目摇录

第一章　集合与简易逻辑

一　集　合

1.1　集　合

☆＊＊＊＊＊＊【知识要点】

一、集合的概念
二、集合的表示方法
三、符号 $\in$、$\notin$ 的用法

＊☆＊＊＊＊＊【要点精述】

一、概念

1. **集合**　一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

2. **元素**　集合中的每个对象叫做集合的元素.

3. **集合元素的三个特性**

确定性、互异性、无序性.

确定性:集合的元素必须是确定的,即给定一个集合,任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.

互异性:集合中的元素没有重复的.

无序性:集合中的元素没有顺序之分.

二、集合的表示方法

1. **列举法**　把集合中的元素一一列举出来,然后用大括号括起来,如$\{1,0,2,3\}$,列举法通常用来表示有限集即集合中的元素只有有限多个.

2. **描述法**　是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,如$\{x\mid x^2-2x-3>0\}$就表示不等式$x^2-2x-3>0$的解集,竖线前的x是代表元素,竖线后是元素所应满足的条件.

三、$\in$、$\notin$ 是表示一个元素与一个集合之间的关系,不能表示两个集合之间的关系

如$\sqrt{2}\in\{$无理数$\}$,$3\notin\{$合数$\}$.

＊＊☆＊＊＊＊【知能强化】

一、解决集合的问题关键在于认识理解集合,认识集合,关键在于掌握集合的元素,这就要求理解元素的三个特征,掌握集合中元素所具备的条件,认清集合的元素,紧扣集合的元素是突破解决集合问题难点的要害.

二、对于描述法给出的集合,要紧紧抓住代表元素和元素所应满足的条件,代表元素不同即使满足的条件相同也是完全不同的集合.如$\{x\mid y=x^2-2x-1\}$和$\{y\mid y=x^2-2x-1\}$,前者表示函数$y=x^2-2x-1$的定义域,后者表示该二次函数的值域.

三、两种表示方法还可以互化,在解题时常把描述法给出的集合用列举法写以便明确集合中的元素,从而使问题明了简单,也可把集合用图示给出,通过数形结合直观地解决问题.

四、认识一个集合应从两方面入手:(1) 元素是什么?(2) 元素有何属性?如$A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$与$B=\{x\mid x=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$表示同一个数集,表示集合时与采用字母名称无关.而$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$表示一个点集,与集合$A$是不同的.

五、要重视把已学的知识综合运用于集合,这实质是将集合的概念渗透到过去所学的数学知识之中,特别是数集、方程、不等式的解集等.

＊＊＊☆＊＊＊【例题解析】

例 1　下列各组对象中能构成集合的是　(　)

(A) 著名的科学家
(B) 高一(二)班 18 岁以下的学生
(C) 某一班篮球打得好的学生
(D) 面积较小的四边形

分析:这是一道考察集合概念的题目,著名的科学家、篮球打得好的学生及面积较小的四边形,都没有明确的标准,对一个科学家一个学生无法客观地判断他是著名还是不著名、是篮球打得好还是不好,面积较小也是一个模糊条件,所以 A、C、D 不构成集合,但 18 岁以下的学生就是一个明确的要求,可以确切地判断某一学生是属于还是不属于

18岁以下，即只有B可构成集合.

例2 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

①3.14 ____ $\mathbf{Q}$，1 ____ {质数}，0 ____ $\varnothing$；

②2 ____ $\{x \mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，3 ____ $\{x \mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，3 ____ $\{x \mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$；

③0 ____ $\{x \mid x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$，$a,b$ 为非零实数$\}$，$\sqrt{2}$ ____ $\{x \mid y=x^2+1\}$，$-\sqrt{2}$ ____ $\{y \mid y=x^2+1\}$，$(-1,2)$ ____ $\{x \mid y=x^2+1\}$，$(-1,2)$ ____ $\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$.

解：① $\in$、$\notin$、$\notin$.

② 集合 $\{x \mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ 用列举法可表示为 $\{\cdots-7,-3,1,5,9,13\cdots\}$，

集合 $\{x \mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$ 即 $\{\cdots-7,-5,-3,-1,1,3,5,7\cdots\}$，所以答案为 $\notin$、$\notin$、$\in$.

③ 集合 $\left\{x \mid x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right.$，$a,b$ 为非零实数$\left.\right\}$用列举法表示为 $\{2,0,-2\}$.

$\therefore$ $0\in\left\{x \mid x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right.$，$a,b$ 为非零实数$\left.\right\}$；

集合 $\{x \mid y=x^2+1\}$ 表示函数 $y=x^2+1$ 的定义域即为实数集 $\mathbf{R}$，

$\therefore$ $\sqrt{2}\in\{x \mid y=x^2+1\}$；

集合 $\{y \mid y=x^2+1\}$ 表示函数 $y=x^2+1$ 的值域即 $\{y \mid y\geqslant1\}$，$-\sqrt{2}<1$

$\therefore$ $-\sqrt{2}\notin\{y \mid y=x^2+1\}$；

集合 $\{x \mid y=x^2+1\}$ 是一个数集，$(-1,2)$ 为一个点

$\therefore$ $(-1,2)\notin\{x \mid y=x^2+1\}$；

集合 $\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$ 表示坐标平面抛物线 $y=x^2+1$ 上的所有点的集合，$(-1,2)$ 在抛物线上，

$\therefore (-1,2)\in\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$.

小结：通过此例可以看出解决集合问题的关键在于明确所给集合的元素有哪些，从而使问题得到解决.

例3 若集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$ 与集合 $\{a^2,a+b,0\}$ 是同一个集合，求 $a^{100}+b^{100}$ 的值.

解：集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$ 与 $\{a^2,a+b,0\}$ 是同一集合，元素应完全相同，那么

$$0\in\left\{a,\frac{b}{a},1\right\},\quad 1\in\{a^2,a+b,0\}$$

$\therefore$ $b=0,a=\pm1$.

当 $a=1$ 时，$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$ 中 a 与1相同，与集合元素的互异性不符.

$\therefore$ $b=0,a=-1$

$\therefore$ $a^{100}+b^{100}=(-1)^{100}+0^{100}=1$.

例4 用另一种方法表示下列集合：

①$M=\{-1,0,1,2,3,4\}$；

②$N=\left\{x \mid \frac{7}{2+x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$.

解：①$M=\{-1,0,1,2,3,4\}$ 是 -2 到5之间的所有整数组成的集合

$\therefore$ $M=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant4,x\in\mathbf{Z}\}$.

②$N=\left\{x \mid \frac{7}{2+x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$是用描述法表示出的集合，集合中的元素应同时满足两个条件：

1)x 是整数；

2)$2+x$ 是7的约数.

$\therefore$ $2+x=7$，或 $2+x=-7$，或 $2+x=\pm1$

解之得 $x=5,-9,-1,-3$

$\therefore$ $N=\{-9,-3,-1,5\}$.

例5 ① 设 x,y,z 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来；

② 求数集 $\{1,x,x^2-x\}$ 中元素 x 所满足的条件；

③ 已知 $M=\left\{x \mid \frac{6}{3-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}\right\}$，用列举法表示集合 M.

解：① 所给式中含绝对值，为脱去绝对值，可按 x,y 同正、同负、异号三种情形结合 z 的正负共六种情形考虑. 注意元素的互异性. 用 x^+ 表示 x 取正值，其余类似，有

1)x^+,y^+,z^+；2)x^+,y^+,z^-；3)x^-,y^-,z^+；4)x^-,y^-,z^-；5)x^-,y^+,z^+；6)x^+,y^-,z^-.

所得结果为 $\{-3,-1,1,5\}$.

② 所给集合有三个元素，即三元集，由集合元素的互异性，有

$$\begin{cases} x\neq1 \\ x^2-x\neq1 \\ x^2-x\neq x \end{cases}\quad 解得\ x\neq0,1,2,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

③ 由 $x\in\mathbf{Z}$，$\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}$，有 $3-x>0$，

即 $x<3$.

若 $x=1$，$\frac{6}{3-1}=3\in\mathbf{N}$；

若 $x=2$，$\frac{6}{3-2}=6\in\mathbf{N}$；

若 $x=0$，$\frac{6}{3-0}=2\in\mathbf{N}$；

若 $x=-3$，$\frac{6}{3-(-3)}=1\in\mathbf{N}$.

$\therefore$ $M=\{-3,0,1,2\}$.

例6 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

① 若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

② 若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

解:① 集合 A,代表元素为 x,x 又是方程的根,故 A 中只有一个元素,表明方程只有一解.

∴ 当 $a=0$ 时,

方程为 $2x+1=0$,$x=-\frac{1}{2}$ 符合条件.

当 $a\neq 0$ 时,二次方程有一解的条件为

$\triangle=0$,即 $4-4a=0$, ∴ $a=1$

由上可知,A 中只有一个元素时,

$a=0$ 或 $a=1$,

此时 $A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 或 $A=\{-1\}$.

② 集合 A 中至多只有一个元素,表明方程有一解或无解.

当 $a=0$ 时,$x=-\frac{1}{2}$ 为一解;

当 $a\neq 0$ 时,$\triangle\leqslant 0$,

即 $4-4a\leqslant 0$,$a\geqslant 1$

由上可知,a 的取值范围为

$a=0$ 或 $a\geqslant 1$.

小结:此题容易遗漏 $a=0$ 这种情况,当二次函数的二次项系数为参数时,须对其取值作讨论.

★★★★☆★★ **【热身演练】**

一、选择题

1. 下列对象中可以组成集合的是 ( )
   (A) 高二(二)班较聪明的学生
   (B) 世界上比较高的山
   (C) 公园里美丽的花
   (D) 能被 3 整除但不能被 5 整除的自然数
2. 下列集合中表示空集的是 ( )
   (A)$\{0\}$ (B)$\{\varnothing\}$
   (C)$\{x\mid x^2+x+3=0,x\in\mathbf{R}\}$
   (D)$\{x\mid x^2\leqslant 0\}$
3. 下列集合中是有限集的是 ( )
   (A){质数} (B){3 的倍数}
   (C){平面上的圆}
   (D)$\{x\mid \frac{105}{x-5}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\}$
4. 下列命题正确的是 ( )
   (A)$0\in\varnothing$ (B)$0\notin\varnothing$
   (C)$\varnothing=\{0\}$ (D)$\varnothing=\{\varnothing\}$
5. 不等式 $\frac{x+1}{x^2}>0$ 的解集是 ( )
   (A)$x<-1$ (B)$x>-1$
   (C)$\{x\mid x>-1\}$ (D)$\{x\mid x>-1$ 且 $x\neq 0\}$
6. 方程组 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=5\end{cases}$ 的解集是 ( )
   (A)$\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ (B)$\{x=3,y=-2\}$
   (C)$\{(x,y)\mid x=3,y=-2\}$
   (D)$\{(x,y)\mid(3,-2)\}$

二、填空题

1. 用列举法写出下列集合:
   ①{小于 15 的质数} = ________.
   ②$\{x\mid |x|<2,x\in\mathbf{Z}\}$ = ________.
   ③ 方程组 $\begin{cases}x-2y=1\\3x+y=4\end{cases}$ 的解集 = ________.
   ④ 既是偶数又是质数的集合 = ________.
2. 用描述法写出下列集合
   ①$\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{7}{16}\cdots\frac{11}{64}\right\}$ = ____________.
   ②$\{1,4,9,16,25\}$ = ____________.
   ③$\{4,6,8,10,12\cdots 20\}$ = ____________.
   ④$\{3,7,11,15,19,23\}$ = ____________.

三、解答题

1. 已知集合 $M=\{x\mid x^2+3x-k=0\}$.
   ① 若 $1\in M$,求实常数 k 的值;
   ② 若 M 为空集,求 k 的取值范围;
   ③ 若 M 为两个元素的集合,求 k 的取值范围.
2. 已知集合 $A=\{a\mid x^2+(2a-1)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.求一次函数 $y=3x+2,x\in A$ 的取值范围.

★★★★★★☆ **【参考答案】**

一、D C D B D C

二、1. ① $\{2,3,5,7,11,13\}$
② $\{-1,0,1\}$
③ $\{(\frac{9}{7},\frac{1}{7})\}$
④ $\{2\}$

2. ① $\{x\mid x=\frac{2k-1}{2^k},k\leqslant 6$ 且 $k\in\mathbf{N}\}$
② $\{x\mid x=k^2,k\leqslant 5$ 且 $k\in\mathbf{N}\}$
③ $\{x\mid x=2k,2\leqslant k\leqslant 10$ 且 $k\in\mathbf{N}\}$
④ $\{x\mid x=4m-1,m\leqslant 6$ 且 $m\in\mathbf{N}\}$

三、

1. **解**:

① ∵ $1\in M$

∴ 1 是方程 $x^2+3x-k=0$ 的根

代入方程得　$k=1^2+3\times1=4$

∴　$k=4$

② ∵　M 为空集

∴　方程 $x^2+3x-k=0$ 无实根

$$\triangle=9+4k<0,$$

$$k<-\frac{9}{4}.$$

③M 为两个元素的集合

∴　方程 $x^2+3x-k=0$ 有相异二实根

$$\triangle=9+4k>0,$$

$$k>-\frac{9}{4}.$$

2. **解**:由已知 $\triangle=(2a-1)^2-4\geqslant0$

解得　$a\geqslant\frac{3}{2}$ 或 $a\leqslant-\frac{1}{2}$

即　$A=\left\{a\mid a\geqslant\frac{3}{2}\text{或}a\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$

又　$x\in A,$

∴　$x\geqslant\frac{3}{2}$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$

∴　$3x+2\geqslant\frac{9}{2}+2=6\frac{1}{2}$

或　$3x+2\leqslant-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}.$

∴　y 的取值范围是

$$\left\{y\mid y\geqslant\frac{1}{2}\text{或}y\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

1.2　子集、全集、补集

☆★★★★★★　**【知识要点】**

一、子集、全集、补集的概念

二、$\supseteq$、$\subseteq$、$=$、$\subsetneqq$ 等符号的使用

★☆★★★★★　**【要点精述】**

一、

1. **子集**　对于两个集合 A 与 B,若 A 中任一元素都是集合 B 的元素,我们就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

若 B 中至少有一个元素不是 A 的元素我们就说 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

2. **全集**　在研究某一问题时,如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,称 S 为一个全集,全集通常用 U 表示,全集是相对于所要研究的集合而言的.

3. **补集**　补集是相对于全集而言,A 是全集 U 的子集,那么把 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 U 中集合 A 的补集,也可叫余集,记作 $\complement_U A=\{x\mid x\in U\text{且}x\notin A\}$.

二、

1. $\supseteq$、$\supsetneqq$、$=$、$\subseteq$、$\subsetneqq$ 等符号是表示两个集合之间关系的符号,如 $A\supseteq B$,表示 B 是 A 的子集,而 $A\subseteq B$,表示 A 是 B 的子集.同样,$A\subsetneqq B$,表示 A 是 B 的真子集,若两个集 A 与 B 的元素完全相同,或者 A 是 B 的子集,同时 B 也是 A 的子集,就说 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

2. 注意空集与其他集之间的相互关系.

(1)$\varnothing\subseteq A$,即:空集是任何集合的子集;

(2) 若 A 非空即 A 中至少含有一个元素,那么,$\varnothing\subsetneqq A$,即空集是任何非空集合的真子集.

★★☆★★★★　**【知能强化】**

一、要正确理解子集、真子集、全集、补集的含义.分析研究集合与集合、元素与集合之间的相依关系,首先要弄清所讨论集合的元素特征及范围,然后运用子集的概念进行判断.例$\{1\}$与$\{\{1\},\{2\}\}$之间关系,应是元素与集合之间关系,集合$\{\{1\},\{2\}\}$是以$\{1\}$、$\{2\}$两个单元素组成的集合,所以应是$\{1\}\in\{\{1\},\{2\}\}$.

二、全集的概念是相对于所研究的问题而言,应能包含涉及的集合中的全部元素,一般问题中给出全集,也可根据实际情况自己给定全集,但应注意所给全集应包含研究对象中的所有集合.

三、正确使用符号 $\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$、$\supseteq$、$\supsetneqq$,并正确理解其意义,如 $\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$ 都是正确的,前者把 $\varnothing$ 看作集合的一个元素,而后者把 $\varnothing$ 看作一个集合,$\{\varnothing\}$ 为一非空集合.反映了两个不同的意义.

四、子集与真子集有传递性.即

$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$

$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$

五、处理集合问题,应注意化简集合的表达式使其元素特征明朗化,以便明确问题的实质.如$\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid-1<x<3\}$.如果含有字母应注意对字母进行讨论,同时注意文氏图表示使问题直观明了.

六、注意以下几点:

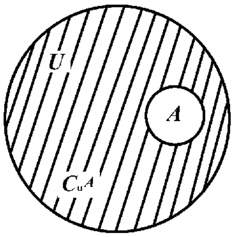
1. 明确子集的概念和集合相等的意义,若任一 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$;若 $A\subseteq B$,且存在 $x\in B$ 但 $x\notin A$,则 $A\subsetneqq B$;若 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$,则 $A=B$.

2. 空集是一个特殊的集合,它不含任何元素,是任何一个集合的子集,任何一个非空集合的真子集,任何非空集合 A 都有两个特殊的子集:$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$.

3. 关于有限集的子集个数有如下一般结论：

若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集共有 2^n 个，非空子集有 2^n-1 个，非空真子集有 2^n-2 个.

4. 对于补集，定义 $\complement_U A=\{x \mid x\in U,且\ x\notin A\}$，即补集是由全集 U 中的所有不在集合 A 中的元素组成的，因此 $\complement_U A$ 是相对于全集 U 而言的，对同一个集合，若全集 U 不同，则 $\complement_U A$ 也不同.



5. 关于补集有如下性质：

① $\complement_U(\complement_U A)=A$；$\complement_U U=\varnothing$；$\complement_U\varnothing=U$

② $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$

③ $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

④ $A\subseteq B$，则 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$；反之亦成立

⑤ 若 $x\in\complement_U A$，则 $x\notin A$.

（以上几条性质可在学完交集并集后领会）

＊＊＊☆＊＊＊【例题解析】

例 1　用正确的符号填入下列各题的横线处：

①$\{1,2\}$ ________ $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$；

②$\mathbf{R}^+$ ________ $\{\mathbf{R}\}$；

③$\{x \mid x^2-4\leqslant 0\}$ ________ $\{x \mid x+3>0\}$；

④$\{1,2\}$ ________ $\{\{1\},\{1,2\},\{2\}\}$.

解：①$\{1,2\}$ 是含有两个元素 1 和 2 的有限集，$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$ 是大于等于 1 且小于等于 5 的所有实数构成的无限集. 1，2 是属于集合 $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，所以应用符号 $\subsetneqq$.

②$\mathbf{R}^+$ 是所有正实数组成的集合. $\{\mathbf{R}\}$ 是以实数集为元素的单元素集，所以应是元素与集合之间的关系，故应用符号 $\notin$.

③$\{x \mid x^2-4\leqslant 0\}=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$ 是 -2 到 2 之间所有实数构成的集合. $\{x \mid x+3>0\}=\{x \mid x>-3\}$ 是大于 -3 的所有实数构成的集合，-2 到 2 之间的任一实数均大于 -3，均是集合 $\{x \mid x+3>0\}$ 的元素，所以应用符号 $\subsetneqq$.

④ 与 ② 相同，集合 $\{\{1\},\{1,2\},\{2\}\}$ 是以 $\{1\}$、$\{1,2\}$、$\{2\}$ 三个集合为元素的集合，$\{1,2\}$ 是其中的一个元素，所以应用 $\in$ 符号填空.

例 2　下列命题或记法中正确的是　　　（　）

(A) $\mathbf{Q}\in\mathbf{R}$

(B) $\mathbf{Z}^-\supsetneqq\{x \mid x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$

(C) 空集是任何集合的真子集

(D) $\{x \mid x^2+1=0\}\in\{\varnothing\}$

解：(A) 中 $\mathbf{Q}$ 是集合不是元素，是 $\mathbf{R}$ 的真子集，应记作 $\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

(B) 中 $\{x \mid x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$ 包含了所有负整数和 0，应记作 $\mathbf{Z}^-\subsetneqq\{x \mid x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$.

(C) 中空集应是任何非空集合的真子集.

(D) 中 $\{x \mid x^2+1=0\}=\varnothing$，$\{\varnothing\}$ 是以 $\varnothing$ 为元素的集合，所以结论正确.

例 3　若集合 A 满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$，试写出符合条件的全部集合 A.

解：因为 $A\supseteq\{a,b\}$，所以 A 中至少有元素 a、b，又因为 $A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$，所以 A 是其真子集，A 中最多有 3 个元素，即 $\{a,b\}$、$\{a,b,c\}$、$\{a,b,d\}$.

例 4　若集合 $A=\{x \mid x^2+ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{1,2\}$ 且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

分析：集合 A 是方程 $x^2+ax+1=0$ 的解集分三种情况：有相异二实根、等实根、无实根。但 A 又是 B 的子集，所以 A 中元素有三种可能：(1) 元素是 1，2；(2) 只有一个元素 1 或 2；(3) 空集，结合韦达定理(1) 不可能，(2) 种的等实根为 2 不可能. 其解法为：

解：(1) 若 $A=B$，则 $A=\{1,2\}$，由韦达定理 $x_1x_2=1\times 2=2\neq 1$

∴　　$A\neq B$.

(2) $A=\{1\}$，则方程 $x^2+ax+1=0$ 有等实根 $x_1=x_2=1$，

此时　$a=-(x_1+x_2)=-2$

$A=\{2\}$，则方程 $x^2+ax+1=0$ 有等实根

$$x_1=x_2=2$$

此时　$x_1x_2=2\times 2=4\neq 1$

∴　　$A\neq\{2\}$.

(3) $A=\varnothing$，由判别式 $\triangle=a^2-4<0$，

得 $|a|<2$，

$$\therefore\quad -2<a<2$$

综上所述，a 的取值范围是 $-2\leqslant a<2$.

小结：

① 由于集合元素的多样性，集合语言运用的广泛性，有关集合的题目涉及的知识面很广，要注意相关知识的综合运用，本例综合运用一元二次方程的有关知识.

② 分类讨论是一个非常重要的数学思想，正确运用这一数学思想可以起到化难为易的效果. 本例分一元二次方程有相异二实根、有等实根、无实根三种情况讨论，使问题得以解决.

★★★★☆★★【热身演练】

一、选择题

1. 空集 $\varnothing$ 与集合$\{0\}$之间关系是（　）

(A)$\varnothing=\{0\}$　(B)$\varnothing\in\{0\}$

(C)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$　(D)$\varnothing\supsetneqq\{0\}$

2. 已知 $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-1}{x-3}\leqslant 0\right\}$，则 P 与 Q 的关系是（　）

(A)$P\subsetneqq Q$　(B)$Q\subsetneqq P$

(C)$P=Q$　(D) 以上答案都不对

3. 设 $M=\{x\mid y=x^2\}$，$N=\{y\mid y=x^2\}$，则 M 与 N 的关系是（　）

(A)$M\subsetneqq N$　(B)$N\subsetneqq M$

(C)$M=N$　(D) 以上答案都不对

4. 设集合 A 满足$\{0\}\subsetneqq A\subseteq\{0,1,2\}$，则这样的集合 A 共有（　）

(A)1 个　(B)2 个

(C)3 个　(D)4 个

5. 设 $M=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=4m\pm1,m\in\mathbf{Z}\}$，则 M 与 N 的关系是（　）

(A)$M\subsetneqq N$　(B)$M\supsetneqq N$

(C)$M=N$　(D) 以上答案都不对

6. 已知 I 为全集，集合 M、$N\subsetneqq I$ 且 $N\subseteq M$，则（　）

(A) $\complement_I M\supseteq\complement_I N$　(B)$M\subseteq\complement_I N$

(C) $\complement_I M\subseteq\complement_I N$　(D)$M\supseteq\complement_I N$

二、填空题

1. 设集合 $A=\{2,a\}$，$B=\{2,a^2-2\}$，若 $A=B$，则 $a=$________.

2. 设集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，若 $A\supseteq B$，则满足条件的实数 x 是________.

3. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\mid x\in A,x\in\mathbf{N}\}$，$C=\{x\mid x\subseteq A\}$，则 A,B,C 三集合之间的关系是________.

4. 设全集 $I=\{2,4,a^2-a+1\}$，$A=\{2,a+1\}$，$\complement_I A=\{7\}$，则 $a=$________.

三、解答题

1. 设 $A=\{y-1,x-2\}$，$B=\{y-x,2y-3\}$，若 $A=B$，求 x,y.

2. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

① 若 $A\subseteq B$，求 a 的值；

② 若 $A\supseteq B$，求 a 的值.

3. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，若 $\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

★★★★★★☆【参考答案】

一、C　B　B　C　C　C

二、1. $\underline{a=2}$　2. $\underline{x=\sqrt{3}\text{，或 }x=-\sqrt{3}\text{，或 }x=0}$

3. $\underline{B\subsetneqq A,A\in C,B\in C}$　4. $\underline{a=3}$.

三、

1. **解**：$\because\ A=B$

$\therefore$ ① $\begin{cases}y-1=y-x\\x-2=2y-3\end{cases}$ 或 ② $\begin{cases}y-1=2y-3\\x-2=y-x\end{cases}$

解 ① 得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，解 ② 得 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

$\therefore$ 满足条件的 x,y 的值是 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

2. **解**：$A=\{x\mid x^2+4x=0\}=\{0,-4\}$

① 若 $A\subseteq B$，即 A 是 B 的子集，B 是二次方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的解集

$\therefore\quad A=B$

$\therefore\quad \begin{cases}a^2-1=0\\2(a+1)=4\end{cases}$　解之得　$a=1$

② 若 $A\supseteq B$，则二次方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有相异二实根 $0,-4$，或有等实根 0 或 1，或无实根.

a. 若有相异二实根则 $B=\{0,-4\}$，$a=1$；

b. 若有等实根 0，则 $\begin{cases}a^2-1=0\\2(a+1)=0\end{cases}$，

解之得　$a=-1$；

若有等实根 -4，则 $\begin{cases}a^2-1=16\\2(a+1)=8\end{cases}$ 无解；

c. 若无实根，

则　$4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$

解之得　$a<-2$；

综上所述，若 $A\supseteq B$，则 $a<-2$ 或 $a=\pm1$.

3. **解**：$\because\ \complement_U A=\{5\}$

$\therefore\quad a^2+2a-3=5$

解得　$a=2$ 或 $a=-4$.

又　$|2a-1|=3$，

解得　$a=2$ 或 $a=-1$.

综上 $a=2$.

1.3　交集、并集

☆＊＊＊＊＊＊　【知识要点】

一、交集、并集的概念
二、交集、并集的运算

＊☆＊＊＊＊＊　【要点精述】

一、交集、并集的概念

1. 概念

交集一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$(读作"A 交 B").

即：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

图示　如图 1－1 所示阴影部分.

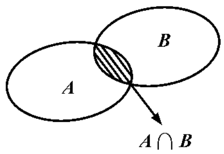


图 1－1

并集由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$(读作"A 并 B").

即　$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

图示　如图 1－2 所示的阴影部分.

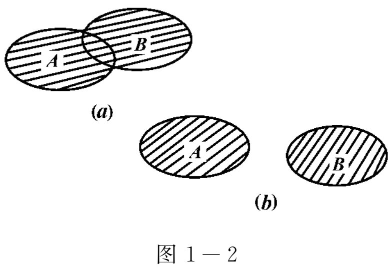


图 1－2

2. 性质

对任何集合 A，B 有

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$

二、交集、并集的运算

利用交、并集的概念，注意结合数轴、坐标系或韦恩图来帮助运算.

＊＊☆＊＊＊＊　【知能强化】

一、深刻理解并掌握交集和并集的概念，它是解题的基础. $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，是由 A、B 中公共元素组成，既有集合 A 的属性，又有集合 B 的 属性. $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，由所有 A、B 中的元素组成，$A\cup B$ 中的元素至少具有集合 A 或集合 B 的属性之一.

例如：设 $M=\{3$ 的倍数$\}$，$N=\{2$ 的倍数$\}$，则 $M\cap N$ ＝ ________；$M\cup N$ ＝ ________.

(A){偶数}　　　　(B){被 2 或被 3 整除的数}

(C){6 的约数}　　(D){2 和 3 的公倍数}

很明显按交集和并集的定义，$M\cap N$ 指既是 3 的倍数又是 2 的倍数，即 2 和 3 的公倍数，所以 $M\cap N$ ＝ (D)；

$M\cup N$ 指能被 2 整除或能被 3 整除的数，因而 $M\cup N$ ＝ (B).

二、解题时要充分利用交集或并集的性质.

1. 交集的性质：

①$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；

②$A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$；

③ 若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$，反之亦成立；

④ 若 $x\in(A\cap B)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$.

2. 并集的性质：

①$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$；

②$A\subseteq(A\cup B)$；$B\subseteq(A\cup B)$；

③$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$；

④ 若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，反之亦成立；

⑤ 若 $x\in(A\cup B)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$.

三、区分交集与并集的关键是"且" 与"或". 在处理有关交集与并集问题时，常常从这两个字出发去揭示、挖掘题设条件，进而用语言叙述表达，注意 $A\subseteq B$，$A\cap B=A$，$A\cup B=B$ 这些关系的等价性.

四、在求交集或并集时，应首先识别元素属性及范围，并化简集合，对于数集可以借助于数轴直观化，以形助数得出交集或并集.

五、集合运算的两类问题.

有关集合的运算主要有两类问题：一类是直接求两个或两个以上集合的交、并、补集；第二类是已知集合的运算结果，求集合中某些元素应具备或满足的条件. 解决这两类问题时，首先须明确概念，其次解题时要尽可能地借助数轴、坐标系、韦恩图等工具，将抽象问题直观化、形象化.

如：设 S，T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，则 $S\cup X$ 等于　（　）

(A)X　　(B)T

(C)$\varnothing$　　(D)S

解一: 根据交集、并集的概念和性质，

∵　$X = S \cap T$

∴　$X \subseteq S$，显然 $X \cup S = S$，选择 D.

解二: 借助韦恩图

由于 S、T 是两个抽象的集合，

若 X 非空，见图 1－3(a)，

若 X 是空集，见图 1－3(b)，

不难得出 $X \cup S = S$.

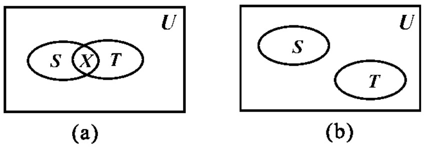


图 1－3

六、集合的应用.

应用体现在以下两个方面：

1. 把集合作为一种数学语言或工具，表示一定范围的元素，如方程的解集、方程组的解集、坐标平面内的有序数对等.

2. 运用集合间的运算法则或运算思想，解决某些逻辑关系较为复杂的问题.

解决这两类问题时：

1. 注意数形结合.

2. 注意将集合语言转化为代数语言或几何语言，参见【例题解析】中的例 8、例 9.

3. 注意思考问题的周密性和解题后的检验.

4. 注意补集思想在解题中的运用，参见【例题解析】中的例 10.

＊＊＊☆＊＊＊ **【例题解析】**

例 1　已知集合 $A = \{x \mid x \leqslant 5, x \in \mathbf{N}\}$，$B = \{x \mid x > 1, x \in \mathbf{N}\}$，那么 $A \cap B$ 等于　(　)

(A)$\{1,2,3,4,5\}$　　(B)$\{2,3,4,5\}$

(C)$\{2,3,4\}$　　(D)$\{x \mid 1 < x \leqslant 5, x \in \mathbf{R}\}$

解: 对 A：$x \leqslant 5$ 且 $x \in \mathbf{N}$，则 $x = 0,1,2,3,4,5$.

对 B：$x > 1$ 且 $x \in \mathbf{N}$，则 $x = 2,3,4,5,6\cdots$

显然 $A \cap B$ 指 A、B 中的公共元素，即 2,3,4,5.

∴$A \cap B = \{2,3,4,5\}$，选择 B.

例 2　已知 $A = \{1,2,3,4,5\}$，$B \subsetneqq A$，且 $1 \in (A \cap B)$，$5 \notin (A \cap B)$，则满足上述条件的集合 B 的个数　(　)

(A)7　(B)8　(C)15　(D)16

解: ∵　$B \subsetneqq A$

∴　$A \cap B = B$，

$1 \in (A \cap B)$，即 $1 \in A$ 且 $1 \in B$

$5 \notin (A \cap B)$，即 $5 \notin A$ 且 $5 \notin B$

∴　B 中元素可能是由 1,2,3,4 构成

∴　B 可能的情况为：

$\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$，　$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}$，

$\{1,2,3,4\}$.

即　满足条件的集合 B 的个数为 8 个，选择 B.

例 3　满足 $A \cup B = \{a_1, a_2\}$ 的集合 A,B 的组数为　(　)

(A)5 组　(B)7 组　(C)9 组　(D)10 组

解: 满足题意的集合 A、B 的可能情况有

$\{a_1,a_2\} \cup \{a_1,a_2\} = \{a_1,a_2\} \cup \{a_1\} = \{a_1\} \cup \{a_1,a_2\} = \{a_1,a_2\} \cup \{a_2\} = \{a_2\} \cup \{a_1,a_2\} = \{a_1,a_2\} \cup \varnothing = \varnothing \cup \{a_1,a_2\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} = \{a_2\} \cup \{a_1\}$

故　选择 C.

例 4　① 若集合 $A = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{y \mid y = 1 - \sqrt{x}, x \geqslant 0\}$，则 $A \cap B =$ ________.

② 已知 $A = \{(x,y) \mid x^2 = y^2\}$，$B = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$，则 $A \cap B =$ ________.

③ 已知集合 A、B 满足 $A \cap B = \varnothing$，记集合 $M = \{A$ 的子集$\}$，集合 $N = \{B$ 的子集$\}$，

则 $M \cap N =$ ________.

④ 设 $M = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$，$N = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{N}\}$，

则，$M \cap N =$ ________.

解: ① 对 A：$y = x^2, x \in \mathbf{R}$　∴　$y \geqslant 0$，

对 B：$y = 1 - \sqrt{x}, x \geqslant 0$　∴　$y \leqslant 1$，

故 $A \cap B = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

② 对 A：$x^2 = y^2$　∴　$x = y$ 或 $x = -y$，

对 B：$y^2 = x$，

$$A \cap B = \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{cases} y = x \\ y^2 = x \end{cases} \text{或} \begin{cases} y = -x \\ y^2 = x \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}\right\}$$

$= \{(0,0),(1,1),(1,-1)\}$.

③ 由 $A \cap B = \varnothing$，表明集合 A、B 无共同元素，

∴　A 的子集、B 的子集之间亦无共同元素，

∴　$A \cap B = \{\varnothing\}$.

④　$M \cap N = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbf{N}\}$.

例 5　① 若 $A = \{a \mid$ 二次方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有实根，$a \in \mathbf{R}\}$，$B = \{a \mid$ 二次方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 无实根，$a \in \mathbf{R}\}$. 求 A,B,$A \cup B$,$A \cap B$.

② 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$，若 $A \cup B = A$，求实根 a 的值.

解: ① 对 A：方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有实根

∴　$\triangle \geqslant 0$，即 $a^2 - 4 \geqslant 0$

∴　$a \geqslant 2$ 或 $a \leqslant -2$，

即　$A = \{a \mid a \geqslant 2$ 或 $a \leqslant -2, a \in \mathbf{R}\}$.

对 B：方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根

∴ $\triangle<0$，即 $1-4a<0$ ∴ $a>\frac{1}{4}$.

即 $B=\left\{a \mid a>\frac{1}{4}, a\in\mathbf{R}\right\}$.

把 A、B 在数轴上表示，如图 1－4 所示.

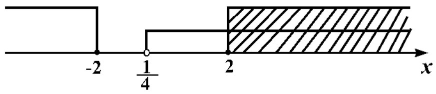


图 1－4

∴ $A\cap B=\{a \mid a\geqslant 2, a\in\mathbf{R}\}$

$A\cup B=\left\{a \mid a\leqslant -2 \text{ 或 } a>\frac{1}{4}, a\in\mathbf{R}\right\}$.

② 化简集 A、B，有

$A=\{1,2\}$，$B=\{1,a-1\}$

∵ $A\cup B=A$ ∴ $B\subseteq A$，

于是 $a-1=2$ 或 $a-1=1$

∴ $a=3$ 或 $a=2$（当 $a=2$ 时 $B=\{1\}$）.

例 6 用符号写出下列图中（图 1－5、图 1－6、图 1－7）阴影部分所表示的集合.

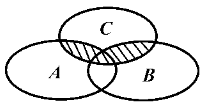


图 1–5

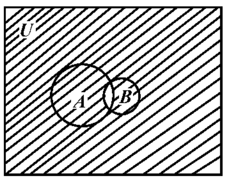


图 1–6

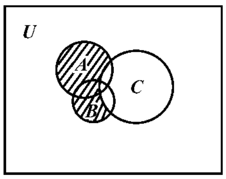


图 1–7

解：对图 1－5：阴影部分可表示为 $(A\cup B)\cap C$.

对图 1－6：空白处指的是 $A\cap B$.

故阴影部分可表示成 $\complement_U(A\cap B)$.

对图 1－7：阴影部分在集合 C 所示的圆外，即用 $\complement_U C$ 表示，

∴ 阴影部分可表示为 $(A\cup B)\cap(\complement_U C)$.

例 7 ① 已知 $A=\{x \mid y=\sqrt{x^2+2x-3}\}$，$B=\{y \mid y=-x^2-3x+10, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$；

② 已知 $A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

解：① 对 A：由 $x^2+2x-3\geqslant 0$ 得

$x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 1$

∴ $A=\{x \mid x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$.

对 B：$y=-x^2-3x+10$

$=-\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+10+\frac{9}{4}\leqslant\frac{49}{4}$.

∴ $B=\left\{y \,\middle|\, y\leqslant\frac{49}{4}\right\}$.

把数集 A、B 表示在数轴上，如图 1－8 所示.

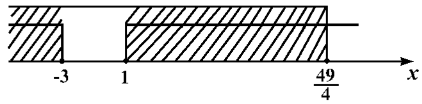


图 1－8

∴ $A\cap B=\left\{x \mid x\leqslant -3 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant\frac{49}{4}\right\}$.

② ∵ $A\cap B=\{-3\}$

∴ $-3\in B$，

又 ∵ $a^2+1>0$，

∴ 集合 B 中，等于 -3 的元素只有 $a-3$ 或 $2a-1$.

1）当 $a-3=-3$ 时，即 $a=0$，此时

$A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,1,-1\}$

$A\cap B=\{-3,1\}$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾.

2）当 $2a-1=-3$，即 $a=-1$ 时，此时

$A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$

$A\cap B=\{-3\}$ 符合已知条件.

综上所述，所求的 $a=-1$.

例 8 设集合 $A=\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=0\}$，$B=\{(x,y) \mid y=ax+b\}$，当 a，b 满足什么条件时，有 $A\cap B=\varnothing$？

解：本题可将集合语言转译为代数语言或几何语言. 即实数 a、b 满足什么条件时，能使方程 $ax+b=0$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上无解. 从数形结合角度思考，集合 A 是 x 轴上的线段，集合 B 表示直线，如图 1－9 所示.

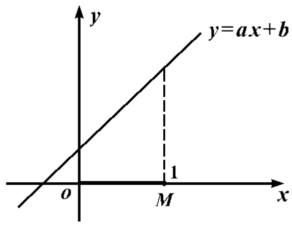


图 1－9

$A\cap B=\varnothing$ 则表示直线与线段 OM 无交点.

结合图形有

$(a\cdot 0+b)(a\cdot 1+b)>0$

即 $b(a+b)>0$.

例 9 已知 $A=\{x \mid x^2+(a+2)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap R^+=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：集合语言 $A\cap R^+=\varnothing$ 表示关于 x 的二次方程 x^2+

$(a+2)x+1=0$ 无正根.

即下面两种情形：

① 方程有实根 x_1、x_2，但无正根；

② 方程无实根.

若方程有根 x_1、x_2 但无正根，

此时　$\triangle \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant -4$ 或 $a \geqslant 0$.

由韦达定理有 $\begin{cases} x_1+x_2=-(a+2) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$

由条件知 $x_1<0$，$x_2<0$

∴　$-(a+2)<0$，∴　$a>-2$

结合 $a \leqslant -4$ 或 $a \geqslant 0$，因此 $a \geqslant 0$.

若方程无实根，

$\triangle<0$，即 $\triangle=(a+2)^2-4<0$，

解得　$-4<a<0$.

综上所述，满足条件的 a 的取值范围是

$$a>-4.$$

例 10　设集合 $A=\{(x,y) \mid y=a_1x^2+b_1x+c_1, a_1 \neq 0\}$，$B=\{(x,y) \mid y=a_2x^2+b_2x+c_2, a_2 \neq 0\}$，$C=\{(x,y) \mid y=0\}$，$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$、$c_1$、$c_2$ 均为实数，且满足 $2b_1b_2=a_1c_1+a_2c_2$. 求证：$(A \cup B) \cap C \neq \varnothing$.

证明：由 $(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C)$ 知

$(A \cup B) \cap C \neq \varnothing$ 等价于方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 在题设条件下，至少有一个方程有实数根，现假设两方程都没有实数根，

则 $\begin{cases} \triangle=4b_1^2-4a_1c_1<0 \Rightarrow b_1^2-a_1c_1<0 \\ \triangle=4b_2^2-4a_2c_2<0 \Rightarrow b_2^2-a_2c_2<0 \end{cases}$

即　$b_1^2-a_1c_1+b_2^2-a_2c_2<0$　　※

由 $2b_1b_2=a_1c_1+a_2c_2$ 有

$$\begin{aligned} & b_1^2-a_1c_1+b_2^2-a_2c_2 \\ &= b_1^2+b_2^2-(a_1c_1+a_2c_2) \\ &= b_1^2+b_2^2-2b_1b_2 \\ &= (b_1-b_2)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

这与 ※ 式是矛盾的.

∴　在题设条件下，不可能使两方程同时无实根，即方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 中至少有一个方程有实根.

∴　$(A \cup B) \cap C \neq \varnothing$.

★★★★☆★★　【热身演练】

一、选择题

1. 设 M、N 是两个不等的非空集合，则必有　(　)

(A) $\varnothing \in M \cap N$　(B) $\varnothing = M \cap N$

(C) $\varnothing \subseteq M \cap N$　(D) $\varnothing \subsetneqq M \cap N$

2. 已知 $M=\{x \mid x^2=4\}$，$N=\{x \mid x<3\}$，则有　(　)

(A) $M \cap N=\{x \mid 2<x<3\}$

(B) $M \cap N=\{x \mid -2<x<3\}$

(C) $M \cup N=\{x \mid x<3\}$

(D) $M \cup N=\mathbf{R}$

3. 已知集合 $A=\{x \mid x=n, n \in \mathbf{Z}\}$，$B=\left\{x \middle| x=\frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$，$C=\left\{x \middle| x=\frac{1}{2}+n, n \in \mathbf{Z}\right\}$，则有　(　)

(A) $B \subsetneqq A \subsetneqq C$　(B) $C \subsetneqq B \subsetneqq A$

(C) $B=A \cup C$　(D) $B=A \cap C$

4. 已知集合 A、B、C 满足 $A \cup B=A \cup C$，则有　(　)

(A) $B=C$

(B) $A \cap C=A \cap B$

(C) $A \cap (\complement_{\mathbf{R}}C)=A \cap (\complement_{\mathbf{R}}B)$

(D) $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B=(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap C$

5. 集合{能被 3 或 7 整除的 100 以内的自然数}的个数是　(　)

(A) 43 个　(B) 44 个　(C) 45 个　(D) 47 个

6. 设 $A=\{x \mid 1<x<2\}$，$B=\{x \mid x<a\}$，若 $A \subsetneqq B$，则 a 的取值范围为　(　)

(A) $a \geqslant 2$　(B) $a \leqslant 1$

(C) $a \geqslant 1$　(D) $a \leqslant 2$

7. 设集合 $M=\{x \mid x=3m+1, m \in \mathbf{Z}\}$，$N=\{y \mid y=3n+2, n \in \mathbf{Z}\}$，若 $x_0 \in M$，$y_0 \in \mathbf{N}$，则 x_0y_0 与 M、N 的关系（　)

(A) $x_0y_0 \in M$　(B) $x_0y_0 \in \mathbf{N}$

(C) $x_0y_0 \notin M$　(D) $x_0y_0 \notin \mathbf{N}$

8. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x \mid -2<x<\frac{1}{4}\right\}$，$B=\{x \mid x \leqslant -2\}$，那么集合 $C=\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{4}\right\}$ 等于　(　)

(A) $A \cap B$　(B) $A \cup B$

(C) $\complement_R(A \cap B)$　(D) $\complement_R(A \cup B)$

9. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，$M=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x \mid x=3n, n \in \mathbf{Z}\}$，则 $M \cap (\complement_U N)$ 等于　(　)

(A) $\{x \mid x=3n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$

(B) $\{x \mid x=4n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$

(C) $\{x \mid x=6n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$

(D) $\{x \mid x=6n \pm 2, n \in \mathbf{Z}\}$

10. 已知 a，b，c 为非零实数，满足 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的数的集合是　(　)

(A) $\{-4,4\}$　(B) $\{0,4\}$

(C) $\{0,-4\}$　(D) $\{-4,0,4\}$

二、填空题

1. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x \mid ax+$

$1=0\}$ 满足 $B\subsetneqq A$,则 a 所能取的一切值为________.

2.集合 $A=\{1,2,3,4\}$,集合 B 满足条件"$B\subsetneqq A,1\in A\cap B,4\notin A\cap B$",写出所有可能取的集合 B:________.

3.某班有学生 48 人,其中爱好书法的有 24 人,爱好音乐的有 30 人,既爱好音乐又爱好书法的有 N 人,则 N 的最大值和最小值分别为________.

4. 用集合符号表示图 1－10 中的阴影部分为________.

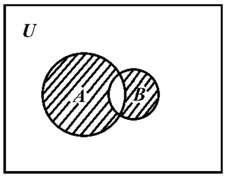


图 1－10

5.设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$,$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-5\leqslant x\leqslant 5\}$,则 $A\cup B$ 中元素的个数为________.

三、解答题

1.若 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid ax-2=0\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 a 组成的集合 C.

2.已知 $A=\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$,$B=\{x\mid 2x^2+nx+2=0\}$,若 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,求 $A\cup B$.

3.已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$,满足条件 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$,求 a 的值.

4.对于实数集 $A=\{x\mid x^2-2ax+(4a-3)=0\}$ 和 $B=\{x\mid x^2-2\sqrt{2}ax+(a^2+a+2)=0\}$ 是否存在实数 a,使 $A\cup B=\varnothing$?若 a 不存在说明理由;若 a 存在,求 a 的值.

★★★★★★☆ 【参考答案】

一、C　D　C　D　A　A　B　D　D　D

二、1. $0,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　2. $\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}$　3. 24,6　4. $(A\cap(\complement_U B))\cup((\complement_U A)\cap B)$　5. 16

三、1. **解**:对 A:化简后有 $A=\{1,2\}$,

由 $A\cup B=A$,则 $B\subseteq A$

∴　B 可能是 $\{1\},\{2\},\varnothing$

当 $B=\varnothing$ 时,表明集合 B 中无元素,即方程 $ax-2=0$ 无解.

∴　$a=0$

当 $B=\{1\}$,即 B 中的 $x=1$,

∴　$a=2$

当 $B=\{2\}$,即 B 中的 $x=2$,

∴　$a=1$

∴　由 a 构成的集合 $C=\{0,1,2\}$.

2. **解**:集合 A、B 分别是方程 $2x^2+x+m=0$ 与 $2x^2+nx+2=0$ 的解的集合.

∵　$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

∴　$\frac{1}{2}$ 既是方程 $2x^2+x+m=0$ 的解,又是方程 $2x^2+nx+2=0$ 的解.

∴　把 $x=\frac{1}{2}$ 分别代入两方程,有

$$m=-1,n=-5.$$

当 $m=-1$ 时,方程 $2x^2+x-1=0$ 的另一解为 -1,

当 $n=-5$ 时,方程 $2x^2-5x+2=0$ 的另一解为 2.

∴　$A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-1,2\right\}$.

3. **解**:$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,

$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$,

由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 知,3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

即 $3^2-3a+a^2-19=0$,$a^2-3a-10=0$

∴　$a=5$ 或 $a=-2$

当 $a=5$ 时,

$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

此时　$A\cap C=\{2\}$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

当 $=-2$ 时,

$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$

满足 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$,

故　$a=-2$.

4. **解**:由 $A\cup B=\varnothing$ 知 $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$

即 二次方程 $x^2-2ax+(4a-3)=0$ 无实解.

二次方程 $x^2-2\sqrt{2}ax+(a^2+a+2)=0$ 亦无实解.

∴　$\triangle_1=4a^2-4(4a-3)<0$

$\triangle_2=8a^2-4(a^2+a+2)<0$

即　$\begin{cases}a^2-4a+3<0\\a^2-a-2<0\end{cases}$

解得　$1<a<2$,

故　存在实数 a 且 $1<a<2$ 时,能使 $A\cup B=\varnothing$.

1.4　含绝对值不等式的解法

☆＊＊＊＊＊＊　【知识要点】

含有绝对值不等式的解法

＊☆＊＊＊＊＊　【要点精述】

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$

$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a(a>0)$

＊＊☆＊＊＊＊　【知能强化】

一、绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a & a>0\\ 0 & 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是数轴上表示数 a 的点到原点的距离.

二、含有绝对值不等式的解法

1. 公式法

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$

$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a(a>0)$

上式中的 x 既可以是未知数 x，也可以是一个式子，如 $f(x)$.

2. 平方法　$|f(x)|<a\Leftrightarrow f^2(x)<a^2(a>0)$

3. 讨论法　即零点分段法，通过讨论化去绝对值号是解决有关绝对值问题的基本方法.

所谓零点分段法是指：数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 分别使含有 $|x-x_1|,|x-x_2|,|x-x_3|,\cdots,|x-x_n|$ 的代数式 F 中相应的一个绝对值为零，称 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为相应绝对值的零点. 零点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 将数轴分成 $n+1$ 段，在每一段上，$(x-x_1),(x-x_2),(x-x_3),\cdots,(x-x_n)$ 都有确定的正负号，利用绝对值定义可以化去绝对值记号，得到代数式 F 在各段上的简化式.

如：画出 $y=|x-1|+2|x-2|$ 的图像. 零点为 $x=1$ 和 $x=2$，把数轴分成三段，

$\therefore\quad y=|x-1|+2|x-2|$

$$=\begin{cases}-3x+5 & (x\leqslant 1)\\ -x+3 & (1<x\leqslant 2)\\ 3x-5 & (x>2)\end{cases}$$

对应的图形如图 1－11 所示.

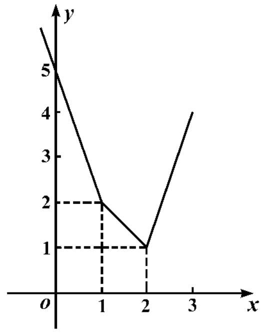


图 1－11

＊＊＊☆＊＊＊　【例题解析】

例 1　根据图 1－12 所示 a、b、c 三数的点的位置，化简 $|a+b|+|a+c|-|b-c|=$ ________.

c　b　o　a　x

图 1－12

解：由图 1－12 可知：

$a>0,b<0,c<0$，

且　$|a|<|b|<|c|$

$\therefore\quad |a+b|=-b-a,|a+c|=-c-a,|b-c|=-c+b$

$\therefore$　原式 $=-b-a-c-a+c-b$

$=-2(a+b)$.

例 2　解下列不等式：

① $|2x-3|>5$；　② $2<|3x-2|<3$.

解：① $|2x-3|>5\Leftrightarrow 2x-3>5$ 或 $2x-3<-5$

即　$2x>8\Rightarrow x>4$，

$2x<-2\Rightarrow x<-1$.

$\therefore$　原不等式的解为：$x>4$ 或 $x<-1$.

② 原不等式等价于

$$\begin{cases}|3x-2|>2\Rightarrow 3x-2>2 \text{ 或 } 3x-2<-2 & (1)\\ |3x-2|<3\Rightarrow -3<3x-2<3 & (2)\end{cases}$$

由(1) 有 $x>\frac{4}{3}$ 或 $x<0$；

由(2) 有 $-1<3x<5$，即 $-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$.

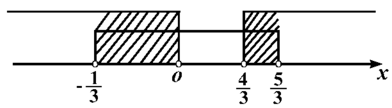


图 1－13

两式同时成立，取交集(如图 1－13)，则原不等式的解集

为：

$$\left\{x \left| -\frac{1}{3}<x<0\right.\right\} \cup \left\{x \left| \frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}\right.\right\}.$$

例 3　① $|x+3|+|2-x|=5$ 的解集为______________；

② $|x+3|+|2-x|>5$ 的解集为______________；

③ $|x+3|+|2-x|<5$ 的解集为______________.

解：根据零点分段法，$|x+3|+|2-x|$ 的零点分别为 $x=-3$ 和 $x=2$.

① 当 $x\leqslant-3$ 时，原等式可化为

$-x-3+2-x=5$，即 $2x=-6$，

∴　　$x=-3$

当 $-3<x<2$ 时，原等式可化为

$x+3+2-x=5$，即　$5=5$，

也就是说，只要 $-3<x<2$ 时，原式恒成立.

当 $x\geqslant2$ 时，原等式可化为

$$x+3-(2-x)=5,$$

即　$2x=4$，　∴　$x=2$.

综上可知，$|x+3|+|2-x|=5$ 的解集为

$$\{x|-3\leqslant x\leqslant2\}.$$

② 当 $x<-3$ 时，原不等式可化为

$-x-3+2-x>5$，即 $2x<-6$，

∴　　$x<-3$.

当 $-3\leqslant x\leqslant2$ 时，原不等式可化为

$$x+3+2-x>5,$$

∴　　$x\in\varnothing$

当 $x>2$ 时，原不等式可化为

$$x+3+x-2>5,$$

即　$2x>4$，　∴　$x>2$

综上所述，原不等式的解集为

$$\{x\mid x<-3 \text{ 或 } x>2\}.$$

③ 当 $x<-3$ 时，原不等式可化为

$$-x-3+2-x<5,$$

即　　$-2x<6$，

∴　　$x>-3$.

故　原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $-3\leqslant x\leqslant2$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $x>2$ 时，解得 $x<2$，

∴　原不等式的解集为 $\varnothing$.

综上所述，原不等式 $|x+3|+|2-x|<5$ 的解集为 $\varnothing$.

小结：① 对含有两个或两个以上绝对值的等式或不等式的解集，必须分区间讨论.

② 事实上作出 $y=|x+3|+|2-x|$ 的图像，它们的解集会一目了然，如图 1－14.

$$y=|x+3|+|2-x|$$

$$=\begin{cases}-2x-1 & (x<-3)\\ 5 & (-3\leqslant x\leqslant2)\\ 2x+1 & (x>2)\end{cases}$$

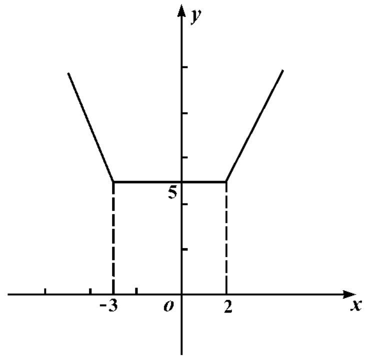


图 1－14

例 4　已知关于 x 的不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 的解集是非空集合，求实数 a 的取值范围.

解：作 $y_1=|x-4|+|x-3|$ 的图像，再作 $y_2=a$

$$\therefore y=\begin{cases}4-x+3-x=7-2x & (x\leqslant3)\\ 4-x+x-3=1 & (3<x\leqslant4)\\ x-4+x-3=2x-7 & (x>4)\end{cases}$$

如图 1－15 所示，要原不等式的解集非空，只须 $a>1$.

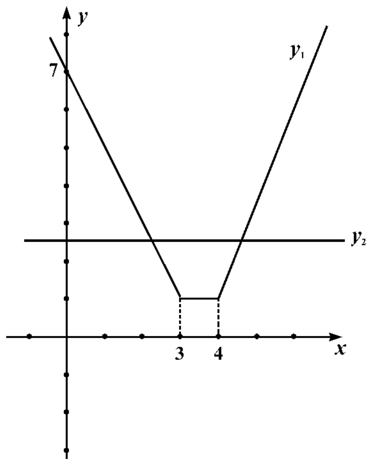


图 1－15

例 5　解不等式：$|2x+1|>|5-x|$.

解法一：

原不等式等价于 $|2x+1|-|5-x|>0$

当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，

原不等式 $\Leftrightarrow-(2x+1)-(5-x)>0$.

即　　$-2x-1-5+x>0$，

∴　$-x-6>0$，　∴　$x<-6$.

当 $-\frac{1}{2}<x<5$ 时，

原不等式 $\Leftrightarrow 2x+1-5+x>0$

∴　　$3x>4$，　∴　$x>\frac{4}{3}$.

故　原不等式的解集为 $\left\{x \left| \frac{4}{3}<x<5\right.\right\}$.

当 $x\geqslant5$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow 2x+1-x+5>0$

$\therefore$　　　　$x>-6$，结合 $x\geqslant 5$，

$\therefore$　原不等式的解集为 $\{x\mid x\geqslant 5\}$.

综上所述，原不等式解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x<-6,\text{或}\frac{4}{3}<x<5,\text{或 }x\geqslant 5\right\}$$

即　$\left\{x\,\middle|\,x<-6\text{ 或 }x>\frac{4}{3}\right\}$.

解法二：

由于原不等式两边非负，故可同时平方，有

$$|2x+1|^2>|5-x|^2,$$

即　$4x^2+4x+1>x^2-10x+25$

$\therefore$　　$3x^2+14x-24>0$，

即　$(3x-4)(x+6)>0$

$\therefore$　　$x>\frac{4}{3}$ 或 $x<-6$

（解法二在学完一元二次不等式的解法后参看）

例 6　已知 $A=\{x\mid |x-a|<4\}$，$B=\{x\mid |x-2|>3\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

解：对 A：$|x-a|<4\Rightarrow -4<x-a<4$

即　$a-4<x<a+4$.

对 B：$|x-2|>3\Rightarrow x-2>3$ 或 $x-2<-3$

即　$x>5$ 或 $x<-1$.

要使 $A\cup B=\mathbf{R}$，按并集的意义，结合图 1－16 有

$$\begin{cases}a+4>5\\a-4<-1\end{cases}$$

即　$\begin{cases}a>1\\a<3\end{cases}$.

$\therefore$　　$1<a<3$.

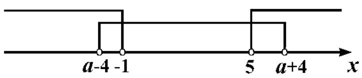


图 1－16

例 7　已知 $A=\{x\mid |x-1|\geqslant a\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}2x-1<3x+5\\5x-2<3x+6\end{cases}\right\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

解：对 A：若 $a<0$ 时，$|x-1|\geqslant a$ 的解集 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

对 B：化简结果为 $\{x\mid -6<x<4\}$，

不能满足 $A\cap B=\varnothing$，故 $a\geqslant 0$.

对 A：$|x-1|\geqslant a$ 的解集

$$\{x\mid x-1\geqslant a\text{ 或 }x-1\leqslant -a\}$$

即　　$x\geqslant 1+a$ 或 $x\leqslant 1-a$.

要使 $A\cap B=\varnothing$，结合交集的意义，结合图 1－17，有

$$\begin{cases}a+1\geqslant 4\Rightarrow a\geqslant 3\\1-a\leqslant -6\Rightarrow a\geqslant 7\end{cases}$$

$\therefore$　　$a\geqslant 7$.

小结：例 6 和例 7 是把含有参数的绝对值不等式与集合中的交、并联系起来，解题时除了要深刻理解集合的有关概念外，还须学会在数轴上表示它们的关系，从而找到两集合之间的联系. 两例均选自于课本.

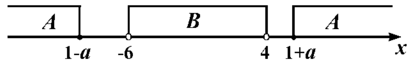


图 1－17

＊＊＊＊☆＊＊　**【热身演练】**

一、选择题

1. 不等式 $|2x-1|>3$ 的解集为　（　）

 (A) $\{x\mid x>2\}$　(B) $\{x\mid x>2$ 或 $x<-1\}$

 (C) $\{x\mid x<-1\}$　(D) $\{x\mid -1<x<2\}$

2. 不等式 $|-2x-3|\leqslant 4$ 的解集为　（　）

 (A) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 7\}$

 (B) $\left\{x\mid -\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

 (C) $\left\{x\mid x\geqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }x\leqslant -\frac{7}{2}\right\}$

 (D) $\{x\mid x\geqslant 7$ 或 $x\leqslant -1\}$

3. 不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant 7$ 的解集是　（　）

 (A) $\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 9\}$

 (B) $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1\}$

 (C) $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 9\}$

 (D) $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 9\}$

4. 如果不等式 $\frac{1}{x}<2$ 和 $|x|>\frac{1}{3}$ 同时成立，则 x 的取值范围是　（　）

 (A) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$　(B) $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{3}$

 (C) $x>\frac{1}{2}$　(D) $x>\frac{1}{3}$ 或 $x<-\frac{1}{3}$

5. 不等式 $|x-3|<|2x-1|$ 的解集为　（　）

 (A) $\{x\mid x<-2\}$

 (B) $\left\{x\mid x>\frac{4}{3}\right\}$

 (C) $\left\{x\mid x<-2\text{ 或 }x>\frac{4}{3}\right\}$

 (D) $\left\{x\mid -2<x<\frac{4}{3}\right\}$

6. 不等式 $|x+2|-|x-3|<4$ 的解集为　（　）

 (A) $\{x\mid x>2\}$　(B) $\{x\mid x<5\}$

 (C) $\left\{x\mid x<\frac{5}{2}\right\}$　(D) $\left\{x\mid x>\frac{5}{2}\right\}$

7. 对一切实数 x，若 $|x-3|+|x+2|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围为　（　）

 (A) $a\geqslant 5$　(B) $a>5$

(C)$a \leqslant 5$　　　　(D)$a < 5$

8. 若 $M=\{x \mid |x|<1\}$，$N=\{x \mid \sqrt{x}<1\}$，则 $M \cap N$ 等于　　（　）

(A)$\{x \mid -1<x<1\}$

(B)$\{x \mid 0<x<1\}$

(C)$\{x \mid -1<x<0\}$

(D)$\{x \mid 0 \leqslant x<1\}$

二、填空题

1. 不等式 $|-4x-7|>8$ 的解集为__________.
2. 不等式 $1<|3x-2|<3$ 的解集为__________.
3. 不等式 $|x-1|>1-x$ 的解集为__________.

三、解答题

1. 画出 $y=x^2-2|x|-1$ 的图像.

2. 解下列不等式：

① $\left|\dfrac{x-1}{2}+2\right|>3$；

② $\left|\dfrac{3x-5}{4}+\dfrac{1}{6}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

3. ① 已知 $U=\{x \mid x^2-3x+2 \geqslant 0\}$，$A=\{x \mid |x-2|>1\}$，求 $\complement_U A$；

② 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x=-t^2, t \in \mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x=3+|t|, t \in \mathbf{R}\}$，求 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)$.

4. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid |x|>1\}$，$B=\{x \mid x^2+4x+3<0\}$，求集合 C，使其同时满足下列条件：

①$C \subseteq ((\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B) \cap \mathbf{Z}$；

②C 有两个元素；

③$C \cap B \neq \varnothing$.

★★★★★★☆　**【参考答案】**

一、B　B　D　B　C　C　D　D

二、1. $\left\{x \mid x>\dfrac{1}{4} \text{ 或 } x<-\dfrac{15}{4}\right\}$

2. $\left\{x \mid -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}, 1<x<\dfrac{5}{3}\right\}$

3. $\{x \mid x>1\}$.

三、

1. **解**：讨论脱去绝对值记号，

当 $x \geqslant 0$ 时，$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$；

当 $x<0$ 时，$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$.

分别在 x 的取值范围内作图，如图 1－18 所示.

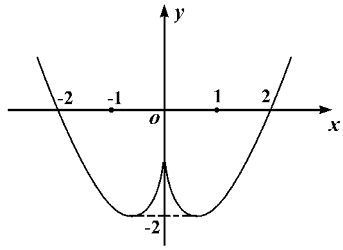


图 1－18

2. **解**：① 原不等式等价于

$$\frac{x-1}{2}+2>3 \text{ 或 } \frac{x-1}{2}+2<-3$$

∴　$\dfrac{x-1}{2}>1$ 或 $\dfrac{x-1}{2}<-5$

∴　$x-1>2$ 或 $x-1<-10$

即　$x>3$ 或 $x<-9$

∴　原不等式的解集为 $\{x \mid x>3 \text{ 或 } x<-9\}$

② 原不等式等价于

$$-\frac{2}{3} \leqslant \frac{3x-5}{4}+\frac{1}{6} \leqslant \frac{2}{3}$$

∴　$-\dfrac{5}{6} \leqslant \dfrac{3x-5}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$

∴　$-\dfrac{10}{3} \leqslant 3x-5 \leqslant 2$

∴　$\dfrac{5}{3} \leqslant 3x \leqslant 7$，即　$\dfrac{5}{9} \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{3}$.

∴　原不等式的解集为 $\left\{x \mid \dfrac{5}{9} \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{3}\right\}$.

3. **解**：① 全集 $U=\{x \mid x \leqslant 1 \text{ 或 } x \geqslant 2\}$，

对 A：$|x-2|>1$ 等价于 $x-2>1$ 或 $x-2<-1$

∴　$x>3$ 或 $x<1$.

根据补集的定义，有

$\complement_U A=\{x \mid x=1 \text{ 或 } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

② 对 A：$x=-t^2$，$t \in \mathbf{R}$，

∴　$x \leqslant 0$

对 B：$x=3+|t|$，$t \in \mathbf{R}$，

∴　$x \geqslant 3$.

∴　$A \cup B=\{x \mid x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant 3\}$.

∴　$\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)=\{x \mid 0<x<3\}$.

4. **解**：集合 A：$|x|>1$，$x>1$ 或 $x<-1$

∴　$\complement_{\mathbf{R}} A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

集合 B：$x^2+4x+3<0$，$-3<x<-1$

∴　$(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$

$=\{x \mid -3<x<-1\} \cup \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

$=\{x \mid -3<x \leqslant 1\}$

∴　$((\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B) \cap \mathbf{Z}=\{-2,-1,0,1\}$

∴　$C \subseteq \{-2,-1,0,1\}$.

由 $C \cap B \neq \varnothing$，说明 C 中含有 B 中的元素，

∴　$-2 \in C$.

C 又有两个元素，

故　C 的构成可能是：

$\{-2,-1\},\{-2,0\},\{-2,1\}$.

1.5　一元二次不等式解法

☆＊＊＊＊＊＊　【知识要点】

一、一元一次不等式(组)的解法
二、一元二次不等式的解法
三、简单的分式不等式的解法

＊☆＊＊＊＊＊　【要点精述】

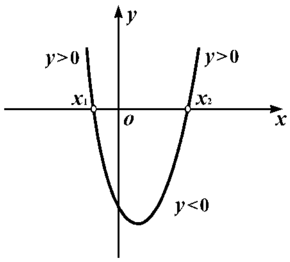
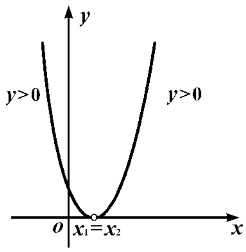
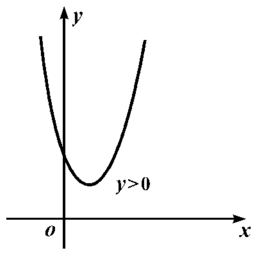
一、一元一次不等式的解法

对于形如 $ax>b$ 的一元一次不等式的解法，如下表：

a 的符号	b 的符号	$ax>b$ 的解
$a>0$		$x>\frac{b}{a}$
$a<0$		$x<\frac{b}{a}$
$a=0$	$b<0$	**R**
	$b\geqslant 0$	$\varnothing$

二、一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 与 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解法可利用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的有关性质求解，如下表所示：

<table>
<tr><th>$\triangle=b^2-4ac$</th><th>$y=ax^2+bx+c$
$(a>0)$ 的图像</th><th>$ax^2+bx+c>0$
$(a>0)$ 的解集</th><th>$ax^2+bx+c<0$
$(a>0)$ 的解集</th></tr>
<tr><td>$\triangle>0$
(有两相异实数根
$x_1,x_2(x_1<x_2)$)</td><td>
</td><td>$x<x_1$ 或 $x>x_2$
(在两根之外)</td><td>$x_1<x<x_2$
(在两根之内)</td></tr>
<tr><td>$\triangle=0$
(有相等实数根
$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$)</td><td>
</td><td>$x\neq-\frac{b}{2a}$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
<tr><td>$\triangle<0$
(没有实数根)</td><td>
</td><td>R</td><td>$\varnothing$</td></tr>
</table>