 原命题与它的逆否命题同为真假,原命题的逆命题与否命题同为真假,所以对一些命题的真假判断(或推证),我们可通过对与它同真假的(具有逆否关系的)命题来判断(或推证).

备 课 资 料

▲备选题

写出下列各命题的否定及其否命题,并判断它们的真假,

(1)若 x、y 都是奇数,则 $x+y$ 是偶数.

(2)若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$.

(3)若一个数是质数,则这个数是奇数.

(4)若两个角相等,则这两角是对顶角.

解:(1)命题的否定是:x、y 都是奇数,且 $x+y$ 不是偶数为假命题.

原命题的否命题是:若 x、y 不都是奇数,则 $x+y$ 不是偶数,是假命题.

(2)命题的否定是:$xy=0$ 且 $x\neq0$,又 $y\neq0$ 为假命题.

原命题的否命题是:若 $xy\neq0$ 则 $x=0$ 且 $y\neq0$ 是真命题.

(3)命题的否定是:一个数是质数,且这个数不一定是奇数,是真命题.

原命题的否命题是:若一个数不是质数,则这个数不是奇数. 是假命题.

(4)命题的否定是:两个角相等,且这两个角不一定是对顶角,是真命题.

原命题的否命题是:若两个角不相等,则这两个角不是对顶角. 是真命题.

评注:若“p 则 q”命题的否定为“p 且 $-q$”,它们的真假相反,而否命题是要否定条件与结论.

§1.3　充分条件与必要条件

复 习 目 标

掌握充分必要条件的意义,能够判定给定的两个命题的充要关系.

回 顾 性 题 组

▶1. “$\alpha\neq\beta$”是“$\cos\alpha\neq\cos\beta$”的 ……………（　）

A. 充要条件

B. 充分条件

C. 必要但不充分条件

D. 非充分也非必要条件

答案:C

▶2. 已知条件 P:$-5<x<1$,条件 Q:$x^2=4$,则 P 是 Q 的 ………………………………（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:D

▶3. 如果命题 p 是命题 q 的充分条件,那么 q 是 p 的________条件,$\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

答案:必要　必要

▶4. 集合 $A=\{x|x+1>0\}$,$B=\{x|x-2<0\}$,则“$x\in A\cap B$”是“$x\in A$ 或 $x\in B$”的________条件.

答案:充分不必要

▶5. 指出下列各命题中 p 是 q 的什么条件

(1)在 $\triangle ABC$ 中,p:$A>B$　q:$BC>AC$

(2)P:$a=3$,q:$(a+2)(a-3)=0$

(3)p:$a>2$,q:$a>5$

(4)p:$a<b$,q:$\frac{a}{b}<1$

答案:(1)p 是 q 的充要条件

(2)p 是 q 的充分不必要条件

(3)p 是 q 的必要不充分条件

(4)p 是 q 的既不充分也不必要的条件

▶6. 设 A 是 B 的充分不必要条件，C 是 B 的必要不充分条件，D 是 C 的充要条件，问 D 是 A 的什么条件？

解：$\because A\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$；$B\Rightarrow C$ 且 $C\not\Rightarrow B$

$\therefore A\Rightarrow C$ 且 $C\not\Rightarrow A$

又 $C\Leftrightarrow D$，$\therefore A\Rightarrow D$ 且 $D\not\Rightarrow A$

$\therefore D$ 是 A 的必要不充分条件

样板性题组

▶1. 已知 p：$|3x-4|>2$，q：$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

解：$\because |3x-4|>2\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\dfrac{2}{3}$，

$\therefore \neg p$：$\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$，又 $\because \dfrac{1}{x^2-x-2}>0$

$\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<-1$，

$\therefore \neg q$：$-1\leqslant x\leqslant 2$

又 $\because \neg p\Rightarrow \neg q$，但 $\neg q\not\Rightarrow p$

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的充分但不必要条件.

评注：逻辑联结词"或""且""非"是与集合中的"交""并""补"相关的. 若条件 r 中的元素组成的集合为 p，那么 $\neg p$ 组成的集合就是集合 p 的补集. 学生中容易出现由 q：$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$ 得 $\neg q$：$\dfrac{1}{x^2-x-2}\leqslant 0$ 的错误，应予以避免.

▶2. 下列说法对不对？如果不对，分析错误的原因：

(1)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的充分条件；

(2)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的必要条件；

解：(1)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的充分条件是指：$x^2=x+2\Rightarrow x\sqrt{x+2}=x^2$.

但这里"$\Rightarrow$"号不成立，因为 $x=-1$ 时，"$\Rightarrow$"号左边为真，但右边为假. 得出错误结论的原因可能是应用了错误的推理：

$x^2=x+2\Rightarrow x=\sqrt{x+2}\Rightarrow x^2=x\sqrt{x+2}$.

这里推理的第一步是错误的(请同学补充说明具体错在哪里)

(2)$x^2=x+2$ 是 $x\sqrt{x+2}=x^2$ 的必要条件是指：$x\sqrt{x+2}=x^2\Rightarrow x^2=x+2$.

但这里"$\Rightarrow$"号不成立，因为 $x=0$ 时，"$\Rightarrow$"号左边为真，但右边为假. 得出错误结论的原因可能是用了错误的推理.

$x\sqrt{x+2}=x^2\Rightarrow \sqrt{x+2}=x\Rightarrow x+2=x^2$.

这里推理的第一步是错误的(请同学补充说明具体错在哪里)

评注：此题的解答比较注重逻辑推理. 事实上，也可以从真值集合来分析. $x^2=x+2$ 的真值集合是$\{-1,2\}$，$x\sqrt{x+2}=x^2$ 的真值集合是$\{0,2\}$，$\{-1,2\}\not\subseteq\{0,2\}$，而$\{0,2\}\not\subseteq\{-1,2\}$，所以(1)、(2)两个结论都不对.

▶3. 已知 $a>0$，求证：$x^2>a$ 的充要条件是 $|x|>\sqrt{a}$(二次不等式的开方解法)

证明：(1)充分性：因为 $|x|>\sqrt{a}>0$，所以，$|x|^2=|x||x|>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$，即 $x^2>a$.

(2)必要性：因为 $x^2>a$，$a>0$，所以 $x<-\sqrt{a}$ 或 $x>\sqrt{a}$.

当 $x<-\sqrt{a}$ 时，$x<0$，从而有 $|x|=-x$，所以 $-|x|<-\sqrt{a}$，即 $|x|>\sqrt{a}$.

当 $x>\sqrt{a}$ 时，$x>0$，从而有 $|x|=x$，所以 $|x|>\sqrt{a}$. 总之恒有 $|x|>\sqrt{a}$.

巩固性题组

▶1. 在$\triangle ABC$ 中，$\sin A=\sin B$ 是 $A=B$ 的 ……………………………………………（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案：C

▶2. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的 ……………………………………………（　　）

A. 充分条件但非必要条件

B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件

D. 非充分条件也非必要条件

解析："$x\in M$ 或 $x\in P$"等价于"$x\in M\cup P$"，且 $M\cap P\subset M\cup P$，所以前者是后者必要但非充分条件.

答案：B

▶3. 如果 $\neg A\Rightarrow B$，那么 A 是 $\neg B$ 的________条件.

答案：必要不充分条件

▶4. 命题 A：两曲线 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$ 相交于点 $P(x_0,y_0)$，命题 B：曲线 $F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$(λ 为常数)过点 $P(x_0,y_0)$，则 A 是 B 的________条件.

答案：充分不必要

▶5. 设全集为 U，在下列条件中，哪些是 $B\subseteq A$ 的充要条件？

(1)$A\cup B=A$；

(2)$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，

(3)$(\complement_U A)\subseteq(\complement_U B)$；

(4)$A\cup(\complement_U B)=U$

答案：四个均为 $B\subseteq A$ 的充要条件

▶6. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的

备课札记

备课札记

充要条件是 $xy\geqslant 0$.

证明:充分性:如果 $xy=0$,不妨设 $x=0$,于是 $|x+y|=|y|=|x|+|y|$

如果 $xy>0$,

即 $x>0$ 或 $y>0$ 或 $x<0,y<0$.

当 $x>0,y>0$ 时,$|x+y|=x+y=|x|+|y|$

当 $x<0,y<0$ 时,$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)=|x|+|y|$.

总之,$xy\geqslant 0$ 时有 $|x+y|=|x|+|y|$

必要性:由 $|x+y|=|x|+|y|$ 且 $x,y\in\mathbf{R}$

得:$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$

即:$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$

$\therefore |xy|=xy$,$\therefore xy\geqslant 0$

综上可知,命题正确.

小结归纳

同集合部分一样,高考试题中对充分必要条件的考查,往往是与其他知识融合在一起.而单独对其考查,往往是在选择题中,难度一般不大.

备课资料

△备选题

指出下列命题中,p 是 q 的什么条件.

(1)p:$0<x<3$,q:$|x-1|<2$

(2)p:$(x-2)(x-3)=0$, q:$x=2$

(3)p:$c=0$,q:抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点.

(4)p:$A\subsetneqq B\subseteq S$, q:$\complement_S B\subsetneqq\complement_S A$.

解析:(1)p:$0<x<3$,q:$-1<x<3$.

p 是 q 的充分但不必要条件

(2)$p\nRightarrow q$,$q\Rightarrow p$,p 是 q 的必要但不充分条件.

(3)p 是 q 的充要条件.

(4)由文氏图知,p 是 q 的充要条件.

评注:依集合的观点看,若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件.若 $A=B$ 则 A 是 B 的充要条件.

素质能力测试(一)

△一、选择题(每小题 4 分,共 40 分)

1\. 下列集合中,表示同一集合的是……( )

A. $P=\{1,2\}$,$Q=\{(1,2)\}$

B. $P=\{3,2\}$,$Q=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\}$,$N=\{y|x+y=1\}$

D. $M=\{(3,2)\}$,$N=\{(2,3)\}$

答案:B

2\. 下列四个命题:①$\varnothing=\{0\}$;②空集没有子集;③任何一个集合必有两个或两个以上的子集;④空集是任何一个集合的子集.其中正确的有 ……………………………… ( )

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

答案:B

3\. 集合 $M=\{x^2,2x-1,-x-1\}$,$N=\{x^2+1,-3,x+1\}$,且 $M\cap N=\{0,-3\}$,则 x 的值为 ……………………………………… ( )

A. -1 B. 1

C. -2 D. 2

答案:A

4\. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$,$B=\{x||x|<a\}$,若$\subsetneqq A$,则实数 a 的取值范围是 ……… ……………………………………… ( )

A. $a<1$ B. $a\leqslant 1$

C. $-1<a\leqslant 3$ D. $0<a\leqslant 1$

答案:B

5\. 集合 $A=\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{y|y=3l+1,l\in\mathbf{Z}\}$,$S=\{y|y=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是 ……………………………… ( )

A. $S\subsetneqq B\subsetneqq A$ B. $S=B\subsetneqq A$

C. $S\subsetneqq B=A$ D. $S\supsetneqq B=A$

答案:C

6\. 下列判断正确的个数为 …………… ( )

(1)$x^2\neq y^2\Leftrightarrow x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 是正确的;(2)命题 $5<2$ 且 $7>3$ 为真;(3)$x^2=y^2\Rightarrow x=-y$ 说法是不正确的;(4)原命题为假,则它的否命题不一定为假.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案:C

7\. 已知 p:$x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解;q:a、b 是整数;则 p 是 q 的 ……………… ( )

A. 充分不必要条件

B. 充要条件

C. 必要不充分条件

D. 不充分非必要条件

答案:A

8\. 下列判断错误的是 ………………… ( )

A. 命题“若 q 则 p”与“若$\neg p$ 则$\neg q$”是互为逆否命题

B. “$am^2<bm^2$”是“$a<b$”的充分必要条件

C. “矩形的两条对角线相等”的否命题为假

D. “命题 $\varnothing\subsetneqq\{1,2\}$ 或 $4\notin\{2,3\}$”为真

答案:B

9\. 方程 $mx^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是 ……………………… ( )

A. $0<m\leqslant 1$ 或 $m<0$ B. $0<m\leqslant 1$

C. $m<1$ D. $m\leqslant 1$

答案:D

10\. 用反证法证明如果 $a>b$,那么$\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$,假设的内容应是……………………………… ( )

A. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$

B. $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

C. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$且$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

D. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$或$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

答案:D

二、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

▶11. 设 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid\frac{8}{4-x}\in\mathbf{Z}\}$,则 $A=$________(用列举法表示)

答案:$\{-4,0,2,3,5,6,8,12\}$

▶12. 在 100 个学生中,有篮球爱好者 60 人,排球爱好者 65 人,则既爱好篮球又爱好排球的人数最少有________个,最多有________个.

答案:25　60

▶13. 已知 $M=\{m\mid\frac{m-4}{2}\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid\frac{x+3}{2}\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap N=$________.

答案:$\varnothing$

▶14. 判断下列命题的真假

(1)$4\leqslant5$ 是________命题.

(2)"方程 $\frac{x+1}{x^2-1}=1$ 没有实根"是________命题.

(3)"1 既是奇数,又是质数"是________命题.

(4)"方程$(x+3)^2+(y-5)^2=0$ 的解是 $x=-3$ 或 $y=5$ 是________命题.

答案:真　假　假　假

▶15. 所给命题(1)"菱形的两条对角线互相平分"的逆命题;(2)$\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$ 或 $\{0\}=\varnothing$;(3)对于命题 p 且 q,若 p 假 q 真,则 p 且 q 为假;(4)"有两条边相等且有一个角是 60°"是"一个三角形为等边三角形"的充要条件. 其中为真的序号为________.

答案:②③④

三、解答题(每小题 10 分,共 40 分)

▶16. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+(-5)>0\}$,$B=\{x\mid |x-a|<4\}$,且 $A\cup B=\mathbf{R}$,求实数 a 取值的集合.

解:$A=\{x\mid x>5$ 或 $x<-1\}$,

$B=\{x\mid a-4<x<a+4\}$,

为使 $A\cup B=\mathbf{R}$,

$\therefore\begin{cases}a+4>5\\a-4<-1\end{cases}\Rightarrow1<a<3.$

▶17. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值,并求出这个元素;

(2)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

解:(1)A 中只有一个元素,则 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根,得 $a=0$ 时 $x=-\frac{1}{2}$,$a=1$ 时 $x=-1$.

(2)A 中只有一个元素时 $a=0$ 或 $a=1$,A 中没有元素时得 $a>1$,故所求 a 取值范围为 $a\geqslant1$ 或 $a=0$.

▶18. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0(a\in\mathbf{R})$的解集分别是 A 与 B,若使 $A\subseteq B$,求 a 的取值范围.

解:$\{A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,

对集合 B,当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$,

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant2\}$

所以当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时要使 $A\subseteq B$,

则 $\begin{cases}2a\geqslant2\\3a+1\geqslant a^2+1\end{cases}\Rightarrow1\leqslant a\leqslant3$;

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,要使 $A\subseteq B$,

则 $\begin{cases}a^2+1\leqslant2\\3a+1\leqslant2a\end{cases}\Rightarrow a=-1.$

综合上述:a 的范围是 $1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1$.

▶19. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$,是否存在常数 a、b、c,使得不等式 $x\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 x 都成立?若存在,求出 a、b、c,若不存在,请说明理由.

解:∵图过$(-1,0)$,

$\therefore a-b+c=0$,①

又令 $x=0$,$0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$

令 $x=1$,$1\leqslant a+b+c\leqslant1$

$\Rightarrow a+b+c=1$　②

解①②得:$b=\frac{1}{2}$,$c=\frac{1}{2}-a$,得 $0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$

$\therefore x\leqslant ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$

$\Rightarrow\begin{cases}2ax^2-x+1-2a\geqslant0\\(1-2a)x^2-x+2a\geqslant0\end{cases}$的解为 $\mathbf{R}$

显然 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 时不成立,

故 $a\neq$且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,有

$\begin{cases}\Delta_1=1-8a(1-2a)\leqslant0\\\Delta_2=1-8a(1-2a)\leqslant0\end{cases}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{4}$,$c=\frac{1}{4}$.

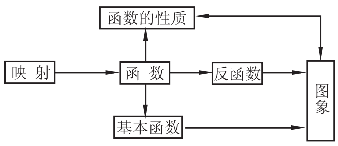
即存在 $a=c=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$.

备课札记

备课札记

第二章 函 数

知 识 结 构



考核内容与要求

1. 映射与函数：理解映射与函数的概念及意义，掌握求函数的表达式、定义域、值、值域、最值的方法，理解函数与图象的对应关系，掌握作函数图象的基本方法，能绘出基本函数的图象，能应用函数思想解决实际应用方面的问题.

2. 单调性、奇偶性：理解基本概念，能正确判断给定函数的单调区间、单调性或奇偶性，会求较简单函数的单调区间.

3. 反函数：掌握基本概念，会求给定函数的反函数以及反函数的定义域、值域. 会利用奇偶性或互反函数的图象关系作函数的图象.

4. 二次函数、指数函数与对数函数：掌握这些函数的基本性质、运算法则和技巧，熟悉各类函数的图象并能利用图象解决与函数有关的问题.

5. 强化化归思想，培养应用能力，引导学生用函数的思想看待问题，处理问题.

内 容 综 述

本章重点：①理解并掌握所学过的几类基本函数的图象和性质，能熟练画出各类基本函数的图象，并能结合图象研究其性质. ②掌握函数方面的应用题的思路及解法.

本章难点：反函数、复合函数的概念及符号，复合函数的单调区间及含字母系数的一元二次函数的最值问题，用函数知识解决实际问题.

高考命题趋势

函数在中学数学中的主导地位是众所周知的，它是一条纽带，把数学的各个分支紧紧地联系在一起. 二次函数、指数函数、对数函数这一块块基石，支撑着“函数”这座大厦，而函数的图象和性质则把这座大厦装扮成了一座灿烂辉煌的迷宫，增加了人们探索它的兴趣. 函数三大性质：单调性、奇偶性、周期性. 从前几年的具体考查到现在的抽象考查，从判断、证明到应用，从单一考查到综合考查(如 2002 春季高考 18 题)，从“知识测量型”向“能力测试型”转变，发展轨迹比较明显. 函数的图象、图象的变换更是高考的热点，视图、化归解函数应用题(如 2000 年高考应用题)能很好地考查学生分析问题、解决问题的能力，是高考的热点，应引起足够的重视. 配方法、待定系数法、换元法、数形结合法、分类讨论等，这些方法的综合应用构成了函数这一章应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性，这正符合高考试题改革的发展趋势，是高考的热点.

学 法 指 导

一、函数是中学数学中最重要的内容之一，应主要从定义、图象、性质三方面加以研究和考查，在复习时要全面掌握、透彻理解每一个知识点.

1. 准确把握函数方面的数学符号及数学语言.

2. 深刻理解一些常见函数(指、对数函数，一、二次函数等)的性质，熟悉它们的解析式与图象，以及解析式与图象之间的有机联系，把握数形之间的相互利用.

3. 掌握函数图象变换的常用方法(平移、翻转等).

4. 对于二次函数问题应特别引起重视，复习时应适当加深加宽，不能停留在浮浅的基础阶段.

5. 含参数函数的讨论是函数问题中的重点，复习时应适当加强这方面的训练，做到条理清楚、分类明确、不重不漏.

6. 利用函数理论解应用题也应引起足够的重视.

二、数学思想

数学中的四大思想——函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转换思想在函数一章中全都得到了充分体现，本章更应突出数形结合思想与分类讨论思想，通过对例题、习题的理解，重点培养这两方面的能力.

三、数学方法

1. 函数中的最值问题在高考中多次出现，是高考中的重要题型之一，应能掌握几种求最值的

常用方法,如配方法、判别式法、均值定理法等,而对于二元函数,应化成一元函数求最值.

2. 含参数函数的讨论问题是高考热点问题,应高度重视,复习时宜适当加强,进行多种类型的训练,但不宜过于繁杂.

3. 关于函数性质问题的考查,在高考中,使用具体函数的越来越少,而使用抽象的函数符号的越来越多,面对这种形势,在复习函数性质时,应注意将具体函数的有关知识进行延伸,以适应高考的要求.

教 学 建 议

"课本是最好的老师",应让学生首先复习课本,老师要对课本上的重要知识点归纳总结,让学生加深理解,对课本上的典型的例题、习题要一题多变、一题多解,提高解题效率.要突出数形结合思想、分类讨论思想、化归思想的重要性,要培养学生解应用题的能力,培养学生的逻辑思维、推理能力.要提醒学生:看到函数想到定义域.

基 础 水 平 测 试

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. 给定映射 $f:(x,y)\longrightarrow(2x+y,xy)$,点 $(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ 的原象是 …………………… ( )

A. $(\frac{1}{6},-\frac{1}{36})$

B. $(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{4},\frac{2}{3})$

C. $(\frac{1}{36},-\frac{1}{6})$

D. $(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2}{3},\frac{1}{4})$

解析:$\begin{cases}2x+y=\frac{1}{6}\\xy=-\frac{1}{6}\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$

答案:B

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求 $g(x)=f(x+a)-f(x-a)(0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2})$ 的定义域是 …………………… ( )

A. $[0,1]$　　B. $[a,1+a]$

C. $[a,1-a]$　　D. $[1-a,a]$

解析:$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\\0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\\0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$,

$\therefore a\leqslant x\leqslant 1-a$.

答案:C

3. 已知等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对于全体实数 x、y 都成立,则 $f(x)$ 是 ……… ( )

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

解析:令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$;令 $y=-x$,则 $f(0)=f(x)+f(-x)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$

答案:A

4. 若 $f(x)$ 为偶函数,其定义域为 R,且在 $[0,+\infty)$ 上是减函数,则 $f(-\frac{3}{4})$ 与 $f(2a^2+\frac{3}{4})$ 的大小关系是 ………………… ( )

A. $f(-\frac{3}{4})>f(2a^2+\frac{3}{4})$

B. $f(-\frac{3}{4})<f(2a^2+\frac{3}{4})$

C. $f(-\frac{3}{4})\geqslant f(2a^2+\frac{3}{4})$

D. $f(-\frac{3}{4})\leqslant f(2a^2+\frac{3}{4})$

解析:$f(-\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})$

$\because 2a^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$,又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数,

$\therefore f(2a^2+\frac{3}{4})\leqslant f(\frac{3}{4})$

答案:C

5. 值域是 $[0,+\infty)$ 的函数是 ………… ( )

A. $y=x^2-x+1$　　B. $y=(\frac{1}{5})^{1-x}$

C. $y=3^{\frac{1}{2-x}}+1$　　D. $y=|\log_2 x^2|$

解析:$y=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$;

$y=(\frac{1}{5})^{1-x}>0$;$y=3^{\frac{1}{2-x}}+1>1$ 且 $y\neq 2$;$y=|\log_2 x^2|\geqslant 0$.

答案:D

6. 若 $\log_{\frac{1}{2}}(1+a)>\log_{\frac{1}{4}}(2a+5)$,则 a 的取值范围是 ………………………………… ( )

A. $(-2,2)$

B. $(2,+\infty)$

C. $(-\frac{5}{2},-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-1,2)$

解析:$\begin{cases}1+a>0\\2a+5>0\\(1+a)^2<2a+5\end{cases}$,解得 $-1<a<2$.

答案:D

备课札记