前言

QIAN YAN

有位大学校长曾说过：“我们教育学生就象猎人学打猎一样，要教会他们如何使用猎枪，而不是老让他们带‘干粮’”。教学的根本目的是让学生掌握知识，将知识转化为一种工具，并最终运用这个工具去解决实际问题。如果说‘熟练使用猎枪’是猎人生存的基本保证，那么‘灵活运用知识’一定是学习成功的必然要求。

修订后的《课程标准》和《考试说明》要求，教学应以教会学生如何学、学会如何用为主要任务，高考以考查学生能力为目标。提高素质，训练能力是新世纪人才培养的基本要求。

‘学案’即是以‘学’为主的学习辅导方案。它的科学之处在于以学生为本，充分调动学生的学习积极性，发挥学生的主体作用，全面培养学生的学习兴趣，挖掘学生的学习潜能。让学生在主动研究、思考和探索的情境中学习，使学生能准确理解和牢固掌握理论知识，并最终形成灵活运用知识的能力。

《高中同步测控优化设计》系列丛书以其独到的设计理念、对新教材的准确把握和高效实用的性能受到广大师生的厚爱，品牌地位已经确立。策编人员与时俱进，开拓创新，经过共同努力，新版丛书又将呈现出更高的品位和全新的面貌。新版《高中同步测控优化设计》丛书，以‘学案’式理论为指导，推广和实施科学、高效的最新学习辅导方略。学习的关键是学生如何学，‘教会学生如何学、如何用’是教学的最终要求，也是本丛书策划设计的基本点。

本次修订有以下创新：第一、对原［学习目标］栏目进行改造，由过去对大纲要求的简单陈述，改之以问题的方式设置一些思考性、探索性、实用性的课前问题。第二、‘知识梳理’要求将要点内容以框架形式列出，对其重要概念、规律和方法设计成填空或填表，由学生在预习课本，复习教材的基础上完成。第三、根据各学科特点，分别增设‘问题探索’、‘研究性学习’、‘导学诱思’、‘自学导引’、‘创新训练’、‘语篇领悟’、‘提纲优化’、‘要点扫描’、‘学后反思’等自学性、研究性、开放性栏目。

本次修订凸显以下特色：

吸引新成果　创设新模型　传统教辅模式存在‘重教轻学’的弊端，栏目设置往往忽视对学生的学习积极性的培养，缺乏学习方法的研究与指导。本次修订力求保留成熟而稳定的‘优化设计’特色，在广泛听取读者建议，吸纳最新教研成果的基础上，成功地将‘学案’式教辅理论用于指导丛书的策划和设计，旨在为广大师生提供一套实用、创新、科学和高效的教学辅导精品。

尊重学习规律　精心设置梯度　本丛书力求遵照同步教学的客观规律，在体例设置、内容安排、方法应用、训练考查等方面都充分考虑学生的实际，由浅入深，循序渐进，逐步提高；并适度、战略性地把握高考动向和要求，在同步教学中逐步渗透高考意识。

着眼教学实际　力求科学实用　本丛书紧密结合新教材实际，内容设计、章节划分均符合教学使用习惯，充分体现‘同步’意义。各科均增加了课后或章后训练习题，并严格控制各种试题的难度和深度，力求更大程度地满足不同层次学生的训练需求。同时，“1＋1”（《学生用书》＋《教师用书》）设计模式，为广大教师的课堂教学及课后辅导都提供了有益的参考和帮助。

本书为高一数学上册。本书以单元为编写单位,设置以下主要栏目:

[要点扫描]本栏目以学案形式设计,将知识要点或重要规律设计成填空,由学生在预习课本的基础上,归纳完成。旨在训练学生主动、自觉学习的良好习惯。

[典例剖析]精选典型、新颖的教学、考试题。点拨思路,示范方法,展示细节,规范解析。

[随堂训练]选题情景简单,思路清晰。意在巩固基础知识,训练基本技能。

[强化训练]在‘随堂训练’的基础上稍有提高。注重知识应用,提高解题技巧。

[学后反思]结合例题及各种训练题,总结解题路和体会,指出易错问题,反思错解原因。

[教学建议]指出本节教学思路和意图,建议教学方法和应注意的问题,为教师备课提供参考。

全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们,只有不懈努力,才会不断前进。

编　者

2002 年 7 月

目 录

第一章　集合与简易逻辑

第二章　函　数

第三章　数　列

备课札记

第一章 集合与简易逻辑

§1.1 集合

★第一课时

学习要求

理解集合的概念和性质，了解元素与集合的表示方法，掌握常用数集及其记法.

要点扫描

1. 某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集.
2. 集合中元素的特征：确定性、无序性、互异性.
3. 元素与集合的关系用符号 $\in$、$\notin$ 表示.
4. 常用数集的记法 N 表示自然数集、N^* 表示正整数集、Z 表示整数集、有理数集Q、实数集R.

典例剖析

[例1](1)“某中学的大胖子”；

(2)“某学校身高超过 1.80 米的高个子”；

(3)“奥运会中的比赛项目”；

(4)$\{a,a,b,c\}$.

以上四者不能组成集合的是哪几个？

解：因为未规定大胖子的标准，所以(1)不能组成集合. 又因为(4)中两个相同的元素 a，所以(4)不能组成集合. 由于(2)、(3)中的对象具备确定性，因此只有(2)、(3)才能组成集合.

说明：判断指定的对象能不能形成集合，关键在于能否找到一个明确标准，对于任何一个对象，都能确定它是不是给定集合的元素.

[例2]给出下面四个关系：$\sqrt{3}\in \mathbf{R}$，$0.7\notin \mathbf{Q}$，$0\in\{0\}$，$0\in \mathbf{N}$. 其中正确的个数是 ……… ( )

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

解析：0.7 为有理数，故 $0.7\notin \mathbf{Q}$ 不正确.

答案：B

说明：研究数与数集的关系，应首先明确是什么数集，再判断数与集合的关系.

[例3]已知数集 $\{2a,a^2+a\}$，求实数 a 所应满足的条件.

解：由集合元素的互异性知，集合中的元素应满足的条件为：$2a\neq a^2+a$，即 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

说明：集合中元素的互异性是指：若 $x_1\in A$，$x_2\in A$，则 $x_1\neq x_2$.

随堂训练

▶1. 下列各组对象中不能形成集合的是 ……………………………………………………… ( )

A. 高一年级女生全体

B. 高二(1)班学生家长全体

C. 高三年级开设的所有课程

D. 高一(6)班个子较高的学生

解析：A、B、C 中的对象具备确定性，而 D 中的对象不具备确定性.

答案：D

▶2. 已知 $A=\{x\}$，下列各式正确的是 ……………………………………………………… ( )

A. $x\notin A$ B. $0\in A$ C. $x\in A$ D. $x\neq 0$

解析：集合 A 是只含有一个元素 x 的集合.

答案：C

▶3. 下面有四个命题

①集合 N 中最小的元素是 1

②若 $-a\notin \mathbf{N}$，则 $a\in \mathbf{N}$，

③若 $a\in \mathbf{N}$，$b\in \mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值是 2

④$x^2+4=4x$ 的解集可表示为 $\{2,2\}$

其中正确命题的个数是 …………… ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析：集合 N 表示自然数集，最小的自然数是 0，故①、③不正确. ②若 $-a\notin \mathbf{N}$，说明 $-a$ 不是自然数，可能是自然数的相反数或非整数，故 a 不一定是自然数，所以命题②不正确. ④集合的表示不符合元素的互异性，故命题不正确.

答案：A

▶4. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空

2 ______ N，-1 ______ N，$\frac{1}{2}$ ______ N，

π ______ N，2 ______ Z，-1 ____ Z，

$\frac{1}{2}$ ______ Z，π ______ Z，2 ______ Q，

备课札记

-1 ______ $\mathbf{Q}$, $\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{Q}$, π ______ $\mathbf{Q}$,

2 ______ $\mathbf{R}$, -1 ______ $\mathbf{R}$, $\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{R}$,

π ______ $\mathbf{R}$.

答案：$\in$　$\notin$　$\notin$　$\notin$　$\in$　$\in$　$\notin$　$\notin$
$\in$　$\in$　$\in$　$\notin$　$\in$　$\in$　$\in$　$\in$

▶5. 设集合 $M=\{1,2,x^2\}$，若 $3\in M$，则 $x=$ ______.

解析：$\because 3\in M$，$\therefore x^2=3$，故 $x=\pm\sqrt{3}$.

答案：$\pm\sqrt{3}$

▶6. 数集 $\{a, a^2-a\}$ 中 a 所满足的条件为 ______.

解析：$\because a\neq a^2-a$，即 $a^2-2a\neq 0$

$\therefore a\neq 0$ 且 $a\neq 2$.

答案：$a\neq 0$ 且 $a\neq 2$

强化训练

▶1. 下列各组对象中，不能组成集合的是 ……………………………………………………（　）

A. 所有正三角形

B.《数学》课本中的所有习题

C. 所有数学难题

D. 所有无理数

解析：C 不符合元素的确定性

答案：C

▶2. 已知集合 $M=\{$大于 -2 且小于 1 的实数$\}$，则下列关系式正确的是 ……………（　）

A. $\sqrt{5}\in M$　　B. $0\notin M$

C. $1\in M$　　D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

解析：$\because -2<-\frac{\pi}{2}<1$，$\therefore -\frac{\pi}{2}\in M$

答案：D

▶3. 若 $A=\{(2,-2),(2,2)\}$，则集合 A 中元素的个数是 ……………………………（　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

解析：集合 A 中的元素为 $(2,-2)$ 和 $(2,2)$，故 A 中有 2 个元素.

答案：B

▶4. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 1 ______ $\{1\}$　　(2) a ______ $\{a,b,c\}$

(3) e ______ $\{a,b\}$　　(4) 0 ______ $\mathbf{N}$

(5) π ______ $\mathbf{Q}$　　(6) $\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{R}$

答案：$\in$　$\in$　$\notin$　$\in$　$\notin$　$\in$

▶5. 方程 $(x-1)^3(x-5)(x+2)=0$ 的解集中含有 ______ 个元素.

解析：方程 $(x-1)^3(x-5)(x+2)=0$ 的解为 $x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=5$，$x_6=-2$，根据集合元素的特性，$x_1=x_2=x_3=1$ 在解集中只能算一个元素，故方程解集中含有 3 个元素.

答案：3

▶6. 对于集合 $A=\{2,4,6\}$，若 $a\in A$，则 $6-a\in A$，那么 a 的值是 ______.

解析：$\because a\in A$，$\therefore a=2$ 或 $a=4$ 或 $a=6$，而当 $a=2$ 和 $a=4$ 时，$6-a\in A$，$\therefore a=2$ 或 $a=4$.

答案：2 或 4

▶7. 说出下面集合中的元素：

(1) $\{$小于 12 的质数$\}$；

(2) $\{$倒数等于其本身的数$\}$.

解：(1) 因为质数就是能被 1 和其本身整除的数，所以集合$\{$小于 12 的质数$\}$中的元素为 2,3,5,7,11.

(2) 倒数等于其本身的数只有 1 和 -1，所以集合$\{$倒数等于其本身的数$\}$中的元素为 $1,-1$.

▶8. 下面一组集合中各个集合的意义是否相同？为什么？

$\{1,5\}$ $\{(1,5)\}$ $\{5,1\}$ $\{(5,1)\}$

解：$\{1,5\}$是由两个数 1,5 组成的集合，根据集合中元素的无序性，它与$\{5,1\}$是同一集合；$\{(1,5)\}$是一个点 $(1,5)$ 组成的单元素集合，由于 $(1,5)$ 和 $(5,1)$ 表示两个不同的点，所以$\{(1,5)\}$和$\{(5,1)\}$是不同的两个集合.

▶9. 若 $-3\in\{a-3, 2a-1, a^2-4\}$，求实数 a.

解：$\because -3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$

$\therefore a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$ 或 $a^2-4=-3$

解得：$a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=1$.

而当 $a=-1$ 时，$2a-1=a^2-4=-3$，与元素互异性矛盾

$\therefore a=0$ 或 $a=1$.

▶10. 若 $\frac{1-t}{1+t}\in\{t\}$，求 t 的值.

解：由 $\frac{1-t}{1+t}\in\{t\}$ 知 $\frac{1-t}{1+t}=t$.

即：$t^2+2t-1=0$，$\therefore t=-1\pm\sqrt{2}$

学后反思

(1) 元素与集合的关系用“$\in$”或“$\notin$”表示，如：$a\in\{a\}$.

(2) 常见的数集符号：自然数集：$\mathbf{N}$；正整数集：$\mathbf{N}_+$；整数集：$\mathbf{Z}$；有理数集：$\mathbf{Q}$；实数集：$\mathbf{R}$.

(3) 集合的概念：某些指定的对象集在一起就成一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合中元素的性质（或称三要素）：①确定性：$x\in A$，与 $x\notin A$，二者必居其一；②互异性：$x_1\in A$，$x_2\in A$，则 $x_1\neq x_2$；③无序性：$\{a,b\}=\{b,a\}$.

教学建议

本节重点是集合元素特征的理解，集合中元素的二个特征：确定性、互异性中，互异性常常容

以这二个集合的元素根本不同.

(2)集合$\{x|x^2-ax-1=0\}$中的元素x是方程$x^2-ax-1=0$的解;集合$\{a|$方程$x^2-ax-1=0$有实根$\}$中的元素a是使方程$x^2-ax-1=0$有实数根的字母系数的取值范围,这两个集合中的元素的含义是不同的.

▶9. 若集合$A=\{x|x^2+ax+b=x\}$中,仅有一元素a,求a、b的值.

解:由题意知,方程$x^2+(a-1)x+b=0$有等根$x=a$.

$$\therefore \begin{cases}(a-1)^2-4b=0\\ a^2+(a-1)\cdot a+b=0\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

▶10. 设集合$A=\{x|x=a+b\sqrt{2},|a^2-2b^2|=1,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$.

求证:当$x\in A$时,有$\frac{1}{x}\in A$.

证明:若$x\in A$,那么,存在$m\in\mathbf{Z}$,$n\in\mathbf{Z}$使$x=m+n\sqrt{2}$,且$|m^2-2n^2|=1$,即$m^2-2n^2=\pm1$.

这时,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n\sqrt{2}}=\frac{m-n\sqrt{2}}{m^2-2n^2}$$

$$=\pm(m-n\sqrt{2})=(\pm m)+(\pm n)\sqrt{2}$$

$\because m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$

$\therefore \pm m\in\mathbf{Z},\pm n\in\mathbf{Z}$且$|(\pm m)^2-2(\pm n)^2|=|m^2-2n^2|=1$

$\therefore \frac{1}{x}\in A$.

学后反思

本节主要学习集合的表示方法,在认识集合时,应从两方面着手:

(1)元素是什么?

(2)确定集合的条件是什么,表示集合时,与采用字母无关.

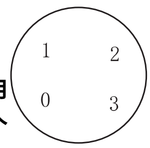
教学建议

本题重点是集合的表示法.集合的表示法有(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.(3)图示法:对给定的集合用图形(最常见的是圆或矩形)表示,图形上或内的点表示该集合的元素,图形外的点表示不是该集合的元素.这三种表示法各有优点,应根据具体问题确定采用哪种表示法.有的集合可以分别用这三种表示法表示,例如"不大于3的自然数组成的集合"就可以表示为:

(1)列举法:$\{0,1,2,3\}$

(2)描述法:$\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant3\}$

(3)图示法:如右图



本课难点是集合的描述法.用描述法表示集合,要特别注意这个集合中的元素是什么,它应该符合什么条件,从而准确理解集合的意义.

备课札记

随感录

备课札记

§1.2 子集、全集、补集

★第一课时

学习要求

了解集合的包含、相等关系的意义,理解子集、真子集的概念,弄清子集、真子集、空集的识别与从属关系,会正确地使用符号“$\subseteq$”“$\subsetneqq$”“$\supseteq$”“$\supsetneqq$”.

要点扫描

1. 对于两个集合 A 与 B

(1)如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B. 记作 $A\subseteq B$.

(2)如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集. 记作 $A\subsetneqq B$.

(3)如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,那么 $A=B$.

2. 空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

3. 符号“$\in$”“$\notin$”是表示元素与集合之间关系的;符号“$\subseteq$”“$\subsetneqq$”是表示集合与集合之间关系的.

4. (1)对于任一集合 A,都有 $A\subseteq A$;

(2)对于集合 A、B、C,若 $A\subseteq B$、$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

典例剖析

[例1]设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 组成的集合.

解:$A=\{3,5\}$,因为 $B\subseteq A$,所以若 $B=\varnothing$ 时,则 $a=0$,若 $B\neq\varnothing$ 时,则 $a\neq0$,这时有 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$,即 $a=\frac{1}{3}$,或 $a=\frac{1}{5}$,所以由实数 a 组成的集合为 $\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\}$.

说明:空集是任何集合的子集. $B\subseteq A$,表明集合 B 的元素都是集合 A 的元素. 另一方面集合 B 也可能是空集,这是解题时最容易遗漏的.

[例2]设集合 $A=\{x-y,x+y,xy\}$,$B=\{x^2+y^2,x^2-y^2,0\}$,且 $A=B$,求实数 x 和 y 的值及集合 A、B.

解:$\because A=B,0\in B,\therefore 0\in A$.

若 $x+y=0$ 或 $x-y=0$,则 $x^2-y^2=0$,这样集合 $B=\{x^2+y^2,0,0\}$,根据集合元素的互异性知:$x+y\neq0$,$x-y\neq0$.

$\therefore\begin{cases}xy=0\\x-y=x^2-y^2\\x+y=x^2+y^2\end{cases}$ (Ⅰ)

或 $\begin{cases}xy=0\\x-y=x^2+y^2\\x+y=x^2-y^2\end{cases}$ (Ⅱ)

由(Ⅰ)得:$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

由(Ⅱ)得:$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

$\therefore$ 当 $x=0,y=0$ 时,$x-y=0$,故舍去

当 $x=1,y=0$ 时,$x-y=x+y=1$,故也舍去.

$\therefore\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$,$\therefore A=B=\{0,1,-1\}$.

说明:因为集合中的元素具有确定性、互异性、无序性,解此题时应注意集合的元素满足这三性. 由已知条件 $A=B$,知 $0\in A$,是解决本题的突破口.

[例3]已知 $A=\{0,1\}$,且 $B=\{x|x\subseteq A\}$,求 B.

解:集合 A 的子集分别是 $\varnothing$、$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0,1\}$,故 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

说明:元素与集合间的关系是相对的,集合在特定的环境下也可以是元素.

随堂训练

▶1. 数 $\{0\}$ 和空集 $\varnothing$ 的关系是 …………( )

A. $\{0\}\supsetneqq\varnothing$　　B. $\{0\}\in\varnothing$

C. $\{0\}=\varnothing$　　D. $\{0\}\subseteq\varnothing$

解析:$\because 0\notin\varnothing$,$\therefore$ C、D 错误

又两集合间不能使用符号“$\in$”,故 B 错误.

$\because 0\in\{0\}$,$\therefore\{0\}$ 是非空集合,从而 $\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

答案:A

▶2. 在下列各式中:①$1\in\{0,1,2\}$;②$\{1\}\in\{0,1,2\}$;③$\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$;④$\varnothing\subsetneqq\{0,1,2\}$;⑤$\{0,1,2\}=\{2,0,1\}$.

其中错误的个数是 …………………( )

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

解析:①③④⑤正确,②错误.

答案:A

▶3. 若集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{x^2,1\}$ 且 $B\subseteq A$,则满足条件的实数 x 的个数是 ………( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解析:$\because B\subseteq A$,$\therefore x^2\in A$,又 $x^2\neq1$

$\therefore x^2=3$ 或 $x^2=x$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=0$ 或 $x=1$(舍去)

答案:C

▶4. 若$\{1,2,3\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4\}$,则 $A=$______.

解析:$\because\{1,2,3\}\subsetneqq A$

$\therefore A$ 中除了含有元素 1、2、3 外,至少还有另外一个元素,又 $A\subseteq\{1,2,3,4\}$

$\therefore A$ 中最多有四个元素 1、2、3、4

故 $A=\{1,2,3,4\}$.

答案:$\{1,2,3,4\}$

▶5. 若$\{a,0,1\}=\{c,\frac{1}{b},-1\}$,则 $a=$______,$b=$______,$c=$______.

解析:$\because -1\in\{a,0,1\}$,$\therefore a=-1$

又 $0\in\{c,\frac{1}{b},-1\}$且$\frac{1}{b}\neq 0$

$\therefore c=0$ 从而可知$\frac{1}{b}=1$,$\therefore b=1$

答案:-1 1 0

▶6. 集合$\{0,1,2\}$的子集是______________.

答案:$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{1,2\}$,$\{0,2\}$,$\{0,1,2\}$

强 化 训 练

▶1. 设集合 $A=\{x\mid x\leqslant\sqrt{13}\}$,$a=2\sqrt{3}$,那么下列关系正确的是……………………( )

A. $a\subset A$ B. $a\in A$ C. $a\notin A$ D. $\{a\}\in A$

解析:$\because a=2\sqrt{3}=\sqrt{12}<\sqrt{13}$

$\therefore a$ 是集合 A 的元素.

答案:B

▶2. 设 $A=\{0,a\}$,且 $B=\{x\mid x\in A\}$,则集合 A 与集合 B 的关系是…………………( )

A. $A\subset B$ B. $B\subseteq A$ C. $A=B$ D. $A\in B$

解析:$\because B=\{x\mid x\in A\}$,$\therefore$ 集合 B 中的任一元素都是集合 A 的元素. 集合 A 中的任一元素都是集合 B 的元素.

答案:C

▶3. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y<0,xy>0\}$和 $P=\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$,那么 ……( )

A. $P\subsetneqq M$ B. $M\subsetneqq P$ C. $M=P$ D. $M\not\subseteq P$

解析:$\begin{cases}x+y<0\\xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$,

故 $M=P$.

答案:C

▶4. 设 $A=\{$正方形$\}$,$B=\{$平行四边形$\}$,$C=\{$四边形$\}$,$D=\{$矩形$\}$,$E=\{$多边形$\}$,则 A、B、C、D、E 之间的关系是______.

解析:由各种图形的定义可得.

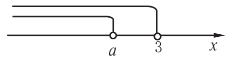
答案:$A\subsetneqq D\subsetneqq B\subsetneqq C\subsetneqq E$

▶5. 已知 $A=\{x\mid x<3\}$,$B=\{x\mid x<a\}$.

(1)若 $B\subseteq A$,则 a 的取值范围是______.

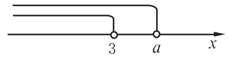
(2)若 $A\subsetneqq B$,则 a 的取值范围是______.

解析:(1)因为 $B\subseteq A$,如右下图



$\therefore a\leqslant 3$

(2)因为 $A\subsetneqq B$,如右下图,$\therefore a>3$



答案:(1) $a\leqslant 3$

(2)$a>3$

▶6. 能满足关系式$\{2,3\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合 M 的个数为______.

解析:$\because\{2,3\}\subseteq A$,$\therefore A$ 中必有元素 2,3

又 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$

$\therefore$满足条件的集合 A 为$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$,$\{2,3,4\}$,$\{2,3,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{2,3,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,共 8 个.

答案:8

▶7. 设集合 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2-a+1\}$,且 $A\supseteq B$,a 的值为______.

解析:$\because A\supseteq B$,$\therefore a^2-a+1=3$ 或 $a^2-a+1=a$

由 $a^2-a+1=3$ 得 $a=-1$ 或 $a=2$

由 $a^2-a+1=a$ 得 $a=1$ 与互异性矛盾.

$\therefore$所求 a 的值为-1、2.

答案:-1,2

▶8. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+4=0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid(x+1)(x^2+3x-4)=0\}$,$A\subsetneqq P\subseteq B$,求满足条件的集合 P.

解:$\because$方程 $x^2-3x+4=0$ 无实根,

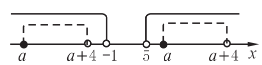
$\therefore A=\varnothing$,同理 $B=\{-4,-1,1\}$

又$\because A\subsetneqq P\subseteq B$

$\therefore P=\{-4\}$、$\{-1\}$、$\{1\}$、$\{-4,-1\}$、$\{-4,1\}$、$\{-1,1\}$、$\{-4,-1,1\}$.

▶9. 已知 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x<-1$ 或 $x>5\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<a+4\}$. 若 $A\supsetneqq B$,求实数 a 的取值范围.

解:如下图,表示集合 A



$\because A\supsetneqq B$,$\therefore a+4\leqslant -1$ 或者 $a>5$.

即 $a\leqslant -5$ 或 $a>5$.

▶10. 设集合 $A=\{x,x^2,xy\}$,$B=\{1,x,y\}$,且 $A=B$,求实数 x、y 的值.

解:$\because A=B$,$\therefore\begin{cases}x^2=1\\xy=y\end{cases}$ ①

或$\begin{cases}x^2=y\\xy=1\end{cases}$ ②

由①得$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y\in\mathbf{R}\end{cases}$(舍)

由②得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$(舍) $\therefore\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

学 后 反 思

子集(包括真子集)是描述两个集合的关系.

备课札记

备课札记

集合 A 是集合 B 的子集应理解为：集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，它主要包含：无论 A 是否有无元素，也无论集合 A 是有限集还是无限集，只要是 A 的元素，一定是 B 的元素．

教学建议

子集的概念是本节重点，教学时要正确阐述子集概念的涵义，讲清符号"$\subseteq$""$\supseteq$""$\subsetneqq$""$\supsetneqq$"的涵义与区别，符号"$\in$"与"$\subseteq$"的本质区别，通过对例题的讲解，培养学生分类讨论的思想及全面考虑问题的良好习惯．

★第二课时

学习要求

了解全集、补集的意义，正确理解补集的概念，正确理解符号"$\complement_A B$"的涵义，并正确应用它们解决具体问题．

要点扫描

1. 如果集合 S 含有我们所要研究的<u>各个集合的全部元素</u>，这个集合就可以看作一个全集.

2. $\complement_S A=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$，用语言表示为<u>集合 S 中子集合 A 的补集</u>．

典例剖析

[例1]已知 $U=\{$三角形$\}$，$A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

解：$\complement_U A=\{$钝角三角形或直角三角形$\}$，$\complement_U B=\{$不等腰三角形$\}$.

说明：在几何中应用补集概念时，一定要注意几何图形的定义及性质，同时还要注意问题反面的所有可能．

[例2]已知全集 $S=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，如果 $\complement_S A=\{0\}$，则这样的实数 x 是否存在？若存在，求出 x；若不存在，请说明理由.

解：$\because \complement_S A=\{0\}$，$\therefore 0\in S$，但 $0\notin A$.

$\therefore x^3+3x^2+2x=0$，$x(x+1)(x+2)=0$

即 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=-2$

当 $x=0$ 时，$|2x-1|=1$，A 中已有元素 1；

当 $x=-1$ 时，$|2x-1|=3$，$3\in S$；

当 $x=-2$ 时，$|2x-1|=5$，但 $5\notin S$.

$\therefore$实数 x 的值存在，它只能是 -1.

说明：在已知补集 $\complement_U A$ 求全集 U 中的未知数时，一定既要考虑集合元素的互异性，又要考虑到 $\complement_U A$ 中元素，集合 A 中元素与全集 U 中元素间的关系及存在的可能.

[例3]已知 $A=\{0,2,4,6\}$，$\complement_S A=\{-1,-3,1,3\}$，$\complement_S B=\{-1,0,2\}$，用列举法写出集合 B.

解：$\because A=\{0,2,4,6\}$，$\complement_S A=\{-1,-3,1,3\}$

$\therefore S=\{-3,-1,0,1,2,3,4,6\}$

而 $\complement_S B=\{-1,0,2\}$

$\therefore B=\complement_S(\complement_S B)=\{-3,1,3,4,6\}$.

说明：在解决与补集有关的问题时，应首先明确全集. 同时也要搞清补集的一些简单性质：$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U \varnothing=U$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，若 $x\in\complement_U A$ 则 $x\notin A$ 等.

随堂训练

▶1. 设 $A=\{x|\frac{1}{x}>0\}$，$S=\mathbf{R}$，则 $\complement_S A$ 等于⋯ （　　）

A. $\{x|\frac{1}{x}<0\}$　　B. $\{x|x<0\}$

C. $\{x|x\leqslant 0\}$　　D. $\{x|x\geqslant 0\}$

解析：$\because \frac{1}{x}>0$，$\therefore x>0$，即 $A=\{x|x>0\}$

$\therefore \complement_S A=\complement_{\mathbf{R}} A=\{x|x\leqslant 0\}$

答案：C

▶2. 已知全集 $U=\{0,1,2\}$ 且 $\complement_U A=\{2\}$，则集合 A 的真子集共有 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ （　　）

A. 3 个　B. 4 个　C. 5 个　D. 6 个

解析：$A=\{0,1\}$. 其真子集有 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$

答案：A

▶3. 全集 $U=\{2,3,5\}$，$A=\{|a-5|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 a 的值为 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ （　　）

A. 2　B. 8　C. 3 或 5　D. 2 或 8

解析：$\because \complement_U A=\{5\}$，$\therefore 5\notin A$

$\therefore |a-5|\neq 5$，$|a-5|\neq 2$ 且 $|a-5|\in U$

$\therefore |a-5|=3$，解得 $a=2$ 或 $a=8$

答案：D

▶4. 已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $M=\{x|x$ 为不大于 3 的自然数$\}$，则 $\complement_U M=$______.

解析：$M=\{0,1,2,3\}$，$\therefore \complement_U M=\{-1\}$

答案：$\{-1\}$

▶5. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x<-3$ 或 $x\geqslant 4\}$，则 $\complement_{\mathbf{Z}} A=$________.

解析：$\complement_{\mathbf{Z}} A=\{x\in\mathbf{Z}|-3\leqslant x<4\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

答案：$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

▶6. 给出下列命题：

①$\complement_U A=\{x|x\notin A\}$

②$\complement_U \varnothing=U$

③若 $S=\{$三角形$\}$，$A=\{$钝角三角形$\}$，则 $\complement_S A=\{$锐角三角形$\}$

④若 $U=\{1,2,3\}$，$A=\{2,3,4\}$，则 $\complement_U A=\{1\}$

其中正确命题的序号是______.

解析：①应为 $\complement_U A=\{x\in U|x\notin A\}$，3.③应为 $\complement_S A=\{$锐角或直角三角形$\}$

$\because A\not\subseteq U$，$\therefore \complement_U A$ 无意义. 故只有②正确.

答案：②

强化训练

▶1. 在下列关系中，正确的是 ………… (　　)

A. $0\in \mathbf{N}$　　B. $0\notin \complement_{\mathbf{Z}}\mathbf{N}^*$

C. $\{0\}\not\subseteq \mathbf{N}$　　D. $N=\complement_{\mathbf{Z}}\mathbf{N}^*$

解析：因为 0 是自然数，故 A 正确.

答案：A

▶2. 已知全集 S 和集合 M、N、P，$M=\complement_S N$，$N=\complement_S P$，则 M 与 P 的关系是 ………… (　　)

A. $M=\complement_S P$　B. $M=P$　C. $P\subsetneqq M$　D. $M\subsetneqq P$

解析：由 $N=\complement_S P$ 得 $\complement_S N=\complement_S(\complement_S P)=P$

$\therefore M=P$

答案：B

▶3. 已知 $U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$C=\{x|-1\leqslant x<3\}$，则有 ………………………… (　　)

A. $\complement_U A=B$　　B. $\complement_U B=C$

C. $\complement_U A\supseteq C$　　D. $A\supseteq C$

解析：$B=\{-1,3\}$

又 $\because \complement_U A=\{-1,3\}$，$\therefore \complement_U A=B$.

答案：A

▶4. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$\complement_U A=\{x|x>4$ 或 $x<3\}$，则 $a=$______，$b=$______.

解析：$A=\complement_U(\complement_U A)=\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$\therefore a=3,b=4$

答案：3　4

▶5. 已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 $a=$______，$b=$______.

解析：$\because \complement_U A=\{5\}$，$\therefore \begin{cases}a^2+2a-3=5\\ b\neq 5\\ b\neq 2\end{cases}$

又 $b\in U$

$\therefore \begin{cases}a^2+2a-3=5\\ b=3\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\ b=3\end{cases}$

答案：2 或 -4　3

▶6. 已知全集 $S=\mathbf{Z}$，$M=\{x\in \mathbf{Z}|x<3\}$，$P=\{x\in \mathbf{Z}|x\leqslant 0\}$，则 $\complement_S M$ 与 $\complement_S P$ 的包含关系是______.

解析：$\because \complement_S M=\{x|x\in \mathbf{Z}$ 且 $x\geqslant 3\}$

$\complement_S P=\{x|x\in \mathbf{Z}$ 且 $x>0\}$

对任意 $x\in \complement_S M$，则 $x\in \complement_S P$，

且 $1\in \complement_S P$ 但 $1\notin \complement_S M$. $\therefore (\complement_S M)\subsetneqq \complement_S P$

答案：$\complement_S M\subsetneqq \complement_S P$

▶7. 设全集 $U=\{$小于 10 的自然数$\}$，集合 $A=\{$小于 10 的正偶数$\}$，$B=\{$小于 10 的正质数$\}$，求：$\complement_U A$、$\complement_U B$.

解：$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,3,5,7\}$. $\therefore \complement_U A=\{0,1,3,5,7,9\}$，

$\complement_U B=\{0,1,4,6,8,9\}$

▶8. 已知全集 $U=\{2,3,a^2-2a-3\}$，$A=\{2,|a-7|\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

解：由 $\complement_U A=\{5\}$ 知，$5\in U$，$|a-7|\in U$

$\therefore \begin{cases}a^2-2a-3=5\\ |a-7|=3\end{cases}$，$\therefore a=4$

▶9. 设全集 $S=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$A=\{x|x^2-px+q=0\}$，若 $\complement_S A=\varnothing$，求 p、q.

解：$S=\{1,2\}$，$\because \complement_S A=\varnothing$，$\therefore A=S$

$\therefore x=1$，$x=2$ 为方程 $x^2-px+q=0$ 的根

$\therefore p=3$，$q=2$

▶10. 若 $A=\{a,b\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，$M=\{A\}$，求 $\complement_B M$.

解：$B=\{x|x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，又 $M=\{A\}=\{\{a,b\}\}$，$\therefore \complement_B M=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$.

学后反思

本节课重点在于对补集概念的正确理解，求某一集合的补集的前提必须明确全集. 同一个集合在不同全集中的补集是不相同的.

教学建议

补集反映的是三个集合之间的一种特殊关系. 首先要让学生了解全集的概念，因研究的问题而异，全集又是相对的；应加深对补集概念的理解.

备课札记

备课札记

§1.3 交集、并集

★第一课时

学习要求

理解交集与并集的概念,掌握交集与并集的区别与联系,并能正确应用它们解决一些简单问题.

要点扫描

1. 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$.
2. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$.

典例剖析

[例1]已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,那么集合 $M\cap N$ 为 ……………………………………………… (　　)

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

解析:由已知得 $M\cap N=\{(x,y)\mid x+y=2,$ 且 $x-y=4\}=\{(3,-1)\}$.

也可采用筛选法.首先,易知 A、B 不正确,因为它们都不是集合符号.又集合 M,N 的元素都是数组 (x,y),所以 C 也不正确.

答案:D

说明:求两集合的交集即求同时满足两集合中元素性质的元素组成的集合.本题中就是求方程组 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$ 的解组成的集合.另外要弄清集合中元素的一般形式.

[例2]已知:集合 $P=\{x\mid x=a^2+4a+1,a\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y\mid y=-b^2+2b+3,b\in\mathbf{R}\}$.求 $P\cap Q$ 和 $P\cup \complement_{\mathbf{R}}Q$.

解:∵ $x=a^2+4a+1=(a+1)^2-3\geqslant-3$

∴ $P=\{x\mid x\geqslant-3\}$

又∵ $y=-b^2+2b+3=-(b-1)^2+4\leqslant4$

∴ $Q=\{y\mid y\leqslant4\}$

利用数轴表示得,如图 1—1:

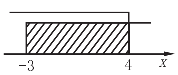


图 1—1

$P\cap Q=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant4\}$

又 $\complement_{\mathbf{R}}Q=\{y\mid y>4\}$

∴ $P\cup\complement_{\mathbf{R}}Q=P$(见图 1—2)

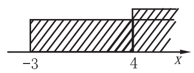


图 1—2

说明:在求集合的交集、并集、补集时,应首先求出各集合.本例集合中虽表示元素的字母不同,但它们都是数集.在求解时不要误认为公共元素交集为空集.求数集的交、并、补集往往借助于数轴.

[例3]已知 $x\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{-3,x^2,x+1\}$.$B=\{x-3,2x-1,x^2+1\}$,如果 $A\cap B=\{-3\}$,求 $A\cup B$.

解:∵ $A\cap B=\{-3\}$,∴ $-3\in B$

又 $x^2+1\neq-3$,∴ $x-3=-3$ 或 $2x-1=-3$

若 $x-3=-3$,则 $x=0$,$A=\{-3,0,1\}$,$B=\{-3,-1,1\}$,$A\cap B=\{-3,1\}$,与已知不符

∴ $2x-1=-3$,$x=-1$

则 $A=\{-3,1,0\}$,$B=\{-4,-3,2\}$,满足 $A\cap B=\{-3\}$,∴ $A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$

说明:本题关键在于由 $A\cap B=\{-3\}$ 来确定实数 x 进而确定 A、B,解题时要注意题目中的各种可能,特别要注意防止误认为第一种情形也成立.

随堂训练

▶1. 已知 $M=\{$平行四边形$\}$,$P=\{$梯形$\}$,则 $M\cap P$ 等于 ………………………… (　　)

A. M　　B. P

C. $\{$平行四边形且梯形$\}$　　D. $\varnothing$

答案:D

▶2. 设 $S=\{0,1,2,3,4\}$,$A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,则 $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$ 等于 ……… (　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

解析:$\complement_S A=\{4\}$,$\complement_S B=\{0,1\}$

∴ $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)=\{0,1,4\}$

答案:C

▶3. 在图 1—3 中,阴影部分可用集合 M、P 表示为 … (　　)

A. $M\cap P$

B. $M\cup P$

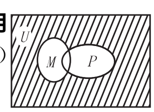


图 1—3

备课札记

$(\complement_S A)$、$\complement_S(A\cup B)$.

解：$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

$\complement_S A=\{1,4,6,8,9\}$，$\complement_S B=\{1,3,5,7,9\}$.

$\therefore A\cap B=\{2\}$，$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\{1,9\}$

$\complement_S(A\cup B)=\{1,9\}$

▶10. 已知 $A=\{x\mid 2x^2=sx-r\}$，$B=\{x\mid 6x^2+(s+2)x+r=0\}$，且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求 $A\cup B$.

解：$\because A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，$\therefore \frac{1}{2}\in A$ 且 $\frac{1}{2}\in B$

$\therefore \frac{1}{2}s-r=\frac{1}{2}$ ①

$\frac{1}{2}(s+2)+r+\frac{3}{2}=0$ ②

①②联立得 $\begin{cases}s=-2\\ r=-\frac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore A=\{x\mid 2x^2=-2x+\frac{3}{2}\}=\{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\}$

$B=\{x\mid 6x^2+(-2+2)x-\frac{3}{2}=0\}$

$=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$

$\therefore A\cup B=\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$

学后反思

本节课学习旨在对交集、并集概念的理解，正确把握“或”和“且”的联系与区别，是正确应用概念解题的前提．另外，在求两集合的并集时，应考虑集合中元素的互异性．

教学建议

理解和掌握交集、并集的概念是本节课的重点，教学时应注意把以下三个问题讲清楚：

(1)交集与并集是集合的两种不同运算，对它们概念的理解要特别注意逻辑联结词“且”与“或”的区别．交集和并集的符号“$\cap$”“$\cup$”既有相同的地方，但又完全不同，不要混淆．

(2)对于交集“$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$”，不能简单地认为 $A\cap B$ 中的任一元素都是 A 与 B 的公共元素，或者简单地认为 A 与 B 的公共元素都属于 $A\cap B$，这是因为并非任何两个集合总有公共元素．

(3)对于并集“$A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$”，不能简单地理解为 $A\cup B$ 是由 A 的所有元素与 B 的所有元素组成的集合，这是因为 A 与 B 可能有公共元素．

★第二课时

学习要求

理解和掌握交集、并集的性质，熟练应用交集、并集的概念和性质进行集合的有关运算，会用文氏图求集合的交集、并集、补集．

要点扫描

1. 对于任意集合 A、B，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.
2. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$

   $A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.
3. 形如 $2n(n\in\mathbf{Z})$ 的整数叫偶数，形如 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 的整数叫奇数．

典例剖析

[例1]已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. $A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，求 A 和 B.

解：根据题意作文氏图如图 1—4，$\therefore A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,9\}$

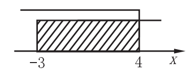


图 1—4

说明：与自然数或整数有关的有限集的子、交、并、补运算，借助文氏图显得既直观又清晰．

[例2]设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

解：$\because A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，

$\therefore A=\{-4,0\}$

$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$

当 $B=A$，即 $B=\{-4,0\}$ 时，

由一元二次方程的根与系数关系，得

$\begin{cases}-2(a+1)=-4\\ a^2-1=0\end{cases}$ 解之得 $a=1$.

当 $B=\varnothing$，即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实数解时，

$4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$

解得 $a<-1$.

当 $B=\{0\}$，即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个相等的实数根且为零时，

$\begin{cases}8a+8=0\\ a^2-1=0\end{cases}$ 解得 $a=-1$

当 $B=\{-4\}$ 时，即需

$\begin{cases}8a+8=0\\16+8(a+1)+a^2-1=0\end{cases}$ 无解

综上所述，知若 $A\cup B=A$，则 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

说明：由 $A\cup B=A$ 转化为 $B\subseteq A$ 是解本题的关键. 另外在求出 $A=\{0,4\}$ 后，应分别从 $B=A,\{0\},\{-4\},\varnothing$ 四种情况下求 a.

[例3]若 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$

(1)若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

(2)若 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解：由已知，得 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$.

(1)$\because A\cap B=A\cup B$，$\therefore A=B$

于是 2,3 是一元二次方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的两个根，由韦达定理知：

$\begin{cases}2+3=a\\2\times3=a^2-19\end{cases}$ 解之得 $a=5$.

(2)由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，得 $3\in A$，$2\notin A$，$-4\notin A$，由 $3\in A$，得 $3^2-3a+a^2-19=0$

解得 $a=5$ 或 $a=-2$

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $2\notin A$ 矛盾；

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，符合题意. $\therefore a=-2$.

说明：对于(1)，必须理解 $A\cap B=A\cup B$ 的意义.

注意：$A\supseteq A\cap B=A\cup B\supseteq B\Rightarrow A\supseteq B$；

$A\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$

从而知：$A=B$；

对于(2)，关键是抓住空集这个特殊集合的意义和性质，即由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing\Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

随堂训练

▶1. 若 $A\cup B=\varnothing$，则 …………………… (　　)

A. $A=\varnothing,B\neq\varnothing$　　B. $A\neq\varnothing,B=\varnothing$

C. $A=\varnothing,B=\varnothing$　　D. $A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$

答案：C

▶2. 若集合 A、B、C 满足 $A\cap B=A$，$B\cup C=C$，则 A 与 C 之间的关系必定是 ………… (　　)

A. $A\subsetneqq C$　B. $C\subsetneqq A$　C. $A\subseteq C$　D. $C\subseteq A$

解析：$\because A\cap B=A$，$\therefore A\subseteq B$

又 $B\cup C=C$，$\therefore B\subseteq C$，$\therefore A\subseteq C$

答案：C

▶3. 已知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合 $C=\{2,7,8\}$是 …… (　　)

A. $A\cup B$　　B. $A\cap B$

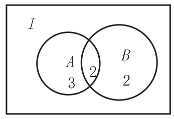
C. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$　　D. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

解析：显然 $A\subsetneqq U$，$B\subsetneqq U$，$C\subsetneqq U$. 因 $2,7,8\notin A$ 且 $2,7,8\notin B$，所以 $2,7,8\in\complement_U A$ 且 $2,7,8\in\complement_U B$，故答案选 C. 也可使用文氏图.

答案：C

▶4. 全集 I 含有 10 个元素，它的子集 A 含有 5 个元素，子集 B 含有 4 个元素，$A\cap B$ 有两个元素，那么 $A\cup B$ 含有元素的个数是________.

解析：借助于文氏图所示，集合 $A\cup B$ 共有 7 个元素.



答案：7

▶5. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则 $x=$______.

解析：由 $A\cup B=\{1,3,x\}$，$B\subsetneqq A$，所以 $x^2\in A$，$\therefore x^2=3$ 或 $x^2=x$，

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$或 $x=0$，$x=1$(舍)

答案：$\pm\sqrt{3}$或 0

▶6. 若集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的集合为________.

解析：$\because A\cap B\neq\varnothing$，$\therefore$集合 A、B 有公共元素借助数轴，$a\geqslant-1$

答案：$\{a\mid a\geqslant-1\}$

强化训练

▶1. 下列说法中正确的是 ……………… (　　)

A. 任何一个集合必有两个子集

B. 任何集合必有一个真子集

C. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 A、B 中至少有一个为 $\varnothing$

D. 若 $A\cap B=S$，S 为全集，则 $A=B=S$

答案：D

▶2. 设 S，T 是两个集合，且 $S\nsubseteq T$，$T\nsubseteq S$，若 $M=S\cap T$，则 $S\cup M$ 等于 ……………… (　　)

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. M

解析：$\because M=S\cap T$，$\therefore S\subseteq M$，$\therefore S\cup M=M$

答案：D

▶3. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=3m,m\in\mathbf{Z}\}$，则集合 $A\cap(\complement_U B)$等于 ……………………………………… (　　)

A. $\{x\mid x=3k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x\mid x=6k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{x\mid x=6k\pm2,k\in\mathbf{Z}\}$

答案：D

▶4. 图 1—5 中阴影部分可用集合 M、P 表示为______.

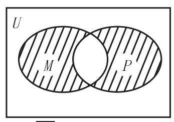


图 1—5

答案：$[(\complement_U M)\cap P]\cup[M\cap(\complement_U P)]$或 $[\complement_U(M\cap P)\cap(M\cup P)]$

▶5. 判断下列命题的正误：

(1)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$ ………… (　　)

(2)若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$ ………… (　　)

(3)$(A\cap B)\subsetneqq A\subsetneqq(A\cup B)$ ………… (　　)

(4)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$…… (　　)

备课札记

备课札记

答案:(1)√ (2)√ (3)× (4)√

▶6. 集合$\{(2,3)\}\subseteq(A\cap B)$,$A=\{(x,y)|ax-y^2+b=0\}$,$B=\{(x,y)|x^2-ay-b=0\}$,则 $a=$______,$b=$______.

解析:$\because\{(2,3)\}\subseteq A\cap B$

$\therefore(2,3)\in A$ 且$(2,3)\in B$

从而可得$\begin{cases}2a-9+b=0\\4-3a-b=0\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-5\\b=19\end{cases}$

答案:-5 19

▶7. 集合 $M=\{1,t\}$,$N=\{t^2-t+1\}$,若 $M\cup N=M$,求 t 的集合.

解:$\because M\cup N=M$,$\therefore N\subseteq M$

$\therefore t^2-t+1=1$ 或 $t^2-t+1=t$

由 $t^2-t+1=1$ 得 $t=0$ 或 $t=1$

由 $t^2-t+1=t$ 得 $t=1$

∴符合条件的 t 值集合为$\{0\}$.

▶8. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$,$B=\{x|mx-1=0\}$,且 $A\cap B=B$.求由实数 m 所构成的集合 M,并写出 M 的所有子集.

解:$\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$.

(1)当 $B=\varnothing$ 时,$m=0$;

(2)当 $B\neq\varnothing$ 时,$m\neq0$

$\therefore B=\{x|x=\frac{1}{m}\}$

$\because B\subseteq A$,$A=\{2,3\}\therefore B=\{2\}$或 $B=\{3\}$

$\therefore m=\frac{1}{2}$或 $m=\frac{1}{3}$,$\therefore M=\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$.

M 的所有子集为:$\varnothing$,$\{0\}$,$\{\frac{1}{2}\}$,$\{\frac{1}{3}\}$,$\{0,\frac{1}{2}\}$,$\{0,\frac{1}{3}\}$,$\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$,$\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$.

▶9. 集合 $S=\{x|x\leqslant10$,且 $x\in\mathbf{N}^*\}$,$A\subsetneqq S$,$B\subsetneqq S$,且 $A\cap B=\{4,5\}$,$(\complement_S B)\cap A=\{1,2,3\}$,$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\{6,7,8\}$.求集合 A 和 B.

解法一:(1)$\because A\cap B=\{4,5\}$

$\therefore 4\in A,5\in A,4\in B,5\in B$

(2)$\because(\complement_S B)\cap A=\{1,2,3\}$

$\therefore 1\in A,2\in A,3\in A,1\notin B,2\notin B,3\notin B$.

(3)$\because(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\{6,7,8\}$

∴6、7、8 都不属于 A,6、7、8 也都不属于 B.

$\because S=\{x|x\leqslant10$,且 $x\in\mathbf{N}^*\}$

∴9、10 不知所属

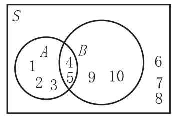
由(2)、(3)可知 9、10 均不属于 $\complement_S B$.

$\therefore 9\in B,10\in B$.

综上所述知 $A=\{4,5,1,2,3\}$,

$B=\{4,5,9,10\}$

解法二:如图所示



$\because A\cap B=\{4,5\}$

∴将 4、5 写在 $A\cap B$ 中

$\because(\complement_S B)\cap A=\{1,2,3\}$

∴将 1,2,3 写在 A 中

$\because(\complement_S B)\cap(\complement_S A)=\{6,7,8\}$

∴将 6,7,8 写在 S 中 A、B 之外

$\because(\complement_S B)\cap A$ 与$(\complement_S B)\cap(\complement_S A)$中均无 9、10

∴9、10 在 B 中

故 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{4,5,9,10\}$

▶10. 设 $U=\mathbf{R}$. 集合 $M=\{m|$方程 $mx^2-x-1=0$ 有实根$\}$,$N=\{n|$方程 $x^2-x+n=0$ 有实根$\}$,求$(\complement_U M)\cap N$.

解:方程 $mx^2-x-1=0$ 有实根

$\therefore m=0$ 或$(-1)^2-4m(-1)\geqslant0$

$\therefore m\geqslant-\frac{1}{4}$或 $m=0$

$\therefore M=\{m|m\geqslant-\frac{1}{4}$或 $m=0\}$

$=\{m|m\geqslant-\frac{1}{4}\}$

$\therefore\complement_U M=\{m|m<-\frac{1}{4}\}$

同理 $N=\{n|n\leqslant\frac{1}{4}\}$

$\therefore(\complement_U M)\cap N=\{m|m<-\frac{1}{4}\}\cap\{n|n\leqslant\frac{1}{4}\}=\{m|m<-\frac{1}{4}\}\cap\{m|m\leqslant\frac{1}{4}\}$

$=\{m|m<-\frac{1}{4}\}$

学后反思

正确理解概念是进行交集、并集、补集运算的基础,灵活利用下面性质可给解题带来方便.

名称	A、B 的交集	A、B 的并集	S 中子集 A 的补集
符号	$A\cap B$	$A\cup B$	$\complement_S A$
定义	$\{x\|x\in A$ 且 $x\in B\}$	$\{x\|x\in A$ 或 $x\in B\}$	$\{x\|x\in S$ 且 $x\notin A\}$
性质	$A\cap B=B\cap A$ $A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup B=B\cup A$ $A\cup B\supseteq A$ $A\cup B\supseteq B$ $A\cup\varnothing=A$	$A\cap\complement_S A=\varnothing$ $A\cup\complement_S A=S$ $\complement_S(\complement_S A)=A$