目录

LU MU

第四章　三角函数

目录

LU MU

第四章　三角函数

4.1　角的概念的推广(第一次作业)

一、1. C　2. C　3. C　4. C　5. D

二、1. $\{\beta|\beta=-300°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

2. 三　230°　−130°

3. −690°,−330°,30°,390°

4. 22°　5. $Q\subsetneqq P$

三、1. 解:(1) $1380°=1080°+300°=3\times 360°+300°$

∵300°角的终边在第四象限,

∴1380°角的终边在第四象限.

(2) $-1380°=-1440°+60°=-4\times 360°+60°$

∵60°角的终边在第一象限,

∴−1380°角的终边在第一象限.

2. 解:∵时针转一周用12小时,

∴时针每小时转 $-360°\div 12=-30°$

则时针转动的角度为 $5\frac{5}{12}\times(-30°)$

$=-162.5°$

分针每小时转−360°

∴分针转动的角度为

$5\frac{5}{12}\times(-360°)=-1950°$.

3. 解:$\alpha=x+45°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$,

$\beta=x-45°+k'\cdot 360°,k'\in\mathbf{Z}$

∴$\alpha-\beta=90°+k\cdot 360°-k'\cdot 360°=90°+(k-k')\cdot 360°=90°+n\cdot 360°,n\in\mathbf{Z}$.

4. 解:$A\cap B=\{\alpha|k\cdot 360°+150°<\alpha<k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

$A\cup B=\{\alpha|k\cdot 360°+60°<\alpha<k\cdot 360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

5. 解:∵$4\alpha=20°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$

∴$\alpha=5°+k\cdot 90°$

∵$-360°\leqslant\alpha<0°$

∴$-360°\leqslant 5°+k\cdot 90°<0°$

∴$-4\frac{5}{90}\leqslant k<-\frac{5}{90}$

∴$k=-4,-3,-2,-1$.

∴α 为−355°,−265°,−175°,−85°.

∴满足条件的 α 的集合为

$\{-355°,-265°,-175°,-85°\}$.

4.1　角的概念的推广(第二次作业)

一、1. A　2. D　3. B　4. C　5. C

二、1. 第三象限角或第四象限角或与 y 轴的负半轴重合

2. (−90°,90°)　3. 290°

4. $\alpha+\beta=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$

5. $\alpha+\beta=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}$

三、1. 解:与−120°终边相同的角的集合为

$A=\{\alpha|\alpha=-120°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

因为 $-720°\leqslant\alpha<720°$

所以 $-720°\leqslant-120°+k\cdot 360°<720°$

∴$-600°\leqslant k\cdot 360°<840°$

∴$-\frac{5}{3}\leqslant k<\frac{7}{3}$

∵$k\in\mathbf{Z}$

∴$k=-1,0,1,2$

当 $k=-1$ 时,$\alpha=-480°$

当 $k=0$ 时,$\alpha=-120°$

当 $k=1$ 时,$\alpha=240°$

当 $k=2$ 时,$\alpha=600°$.

2. 解:∵α 为第二象限的角

∴$k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

(1) $-k\cdot 360°-180°<-\alpha<-k\cdot 360°-90°,k\in\mathbf{Z}$,

∴$-\alpha$ 为第三象限的角.

(2) $-k\cdot 360°<180°-\alpha<-k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}$

∴$180°-\alpha$ 是第一象限的角.

(3)$k\cdot 360°+270°<180°+\alpha<k\cdot 360°+360°$

$\therefore 180°+\alpha$ 是第四象限的角.

3. 解:$\because \alpha=-60°$,且 α、β 关于 $x+y=0$ 对称.

$\therefore \beta$ 的终边与 $-30°$ 角的终边相同,

$\therefore \beta=-30°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$.

4. 解:$\because \theta=90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore \frac{\theta}{3}=30°+k\cdot 120°$

又 $0°\leqslant 30°+k\cdot 120°\leqslant 360°$

$\therefore -30°\leqslant k\cdot 120°\leqslant 330°$

$\therefore -\frac{1}{4}\leqslant k\leqslant\frac{11}{4}$

$\because k\in\mathbf{Z}$

$\therefore k=0,1,2$

当 $k=0$ 时,$\frac{\theta}{3}=30°$

$k=1$ 时,$\frac{\theta}{3}=150°$

$k=2$ 时,$\frac{\theta}{3}=270°$

$\therefore$ 在$[0°,360°]$内,$30°,140°,270°$与$\frac{\theta}{3}$角的终边相同.

5. 解:$\because \alpha$、β 都是第一象限角

$\therefore k_1\cdot 360°<\alpha<k_1\cdot 360°+90°,k_1\in\mathbf{Z}$

$k_2\cdot 360°<\beta<k_2\cdot 360°+90°,k_2\in\mathbf{Z}$

$\therefore k\cdot 360°<\alpha+\beta<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore \alpha+\beta$ 是第一、二象限角或与 y 轴的非负半轴重合.

$\because k\cdot 360°-90°<\alpha-\beta<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore \alpha-\beta$ 是第一、四象限角或与 x 轴的非负半轴重合.

4.2 弧度制(第一次作业)

一、1. B 2. A 3. D 4. A 5. D

二、1. $-\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{12}$ $105°$ $-840°$

2. $\frac{2}{3}\pi$ $\frac{n-2}{n}\pi$

3. $-\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

5. $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

三、1. 解:$\because x$ 是第二象限的角

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$ ①

又 $|x+2|\leqslant 4$

$\therefore -6\leqslant x\leqslant 2$ ②

令 $k=0,-1$ 及②可得

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$

$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$

又 $\because -6\leqslant x\leqslant 2$

可得:$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant 2$

$\therefore x$ 的取值范围为

$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant 2$

2. 解:设各弧所对圆心角的弧度数分别为

$\overset{\frown}{AB}=x,\overset{\frown}{BC}=2x,\overset{\frown}{CD}=3x,\overset{\frown}{DE}=4x,\overset{\frown}{EA}=5x$,则有

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}=x+2x+3x+4x+5x=15x$

$\therefore 15x=2\pi$

$\therefore x=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\times 9x=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi$

$\angle B=\frac{1}{2}\times 12x=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{2}{15}\pi=\frac{4}{5}\pi$

$\angle C=\frac{1}{2}\times 10x=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{2}{15}\pi=\frac{2}{3}\pi$

$\angle D=\frac{1}{2}\times 8x=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{2}{15}\pi=\frac{8}{15}\pi$

$\angle E=\frac{1}{2}\times 6x=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2}{15}\pi=\frac{2}{5}\pi$.

3. 解:(1)角 α 的集合为:

$\{\alpha\,|\,2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

(2)角 α 的集合为:

$\{\alpha\,|\,k\pi+\frac{\pi}{6}<\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$.

4. 解:与 α 终边相同的角为

$2k\pi+\alpha, k\in\mathbf{Z}$

由题意,得 $10\alpha=2k\pi+\alpha$

$9\alpha=2k\pi$,

$\alpha=\frac{2k\pi}{9}$

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\frac{2k\pi}{9}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<k<\frac{9}{4}$

$\because k\in\mathbf{Z}$, $\therefore k=1,2$

当 $k=1$ 时, $\alpha=\frac{2\pi}{9}$,

当 $k=2$ 时, $\alpha=\frac{4\pi}{9}$.

5. 解:设点 P 的坐标为 (x,y),则

$$\begin{cases}x=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}\\ y=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x=1\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

4.2 弧度制(第二次作业)

一、1. D 2. A 3. B 4. C 5. C

二、1. 100 cm 2. $\frac{9}{16}$ cm^2

3. 12π 4. 48 cm^2

5. 1 或 4

三、1. 解:设圆内接正方形的边长是 a

$\therefore$ 对角线长 $=\sqrt{2}a=$ 圆的直径

由已知,弧长 $l=a$,设该弧所对圆心角是 θ.

$\because$ 圆的半径 $=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore a=R\cdot\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\theta$

$\therefore \theta=\sqrt{2}$

$\therefore$ 该弧所对的圆周角 $=\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解:设扇形的半径为 R,弧长为 l,圆心角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,扇形内切圆半径为 r,则

$l=\alpha R$

$\therefore \pi=\frac{\pi}{3}R$

$\therefore R=3$

连接扇形的顶点及其内切圆圆心的直线平分扇形的圆心角,内切圆圆心到扇形半径的距离为 r. 到扇形顶点的距离为 $3-r$.

$\therefore (3-r)\sin\frac{\pi}{6}=r$

$\therefore r=1$

即扇形的内切圆半径为 1.

3. 解:设弧长为 l,中心角的弧度为 α,半径为 R,则有

$$\begin{cases}2R+l=4 & ①\\ \frac{1}{2}Rl=1 & ②\end{cases}$$

由①、②解得

$$\begin{cases}R=1\\ l=2\end{cases}$$

$\therefore \alpha=\frac{l}{R}=2(\mathrm{rad})$

$|AB|=2\cdot1\cdot\sin1=2\sin1(\mathrm{cm})$.

4. 解:设该扇形的半径是 r,中心角是 θ. θ 所对的弧长为 $l-2r$,

则有 $l-2r=r\theta$

$\therefore \theta=\frac{l-2r}{r}$

又扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore S=\frac{1}{2}r^2(\frac{l-2r}{r})$

$=\frac{1}{2}r(l-2r)$

$=-r^2+\frac{l}{2}r$

$=-(r-\frac{l}{4})^2+\frac{l^2}{16}$

当 $r=\frac{l}{4}$ 时，S 取最大值 $\frac{l^2}{16}$，此时

$$\theta=\frac{1}{r}(l-2r)=\frac{1}{\frac{1}{4}l}\left(\frac{1}{2}l\right)=2$$

$\therefore \theta=2$ 时，S 取最大值.

5．解：设符合条件的正多边形的边数分别为 m 和 n，(m、$n\geqslant 3$，且 m、n 为正整数)，则它们对应的正多边形的内角分别为

$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ 和 $\frac{(m-2)\pi}{m}$ rad

由题意 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}:\frac{(m-2)\pi}{m}=144:\pi$

$\therefore n=10-\frac{80}{m+8}$

$\because n\geqslant 3$

$\therefore \frac{80}{m+8}\leqslant 7$

$\therefore m+8\geqslant \frac{80}{7}$

又 $m\geqslant 3$ 且 $m+8$ 是 80 的约数

$\therefore m+8$ 可取 16，20，40，80.

当 $m+8=16$ 时，$m=8$，$n=5$

当 $m+8=20$ 时，$m=12$，$n=6$

当 $m+8=40$ 时，$m=32$，$n=8$

当 $m+8=80$ 时，$m=72$，$n=9$

故所求的正多边形共有四组，它们是

8，5；12，6；32，8；72，9.

4.3 任意角的三角函数(第一次作业)

一、1．B　2．C　3．A　4．D　5．B

二、1．$\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$　2．$\frac{1}{2}$　3．$3-\frac{\pi}{2}$

4．$>$　$<$　$<$　5．$-\frac{2}{5}$

三、1．解：(1)当 $t>0$ 时

$|OP|=\sqrt{(8t)^2+(6t)^2}=10t$

$\therefore \sec\alpha=\frac{10t}{8t}=\frac{5}{4}$

$\tan\alpha=\frac{6t}{8t}=\frac{3}{4}$

$\therefore \log_2|\sec\alpha-\tan\alpha|$

$=\log_2\left|\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right|$

$=\log_2\frac{1}{2}$

$=-1.$

(2)当 $t<0$ 时

$|OP|=\sqrt{(8t)^2+(6t)^2}=-10t$

$\therefore \sec\alpha=\frac{-10t}{8t}=-\frac{5}{4}$

$\tan\alpha=\frac{6t}{8t}=\frac{3}{4}$

$\therefore \log_2|\sec\alpha-\tan\alpha|$

$=\log_2\left|-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right|$

$=\log_2 2$

$=1.$

2．解：$\because \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}<0$，

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^3+(3a+1)^2}}$，$\therefore a<0$

$\therefore \frac{a}{\sqrt{a^2+(3a+1)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

$\therefore 5a^2=4[a^2+(3a+1)^2]$

$\therefore 35a^2+24a+4=0$

$\therefore (5a+2)(7a+2)=0$

$\therefore a=-\frac{2}{5}$ 或 $a=-\frac{2}{7}.$

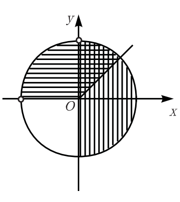
3．解：$\cos\beta=\frac{x}{2}$，$r=\sqrt{x^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3+x^2}$

$\therefore \cos\beta=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$，$\therefore \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}=\frac{x}{2}$

$\therefore x=\pm 1$，$\therefore r=2$

$\therefore \sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\beta=\pm\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\pm\sqrt{3}.$

4．解：在单位圆中分别画出集合 A 和集合 B，从图中观察得出：



$A\cap B=\{\alpha\mid 2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}.$

$A\cup B=\{\alpha|2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

5. **解**：$\because f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$

$\therefore$ **当** $x=1$ **时**，$f(x)$ **有最大值为** 4.

$\because$ **当** $x=3$ **时**，$f(x)=0$

当 $x=0$ **时**，$f(x)=3$

$\therefore$ **当** $x=3$ **时**，$f(x)$ **有最小值为** 0.

$\therefore m=4,n=0$

$\therefore\alpha$ **的终边经过点** $P(4,-1)$.

$\therefore r=\sqrt{16+1}=\sqrt{17},\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

4.3 任意角的三角函数(第二次作业)

一、1. C 2. C 3. D 4. D 5. D

二、1. $-2<a\leqslant 3$

2. $\{\theta|2k\pi<\theta<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

3. 2 4. $\{-2,0,4\}$

5. $k\pi+\frac{\pi}{2}<x\leqslant k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$

三、1. **解**：(1)**当** $x\geqslant 0$ **时，射线** $y=-2x(x\geqslant 0)$ **是** α **的终边**.

令 $x=1$，**得** $y=-2$，**点** $P(1,-2)$ **在** α **的终边上**，

$\therefore\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\alpha=-2,\cot\alpha=-\frac{1}{2}$

$\therefore\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha$

$=(-\frac{2}{\sqrt{5}})\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+(-2)-(-\frac{1}{2})=-\frac{19}{10}$.

(2)**当** $x\leqslant 0$ **时，射线** $y=-2x(x\leqslant 0)$ **是** α **的终边**.

取 $x=-1$，**得** $y=2$，**点** $P(-1,2)$ **在** α **终边上**，

$\therefore\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\tan\alpha=-2,\cot\alpha=-\frac{1}{2}$

$\therefore\sin\alpha\cos\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})+(-2)-(-\frac{1}{2})=-\frac{19}{10}$.

由(1)、(2)**可得**

$\sin\alpha\cos\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha=-\frac{19}{10}$.

2. **解**：$\because a=\sin\frac{29\pi}{12}=\sin(2\pi+\frac{5\pi}{12})=\sin\frac{5\pi}{12}$

$\therefore 0<a<1$

$\because b=\cos(-\frac{26\pi}{9})$

$=\cos(-4\pi+\frac{10\pi}{9})=\cos\frac{10\pi}{9}$

$\therefore -1<b<0$

$\because\tan\frac{9\pi}{4}=\tan(2\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore b<a<c$.

3. **解**：$\because\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$\therefore\cos\theta<0$

$\because r=\sqrt{(-3\cos\theta)^2+(4\cos\theta)^2}=-5\cos\theta$

$\therefore\sin\alpha=\frac{4\cos\theta}{-5\cos\theta}=-\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=\frac{-3\cos\theta}{-5\cos\theta}=\frac{3}{5}$

$\tan\alpha=\frac{4\cos\theta}{-3\cos\theta}=-\frac{4}{3}$

$\cot\alpha=\frac{-3\cos\theta}{4\cos\theta}=-\frac{3}{4}$

$\sec\alpha=\frac{-5\cos\theta}{-3\cos\theta}=\frac{5}{3}$

$\csc\alpha=\frac{-5\cos\theta}{4\cos\theta}=-\frac{5}{4}$.

4. **解**：$\because\sin 2\theta<0$

$\therefore 2k\pi+\pi<2\theta<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore$ **当** k **是奇数时**，θ **在第四象限**

当 k **是偶数时**，θ **在第二象限**

$\because|\cos\theta|=-\cos\theta$

$\therefore -\cos\theta\geqslant 0$，$\therefore\cos\theta\leqslant 0$

$\therefore\theta$ **的终边落在左半平面**

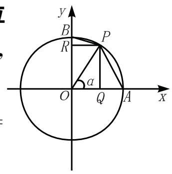
$\therefore\theta$ **在第二象限**

$\therefore \sin\theta>0, \cos\theta<0$

$\therefore \tan\theta<0, \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}<0$

$\therefore$ 点 $P(\tan\theta, \sec\theta)$ 在第三象限.

5. 证明:设角 α 的终边与单位圆交于 $P(x,y)$,过 P 作 $PQ\perp Ox$,$PR\perp Oy$,Q、R 分别是垂足.



$\because |OP|=y=\sin\alpha, |OQ|=x=\cos\alpha$

又在$\triangle OPQ$ 中,$|OP|+|OQ|>|OP|$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>1$

$\because S_{\triangle OAP}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|QP|=\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$

$S_{\triangle OBP}=\dfrac{1}{2}|OB|\cdot|RP|=\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

$S_{扇形OAB}=\dfrac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{4}$

$\because S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OBP}<S_{扇形OAB}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

由上可知:$1<\sin\alpha+\cos\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

4.4 同角三角函数的基本关系式（第一次作业）

一、1. D 2. C 3. B 4. B 5. C

二、1. $\alpha\in\mathbf{R}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), k\in\mathbf{Z}$

2. $\dfrac{1}{2}$ 3. 2 4. $\dfrac{11}{60}$ 5. $\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

三、1. 解:(1)若 $m\neq0$,由 $\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{1+m^2}$

当 α 在第一或第四象限时

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$;

当 α 在第二或第三象限时,

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

$\sin\alpha=-\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

(2)若 $m=0$,则 $\alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}$

$\therefore \sin\alpha=0, \cos\alpha=(-1)^k$.

2. 解:$\because \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{49}{25}$

$\therefore \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{49}{25}$

$\therefore 1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{49}{25}$

$\therefore \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$

$\therefore \sin\alpha$、$\cos\alpha$ 是方程 $x^2-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{12}{25}=0$ 的两个根.

由 $x^2-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{12}{25}=0$

解得 $x=\dfrac{3}{5}$ 或 $x=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}\end{cases}$.

3. 解:$\because \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{11}{16}$.

4. 解:(1)$\because \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=|\sin\alpha|$

$\therefore \sin\alpha\geqslant0$

$\because \alpha\in(0,2\pi)$，$\therefore \{\alpha|0<\alpha\leqslant\pi\}$

(2)$\because \cos2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-|\cos2\alpha|$

$\therefore \cos2\alpha\leqslant 0$

$\because \alpha\in(0,2\pi)$

$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$

$k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}+k\pi$

取 $k=0,1$ **得**

$\{\alpha|\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$ **或** $\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{7\pi}{4}\}$.

5. **解**：$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=x$，**则有**

$(x-1)\sin\alpha+(x+1)\cos\alpha=0$ ①

又 $\sin\alpha+3\cos\alpha=2$ ②

由①、②**解得** $\sin\alpha=\frac{x+1}{2-x}$，$\cos\alpha=\frac{1-x}{2-x}$.

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore (\frac{x+1}{2-x})^2+(\frac{1-x}{2-x})^2=1$

整理得 $x^2+4x-2=0$

解得 $x=-2\pm\sqrt{6}$.

$\therefore \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-2\pm\sqrt{6}$.

4.4 同角三角函数的基本关系式（第二次作业）

一、1. A 2. B 3. A 4. B 5. C

二、1. 1 2. 44.5 3. 1 4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. 0

三、1. **证明**：(1)**左边**$=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\cos^2\alpha=$**右边**

$\therefore \frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha$

(2)**左边**$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

右边$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\because$ **左边**$=$**右边**

$\therefore \frac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$.

2. **解**：$\because \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$

$\therefore \tan\alpha=1-\tan\alpha$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$

又 $\frac{7}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{7\sin^2\alpha+7\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{7\tan^2\alpha+7}{\tan^2\alpha+\tan\alpha+1}$

$=\frac{7\times(\frac{1}{2})^2+7}{(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1}$

$=\frac{7+4\times7}{1+2+4}=\frac{35}{7}=5$

3. **证明**：**左边**$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\csc\alpha+\csc^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sec\alpha+\sec^2\alpha$

$=5+\csc^2\alpha+\sec^2\alpha$

$=5+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$=5+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=5+1+\cot^2\alpha+1+\tan^2\alpha$

$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+7=$右边.

4. 解:设 $Rt\triangle ABC$ 的两个锐角分别为 A、B,

则 $A+B=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos A=\sin B$

$\because 4x^2-2(m+1)x+m=0$

$\Delta=4(m+1)^2-16m\geqslant 0$

即 $4(m-1)^2\geqslant 0$

$\therefore m\in\mathbf{R}$,方程总有两个实根

又 $\begin{cases}\cos A+\cos B=\sin B+\cos B=\frac{m+1}{2} & ①\\ \cos A\cdot\cos B=\sin B\cdot\cos B=\frac{m}{4} & ②\end{cases}$

$\therefore$ 由①、②及 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ 得

$1+\frac{m}{2}=(\frac{m+1}{2})^2$

解得 $m=\pm\sqrt{3}$

当 $m=\sqrt{3}$ 时,$\cos A+\cos B=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>0$,$\cos A\cos B=\frac{\sqrt{3}}{4}>0$ 符合题意;

当 $m=-\sqrt{3}$ 时,$\cos A+\cos B=\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$,与 A、B 是锐角矛盾,舍去.

$\therefore m=\sqrt{3}$.

5. 解:$\because \sin^6x+\cos^6x$

$=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)$

$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-3\sin^2x\cos^2x$

$=1-3\sin^2x\cos^2x$

$\because \sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$

$=1-2\sin^2x\cos^2x$

$\therefore f(x)=a(1-3\sin^2x\cos^2x)+b(1-2\sin^2x\cos^2x)+6\sin^2x\cos^2x$

$=a+b+(b-3a-2b)\sin^2x\cos^2x$

由题意可得

$\begin{cases}a+b=1 & ①\\ 6-3a-2b=0 & ②\end{cases}$

解①、②得 $\begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}$

$\therefore$ 当 $a=4,b=-3$ 时,$f(x)$ 的值与 x 无关,且 $f(x)=1$.

4.5 正弦、余弦的诱导公式(第一次作业)

一、1. D 2. D 3. C 4. C 5. B

二、1. $\frac{3}{5}$ 2. $-2\sqrt{2}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\frac{3}{10}$

5. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、1. 解:设 $\alpha+\frac{\pi}{4}=t$,所以

$\frac{\sin(\frac{5\pi}{4}+\alpha)}{\cos(\frac{9\pi}{4}+\alpha)}\cdot\cos(\frac{7\pi}{4}-\alpha)$

$=\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha)}{\cos(2\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha)}\cdot\cos[2\pi-(\frac{\pi}{4}+\alpha)]$

$=\frac{\sin(\pi+t)}{\cos(2\pi+t)}\cdot\cos(2\pi-t)$

$=\frac{-\sin t}{\cot t}\cdot\cos t$

$=-\sin t=-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-a$.

2. 解:$\because 1-2\sin160^\circ\cos340^\circ$

$=1-2\sin(180^\circ-20^\circ)\cos(360^\circ-20^\circ)$

$=1-2\sin20^\circ\cos20^\circ$

$=(\cos20^\circ-\sin20^\circ)^2$

$\because 1-\cos^2 20^\circ=\sin^2 20^\circ$

$\because \cos200^\circ=\cos(180^\circ+20^\circ)=-\cos20^\circ$

$\because \cos20^\circ>\sin20^\circ$

$\therefore$ 原式 $=\frac{\sqrt{(\cos20^\circ-\sin20^\circ)^2}}{-\cos20^\circ+\sqrt{\sin^2 20^\circ}}$

$=\frac{\cos20^\circ-\sin20^\circ}{\sin20^\circ-\cos20^\circ}=-1$.

3. 解:$\frac{\cos(\pi-\theta)}{\cos\theta[\cos(\pi-\theta)-1]}+\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)(\cos\theta-1)}$

$=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta(-\cos\theta-1)}+\frac{\cos\theta}{-\cos\theta(\cos\theta-1)}$

$=\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}$

$=\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=6.$

4. **解**:∵$\begin{cases}\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\sin\beta & ①\\ \sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta) & ②\end{cases}$

∴$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta & ③\\ \sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta & ④\end{cases}$

$③^2+④^2$,**得**

$\sin^2\alpha+3(1-\sin^2\alpha)=2$

∴$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$

∴$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵$0<\alpha<\pi$,∴$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴$\alpha=\frac{\pi}{4}$ **或** $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

将 $\alpha=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$**代入③得**

$\sin\beta=\frac{1}{2}$

∵$0<\beta<\pi$,

∴$\beta=\frac{\pi}{6}$ **或** $\beta=\frac{5\pi}{6}$.

5. **解**:∵$\sin(\pi-\alpha)\cos(-8\pi-\alpha)=\frac{60}{169}$

∴$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{60}{169}$

∴$\pm2\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{120}{169}$

∴$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{289}{169}$

$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}$

∴$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{289}{169}$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{49}{169}$

∵$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

∴$\sin\alpha>\cos\alpha>0$

∴$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{17}{13} & ①\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{13} & ②\end{cases}$

解此方程组得

$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{12}{13}\\ \cos\alpha=\frac{5}{13}\end{cases}.$

4.5 正弦、余弦的诱导公式(第二次作业)

一、1. A 2. A 3. B 4. B 5. D

二、1. $1-\sin\theta$ 2. $\frac{3}{10}$ 3. $-\frac{1}{m}$ 4. -1 5. 1

三、1. **证明:左边**$=\frac{-\tan\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\tan\alpha=$**右边**

2. **解:原式**$=\sin[k\pi+(-1)^{k-1}\alpha]\cos[k\pi-(-1)^{k-1}\alpha]\cdot\tan[k\pi+(-1)^{k-1}\alpha]$

$=\sin^2[k\pi+(-1)^{k-1}\alpha]\cdot\frac{\cos[k\pi-(-1)^{k-1}\alpha]}{\cos[k\pi+(-1)^{k-1}\alpha]}$

当 k **为偶数时,原式**$=\sin^2\alpha$

当 k **为奇数时,原式**$=\sin^2\alpha$

∴**原式**$=\sin^2\alpha$.

3. **解**:∵$2\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)=1$

∴$2\sin\alpha+\cos\alpha=1$

∴$2\sin\alpha=1-\cos\alpha$

∴$4\sin^2\alpha=1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha$,

∴$4(1-\cos^2\alpha)=1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha$

∴$5\cos^2\alpha-2\cos\alpha-3=0$.

∴$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ **或** $\cos\alpha=1$

∵$0<\alpha<\pi$,∴$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

∴$\sin\alpha=\frac{4}{5}$

∴$\cos(2\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{7}{5}$

4. **解法一:由题意可知**

$A(3k,-2k),P(-3k,-2k),Q(-3k,2k)$

$\therefore\alpha$ 与 β 的终边关于 x 轴对称 $\alpha=2k\pi-\beta,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore\sin\alpha+\sin\beta=\sin(2k\pi-\beta)+\sin\beta$

$=-\sin\beta+\sin\beta=0.$

解法二：$\because A(3k,-2k),P(-3k,-2k),$

$Q(-3k,2k)$

(1)$k>0$ 时

$r=\sqrt{(3k)^2+(-2k)^2}=\sqrt{13}k$

$\sin\alpha=\dfrac{-2k}{\sqrt{13}k}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin\beta=\dfrac{2k}{\sqrt{13}k}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore\sin\alpha+\sin\beta=0$

(2)$k<0$ 时

$r=\sqrt{(3k)^2+(-2k)^2}=-\sqrt{13}k$

$\sin\alpha=\dfrac{-2k}{-\sqrt{13}k}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin\beta=\dfrac{2k}{-\sqrt{13}k}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore\sin\alpha+\sin\beta=0$

由(1),(2)可知 $\sin\alpha+\sin\beta=0.$

5. **解：**$\because f(\pi-x)=-f(x)$

$\therefore f(-x)=-f(\pi+x)$

$=-f[2\pi-(\pi+x)]$

$=-f(\pi-\alpha)$

$=f(x)$

$\therefore f(-x)=f(x)$

$\therefore f(2\pi+x)=f[2\pi-(-x)]$

$=f(-x)$

$=f(x)$

$\therefore f(\dfrac{59\pi}{11})=f(4\pi+\dfrac{15\pi}{11})$

$=f(\dfrac{15\pi}{11})$

$=f(\pi+\dfrac{4\pi}{11})$

$=-f(-\dfrac{4\pi}{11})$

$=-f(\dfrac{4\pi}{11})$

$=-(\dfrac{4\pi}{11})^2$

$=-\dfrac{16}{121}\pi^2$

4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切（第一次作业）

一、1. C 2. C 3. B 4. A 5. A

二、1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $\dfrac{1}{7}$ 3. $\cos\alpha$ 4. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ 5. -1

三、1. **解：**$r_1=|OP|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$r_2=|OQ|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\quad\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\quad\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot(-\dfrac{2}{\sqrt{5}})-(-\dfrac{3}{5})\cdot(-\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

$=-\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

2. **解：**$\because\alpha$、β 为锐角

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$=-\dfrac{5}{\sqrt{50}}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

又 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$

$\therefore-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$

3. **解**：∵ $\begin{cases}\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{4} & ①\\ \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3} & ②\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{16} & ③\\ \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{9} & ④\end{cases}$

③+④**得**

$2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{9}$

∴ $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{263}{288}$

4. **解：原式** $=\dfrac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}-(\tan\alpha+\tan\beta)}{\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{(\tan\alpha+\tan\beta)\left(\dfrac{1}{1-\tan\alpha\tan\beta}-1\right)}{\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta\cdot\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}{\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta)$

5. **解**：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ ①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ ②

①+②**得**

$2\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{5}{6}$ ③

①-②**得**

$2\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$ ④

由③，④**得**

$\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$

∴ $\tan\alpha\cdot\cot\beta=5$

4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切（第二次作业）

一、1. C 2. C 3. A 4. C 5. B

二、1. $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ 2. $\cos y$ 3. $-\dfrac{16}{65}$ 4. $-\dfrac{1}{12}$ 5. -1

三、1. **解**：∵ $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$

∴ $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$，$\pi<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$

∵ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$

∴ $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{13}$

∵ $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$

∴ $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{5}$

∴ $\sin2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\dfrac{12}{13}+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{5}{13}=-\dfrac{56}{65}$

2. **解：**∵ α、β **为锐角**

∴ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

∴ $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$

∴ $\tan\beta=\tan[(\beta-\alpha)+\alpha]$

$=\dfrac{\tan(\beta-\alpha)+\tan\alpha}{1-\tan(\beta-\alpha)\tan\alpha}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{13}{9}$

∴ $\cos\beta=\dfrac{9}{\sqrt{9^2+13^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{250}}=\dfrac{9}{50}\sqrt{10}$

3. **证明**：∵ $2\cos\alpha=3\cos\beta$

∴ $2\cos[(\alpha+\beta)-\beta]=3\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$[\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta]$

$=3[\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha]$

∴ $\sin(\alpha+\beta)(2\sin\beta-3\sin\alpha)$

$=\cos(\alpha+\beta)(3\cos\alpha-2\cos\beta)$

$\therefore \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{3\cos\alpha-2\cos\beta}{2\sin\beta-3\sin\alpha}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{3\cos\alpha-2\cos\beta}{2\sin\beta-3\sin\alpha}$

4. **解：** $a=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$=\dfrac{b}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\therefore a-b=a\tan\alpha\tan\beta$

$\because \alpha$、β、$\alpha+\beta$ **均为锐角**.

$\therefore a>0,\tan\alpha>0,\tan\beta>0$

$\therefore a-b>0,\therefore a>b.$

5. **解：**$\because \begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}\\ \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\sin[(\alpha+\beta)-\beta]+\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{1}{4}\\ \cos[(\alpha+\beta)-\beta]+\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

展开后，整理可得

$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)-\cos(\alpha+\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\dfrac{1}{4}\\ \sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)+\cos(\alpha+\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

即$\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sin(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{4}\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{4}\sin(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{3}\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

解得$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{24}{25}\\ \cos(\alpha+\beta)=\dfrac{7}{25}\end{cases}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{24}{7}.$

4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切（第三次作业）

一、1. D 2. C 3. C 4. B 5. B

二、1. $\dfrac{\pi}{6}$ 2. $\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$ 3. 1 4. $\sqrt{3}$ 5. 2

三、1. **解：**$\because \cos(\alpha-\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha$

$=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos[(\alpha-\beta)-\alpha]=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos(-\beta)=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos\beta=-\dfrac{4}{5}$

$\because \beta$ **是第二象限的角**

$\therefore \sin\beta=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \cot\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}=\dfrac{-\dfrac{4}{5}}{\dfrac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

2. **解：**$\because \tan12^\circ\tan18^\circ+\tan12^\circ\tan60^\circ+\tan18^\circ\tan60^\circ$
$=\tan12^\circ\tan18^\circ+\tan60^\circ(\tan12^\circ+\tan18^\circ)$

而 $\tan30^\circ=\tan(12^\circ+18^\circ)=\dfrac{\tan12^\circ+\tan18^\circ}{1-\tan12^\circ\tan18}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\tan12^\circ+\tan18^\circ}{1-\tan12^\circ\tan18^\circ}$

$\therefore 1-\tan12^\circ\tan18^\circ=\sqrt{3}(\tan12^\circ+\tan18^\circ)$

$\therefore 1=\tan12^\circ+\tan18^\circ+\sqrt{3}(\tan12^\circ+\tan18^\circ)$

$\therefore \tan12^\circ\tan18^\circ+\tan12^\circ\tan60^\circ+\tan18^\circ\tan60^\circ=1.$

3. **解：**$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+2\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$

$=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+2(\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3})$

$=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sqrt{3}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-\sqrt{6}\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$

$=2\sqrt{2}[\dfrac{1}{2}\cdot\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})]$

$=2\sqrt{2}\sin[(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{\pi}{3}]$

$=2\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{12})$

4. **解：**$\because \tan\alpha,\tan\beta$ **是方程** $mx^2+(2m-3)x+(m-2)=0$ **的根**.

$\therefore \begin{cases} \tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{3-2m}{m} \\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{m-2}{m} \end{cases}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{3-2m}{m}}{1-\dfrac{m-2}{m}}$

$=\dfrac{3}{2}-m.$

又 $\Delta=(2m-3)^2-4m(m-2)\geqslant 0$,**且** $m\neq 0$

$\therefore m\leqslant\dfrac{9}{4}$ **且** $m\neq 0$

$\therefore m$ **的最大值为**$\dfrac{9}{4}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)$**的最小值为**$-\dfrac{3}{4}$.

5. **证明:**$\because \sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$

$\therefore \sin[(\alpha+\beta)-\beta]=A\sin(\alpha+\beta)$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=A\sin(\alpha+\beta)$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-A)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$.

4.6　两角和与差的正弦、余弦、正切（第四次作业）

一、1.. B　2. C　3. C　4. D　5. C

二、1. 0　2. $>$　3. $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{10}$　4. $\dfrac{\pi}{3}$

5. $\sqrt{3}-2$

三、1. **解:设**$\dfrac{a}{b}=t$,**则** $a=bt$

由题意可得

$\dfrac{bt\sin\dfrac{\pi}{5}+b\cos\dfrac{\pi}{5}}{bt\cos\dfrac{\pi}{5}-b\sin\dfrac{\pi}{5}}=\tan(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{5})$

$\therefore \dfrac{t\tan\dfrac{\pi}{5}+1}{t-\tan\dfrac{\pi}{5}}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{5}}{1-\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{5}}$

$\therefore \dfrac{t\tan\dfrac{\pi}{5}+1}{t-\tan\dfrac{\pi}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\dfrac{\pi}{5}}{1-\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{5}}$

$\therefore \dfrac{\dfrac{1}{t}+\tan\dfrac{\pi}{5}}{1-\dfrac{1}{t}\tan\dfrac{\pi}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\dfrac{\pi}{5}}{1-\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{5}}$

$\therefore t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. **解:由**$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\gamma=\sin\beta \\ \cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha \end{cases}$**得**

$\begin{cases} \sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha & (1) \\ \cos\gamma=\cos\alpha-\cos\beta & (2) \end{cases}$

两式平方相加得

$2-2\sin\alpha\cdot\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta=1$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$

$\therefore -\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$

又 $\sin\beta-\sin\alpha=\sin\gamma>0$

$\therefore \sin\beta>\sin\alpha$

$\therefore \beta>\alpha$

$\therefore \alpha-\beta<0$

$\therefore \alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{3}$.

3. **解:由题意得**

$\begin{cases} \tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3} \\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=4 \end{cases}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$

$\because \alpha、\beta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

$\therefore -\pi<\alpha+\beta<\pi$

$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{2\pi}{3}$**或** $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

$\because \tan\alpha+\tan\beta<0,\tan\alpha\cdot\tan\beta>0$

$\therefore \tan\alpha<0,\tan\beta<0$

$\therefore -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0,-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$

$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{2\pi}{3}$.

4. **解：由题意，可得**

$$\begin{cases}\tan^2\alpha-4p\tan\alpha-2=1\\ \tan^2\beta-4p\tan\beta-2=1\end{cases}$$

$\therefore \tan\alpha\cdot\tan\beta$ **是方程** $x^2-4px-3=0$ **的两根**

$$\therefore\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=4p\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=-3\end{cases}$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4p}{1+3}=p.$$

5. **证明：**$\because \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$\therefore \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)}-1$$

$$\therefore \tan(k-1)x\cdot\tan kx=\frac{\tan kx-\tan(k-1)x}{\tan x}-1$$

$\therefore \tan x\cdot\tan 2x+\tan 2x\cdot\tan 3x+\cdots+\tan(n-1)x\tan nx$

$$=\left(\frac{\tan 2x-\tan x}{\tan x}-1\right)+\left(\frac{\tan 3x-\tan 2x}{\tan x}-1\right)+\cdots+\left(\frac{\tan nx-\tan(n-1)x}{\tan x}-1\right)$$

$$=\frac{\tan nx-\tan x}{\tan x}-(n-1)$$

$$=\frac{\tan nx}{\tan x}-n.$$

4.7 二倍角的正弦、余弦、正切（第一次作业）

一、1. B　2. C　3. B　4. D　5. D

二、1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　3. 2　4. $\frac{1}{2}$　5. $\frac{1}{2}$

三、1. **解：**

原式$=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)+\tan\alpha(1+\tan\alpha)}{(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha.$$

2. **解：**$\sin 2\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\cos 2\beta$$

$$=2\sin^2\beta-1$$

$$=2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-1$$

$$=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}-1$$

$$=2-\sqrt{5}.$$

3. **解：**$\because \alpha$ **是第二象限角**，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$$\therefore \cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$$

$$\sin\left(\frac{37}{6}\pi-2\alpha\right)=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{25}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$=\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$$

4. **解：**$\because \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3$

$$\therefore \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin 2\theta-2\cos^2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\times\frac{1}{2}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=-\frac{4}{5}.$$

5. **证明：**$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[\cos(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2})+\cos(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2})+\cos C]$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}]$

$=1-\frac{1}{2}(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2})$

$=1-\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$

$=1-\sin\frac{C}{2}(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$

$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

4.7 二倍角的正弦、余弦、正切（第二次作业）

一、1. C 2. B 3. A 4. D 5. D

二、1. 4 2. $3+2\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{5}-2$ 4. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

5. $-\frac{4}{5}$

三、1. **解**：$\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$

$=\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{2\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}$

$=\frac{2\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{4\sin20^\circ}$

$=\frac{2\sin80^\circ\cos80^\circ}{8\sin20^\circ}$

$=\frac{\sin160^\circ}{8\sin20^\circ}$

$=\frac{\sin20^\circ}{8\sin20^\circ}$

$=\frac{1}{8}$.

2. **解**：**原式**$=\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos80^\circ\cos40^\circ$

$=\sin^2 10^\circ+\cos40^\circ(\cos40^\circ+\cos80^\circ)$

$=\sin^2 10^\circ+\cos40^\circ[\cos(60^\circ-20^\circ)+\cos(60^\circ+20^\circ)]$

$=\sin^2 10^\circ+\cos40^\circ\cdot 2\cos60^\circ\cdot\cos20^\circ$

$=\sin^2 10^\circ+\cos40^\circ\cos20^\circ$

$=\sin^2 10^\circ+\cos(30^\circ+10^\circ)\cos(30^\circ-10^\circ)$

$=\sin^2 10^\circ+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ-\frac{1}{2}\sin10^\circ)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ+\frac{1}{2}\sin10^\circ)$

$=\sin^2 10^\circ+\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ-\frac{1}{4}\sin^2 10^\circ$

$=\frac{3}{4}\sin^2 10^\circ+\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ$

$=\frac{3}{4}$.

3. **解**：**原式**$=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+4\sin20^\circ$

$=\frac{\sin20^\circ+4\sin20^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\frac{\sin20^\circ+2\sin40^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\frac{\sin(30^\circ-10^\circ)+\sin(30^\circ+10^\circ)+\sin40^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\frac{2\sin^2 20^\circ\cos10^\circ+\sin40^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\frac{\sin80^\circ+\sin40^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\frac{\sin(60^\circ+20^\circ)+\sin(60^\circ-20^\circ)}{\cos20^\circ}$

$=\frac{2\sin60^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}$

$=\sqrt{3}$.

4. **解**：$\because \sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$