清华附中同步辅导与测试丛书

高 三 数 学

钱露蔓　吴淑华
徐重远　冯　渤　编

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书按现行《全日制中学数学大纲》的要求, 把高中阶段的内容“代数”、“三角”、“立体几何”、“解析几何”按顺序作为第一、二、三、四部分, 共 13 章。每章包括“知识概述”、“典型题解”、“单元测试题”。第五部分“专题讲座”中包括“分类讨论”、“数形结合与转化”、“最值问题”、“开放型问题的解法”。第六部分设计了 8 套综合练习。单元测试题和综合练习都有答案和提示。

在编写过程中, 作者一方面严格按照教学大纲要求, 针对教学中的重点、难点予以说明和分析, 力求做到主次分明, 详略得当, 综合性强; 另一方面注意常用的数学思想方法的渗透, 使学生在运用知识的过程中提高各种能力。

本书由清华附中数学组高级教师钱露蔓、吴淑华、徐重远和冯渤编写。

读者对象: 中学师生。

图书在版编目(CIP)数据

高三数学/钱露蔓等编. —北京: 清华大学出版社, 1995
(清华附中同步辅导与测试丛书)
ISBN 7-302-02020-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 钱… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19584 号

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学校内, 邮编 100084)
印刷者: 昌平环球印刷厂
发行者: 新华书店总店北京科技发行所
开　本: 787×1092 1/16　印张: 21　字数: 498 千字
版　次: 1996 年 3 月第 1 版　1996 年 3 月第 1 次印刷
书　号: ISBN 7-302-02020-5/G·108
印　数: 0001—5000
定　价: 19.50 元

序

我校在清华大学出版社的协助下,编写了这套《清华附中辅导与测试丛书》,以便在今后供我校高中年级使用。

这套书包括数学、语文、物理、化学、英语 5 个学科(共 15 分册),是我校教师在长期教学实践中积累起来的丰富的教学经验的结晶,体现了清华附中"为学、健体、做人"的办学思想及"少、精、严、活"的教学原则。

每本书的顺序与教科书同步,各单元一般由知识概要、典型题解、练习题等部分组成。书末附参考答案及解题指南。

在知识概要部分对有关概念进行归纳、对比,以简明的形式——如图表等将其联系,便于学生加强对重点、难点的理解,并引导学生掌握好知识的基本规律。

典型题解是精选或编写的典型例题,重在给出解题思路和解题技巧,突出解法。

书中给出的练习题是本校教师多年教学中积累、精选、保留的练习题,题目不多,但颇具典型性和代表性,有些题目难度较大,较灵活,重在培养学生重要的、较高层次的思维能力。

我们希望这套书的出版,不仅适合我校学生各年段学习的需要,而且能获得广大高中生的欢迎。由于编写时间仓促,难免有疏漏之处,恳切期望读者批评指正。

清华大学附中

1995 年 7 月

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　三　　角

第三部分　立体几何

第四部分　解析几何

第五部分　专题讲座

第六部分　综合练习

第一部分　代数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

知识概述

一、集合

1. **集合的概念**

把一些确定的对象看作一个整体就形成了一个集合.集合里的各个对象叫做集合的元素. a **是集合** A **的元素表示为** $a \in A$, a **不是集合** A **的元素表示为** $a \notin A$.

集合中的元素是确定的、互异的、无序的.

2. **集合的表示**

列举法、描述法及图示法.

3. **集合与集合的关系**

子集、真子集、集合相等(略).

对于任一个集合 A, **规定**　　A.

对于集合 A, B, C **有:如果** A　B, B　C, **那么** A　C; **如果** A　B, B　C, **那么** A　C.

交集: $A \cap B = \{x | x \in A$ **且** $r \in B\}$

对于任何集合 A, B **有**:

$$A \cap A = A,\ A \cap \quad = \quad,\ A \cap B = B \cap A$$

并集: $A \cup B = \{x | x \in A$ **或** $x \in B\}$.

对于任何集合 A, B **有**:

$$A \cup A = A,\ A \cup \quad = A,\ A \cup B = B \cup A$$

全集(略).

补集: $A = \{x | x \in I$ **且** $x \notin A\}$.

对于任何集合 A, **有**:

$$A \cup A = I,\ A \cap A = \quad,\ A = A.$$

二、映射与函数概念

1. **映射**

设 A, B **是两个集合,如果按照某种对应法则** f, **对于集合** A **中的任何一个元素,在集合** B **中都有唯一的元素和它对应,那么这样的对应(包括集合** A、B, **以及从** A **到** B **的对应法则** f**)叫做集合** A **到集合** B **的映射,记作** $f: A \to B$.

2. **函数**

从映射的观点看，函数是从集合 A 到集合 B 的一个映射（其中 A、B 是非空的数集），并且 B 的每一个元素都有原象.

从函数的定义可知，函数概念包含有三个要素：定义域、值域及从定义域到值域的对应法则.

3. 反函数

对于函数 $y=f(x)$ 的每一个确定的值 $f(x_0)=y_0$，如果自变量 x 都有唯一的值 x_0 和 y_0 对应，那么就可得到一个以 y 为自变量，以对应的 x 值为函数值的函数，这个函数就叫做原来函数的反函数. 记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数的定义域与值域分别是原来函数的值域与定义域.

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

三、函数的性质

1. 函数的奇偶性

对于函数 $y=f(x)$，如果取函数定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数叫奇函数；对于函数 $y=f(x)$，如果取函数定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数叫偶函数.

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

2. 函数的增减性

对于函数 $y=f(x)$，如果在区间 (a,b) 内取任意两个 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是增（减）函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，则称函数在这一区间上具有单调性，这一区间叫单调区间.

四、幂函数

1. 函数式与定义域

函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做 x 的幂函数，其中 α 是常数，$\alpha\in R$. 高中阶段，我们只讨论 α 是有理数 n 的情况.

幂函数 $y=x^n(n\in Q)$ 的定义域是使 x^n 有意义的所有实数 x 的集合.

2. 几个常见幂函数的图象

$n>0$ 时，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象（略）.

$n<0$ 时，$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图象（略）.

3. 性质

当 $n>0$ 时，图象过 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，在 $[0,+\infty)$ 上是增函数；当 $n<0$ 时，图象过 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且曲线以 x 轴、y 轴为渐近线.

五、指数函数

1. 函数式

函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 叫做 x 的指数函数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$.

2. 图象与性质

指数函数 $y=a^x$ 的图象(略).

指数函数的性质：对任何 $x\in R$，总有 $y>0$，

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

当 $a>1$ 时，

$$a^x \begin{cases} >1 & (x>0); \\ =1 & (x=0); \\ <1 & (x<0). \end{cases}$$

当 $0<a<1$ 时，

$$a^x \begin{cases} <1 & (x>0); \\ =1 & (x=0); \\ >1 & (x<0). \end{cases}$$

六、对数函数

1. 函数式

函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 叫做 x 的对数函数，其定义域是 R^+，值域是 R.

2. 对数函数 $y=\log_a x$ 的图象(略)

3. 对数函数的性质

(1) 图象在 y 轴右侧.

(2) 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 在 R^+ 上是减函数.

(3) 当 $a>1$ 时，

$$\log_a x \begin{cases} >0 & (x>1); \\ =0 & (x=1); \\ <0 & (0<x<1). \end{cases}$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\log_a x \begin{cases} <0 & (x>1); \\ =0 & (x=1); \\ >0 & (0<x<1). \end{cases}$$

七、指数方程、对数方程

在指数里含有未知数的方程叫做指数方程；在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程.

常见类型有 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$，$\log_a f(x)=\log_a g(x)$，$a^{f(x)}=b^{g(x)}$，$f(a^{g(x)})=0$ 和 $f(\log_a g(x))=0$ 等.

基本思路是将其转化为代数方程求解.注意解对数方程时要验根.

典型题解

例 1　(1) 若 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$, 且 $A\cap B=\{2,5\}$(1)求实数 a 的值及 $A\cup B$.

(2) 若 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$, $B=\{0,|x|,y\}$, 且 $A=B$, 求 x, y.

解: (1) $\because A\cap B=\{2,5\}$, $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$,

$\therefore$
$$a^3-2a^2-a+7=5.$$
解得: $a=-1,1,2$.

当 $a=-1$ 时, $A\cap B=\{2,5,4\}$, 与已知矛盾, $\therefore a=-1$ 舍去.

当 $a=1$ 时, $A\cap B=\{4\}$, 与已知矛盾, $\therefore a=1$ 舍去.

易验证: $a=2$ 适合条件, $\therefore a=2$, 此时, $A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$.

(2) $\because A=B$, 又 $xy>0$, $\therefore \lg(xy)=0$, $xy=1$.

若 $x=|x|$, 则 $x>0$ 且 $xy=y$, $\therefore x=y=xy=1$, 与集合元素的互异性矛盾.

$\therefore x=y$ 且 $xy=|x|$, 又 $xy=1$,

$\therefore$
$$x=-1,y=-1.$$
此时, $A=B=\{0,1,-1\}$,

$\therefore$
$$x=-1,y=-1.$$

说明: 在集合的运算中必须明确掌握元素的确定性, 互异性和无序性.

例 2　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$, $a,b\in R$, 集合 $A=\{x|x=f(x),x\in R\}$, 集合 $B=\{x|x=f[f(x)],x\in R\}$, 如果集合 $A=\{-1,3\}$, 求集合 B; 如果集合 $A=\{2\}$, 求 $A\cap B$.

解: $\because A=\{-1,3\}$,

$\therefore$ 方程 $x=x^2+ax+b$ 的两根为 $-1,3$,

$\therefore$
$$a=-1,b=-3,$$
$$f(x)=x^2-x-3,$$

方程 $x=f[f(x)]$ 等价于
$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x,$$
即
$$(x^2-x-3)^2-x^2=0.$$
$$x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3},\ x_3=-1,x_4=3.$$
$\therefore$
$$B=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}.$$

如果 $A=\{2\}$, 则 $f(2)=2$,

$\therefore$
$$f[f(2)]=f(2)=2,2\in B,$$
$$A\cap B=\{2\}.$$

说明: 方程变形时充分利用了 $A\subseteq B$ 的关系. $\because$ 对任意的 $x\in A$ 有 $x=f(x)$, $\therefore f[f(x)]=f(x)=x$, $x\in B$, $A\subseteq B$.

例 3　函数 $y=\sqrt{(2+x)(3-x)}$ 的定义域为集合 A, 函数 $y=\lg(kx^2+4x+k+3)$ 的

定义域为集合 B, 当 A　B 时, 求实数 k 的取值范围.

解: 由 $(2+x)(3-x)\geq 0$ 得

$$-2\leq x\leq 3,$$

∴
$$A=[-2,3].$$

$$B=\{x | kx^2+4x+k+3>0, k\in R\}.$$

令
$$f(x)=kx^2+4x+k+3, k\in R,$$

当 $k\geq 0$ 时, 显然 Aē B;

当 $k<0$ 时, 设 x_1, x_2 为方程 $f(x)=0$ 的两个根且 $x_1<x_2$, ∴ $B=(x_1,x_2)$.

∵ A　B, ∴ $-2\leq x_1, x_2\leq 3$, ∴满足的条件由下列式组确定:

$$\begin{cases} k<0, \\ \Delta=4^2-4k(k+3)>0, \\ -2<-\dfrac{2}{k}<3, \\ f(-2)=5k-5\leq 0, \\ f(3)=10k+15\leq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} k<0, \\ -4<k<1, \\ k<-\dfrac{2}{3}, \\ k\leq 1, \\ k\leq -\dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

∴
$$-4<k\leq -\frac{3}{2}.$$

说明: 利用数轴分析, 可使集合运算变得鲜明直观. 涉及四个二次式问题时, 充分利用二次函数图象及判别式求解, 为常用解题方法.

熟练掌握二次函数的图象和性质, 提高综合运用二次函数的图象和性质的能力, 应充分加以注意.

例 4　设 $f(x)=x^2-2ax+2$, 当 $x\in[-1,+\infty)$ 时有 $f(x)\geq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解: 设 $F(x)=f(x)-a=x^2-2ax+2-a$, 则问题转化为: 当 $x\in[-1,+\infty)$ 时, $F(x)\geq 0$ 恒成立.

(1) 若 $A=4(a-1)(a+2)\geq 0$ 时, 可知 $F(x)\geq 0$ 的充分必要条件是:

$$\begin{cases} (a-1)(a+2)\geq 0, \\ F(-1)\geq 0, \\ -\dfrac{-2a}{2}\leq -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq -2 \text{ 或 } a\geq 1, \\ a\geq -3, \\ a\leq -1; \end{cases}$$

得
$$-3\leq a\leq -2.$$

(2) 若 $A=4(a-1)(a+2)>0$ 时, 那么 $-2<a<1$ 时, 对一切 $x\in[-1,+\infty)$, 总有 $F(x)>0$ 成立.

综上: $a\in[-3,1]$.

说明: 证明或求解恒成立的二次不等式可转化为二次函数的性质和图象来研究分析, 从而获解.

例 5　求函数 $f(x)=\sin x(a-\sin x)$ 的最大值 $g(a)$, 并作函数 $g(a)$ 的图象.

解:
$$f(x)=-\sin^2 x+a\sin x$$

$$=-\left(\sin x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$$

(1) 当$\frac{a}{2}\leq -1$,即 $a\leq -2$ 时,

$$[f(x)]_{\max}=-\left(-1-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}=-1-a.$$

(2) 当$-1<\frac{a}{2}<1$,即$-2<a<2$ 时,

$$[f(x)]_{\max}=\frac{a^2}{4}.$$

(3) 当$\frac{a}{2}\geq 1$,即 $a\geq 2$ 时,

$$[f(x)]_{\max}=-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}=-1+a$$

$$g(a)=\begin{cases}-a-1 & (a\leq -2);\\ \frac{a^2}{4} & (-2<a<2);\\ a-1 & (a\geq 2).\end{cases}$$

$g(a)$的图象略.

说明: 求某一闭区间上含字母参数的二次函数的最值,由配方法,综合二次函数图形加以分析,讨论能一目了然.

幂函数、指数函数、对数函数及其复合函数的简单综合问题应能够加以掌握.

例 6 设 $f(x)=a^{\sin^4\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

(1) 判断 $f(x)$的奇偶性;

(2) 求 $f(x)$的单调区间;

(3) 求 $f(x)$的最大值和最小值.

解:

$$f(x)=a^{\sin^4\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=a^{-\frac{1}{4}\sin^2 x}$$

(1) $f(x)$的定义域为 $x\in R$,

∵ $$f(-x)=a^{-\frac{1}{4}\sin^2(-x)}=a^{-\frac{1}{4}\sin^2 x}=f(x),$$

∴ $f(x)$为偶函数.

(2) 当 $a>1$ 时,设 $x_1,x_2\in\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right],(k\in Z)$,则

$$-\frac{1}{4}\sin^2 x_1<-\frac{1}{4}\sin^2 x_2,$$

∴ $f(x_1)<f(x_2)$, $f(x)$在$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in Z)$上单调递增. $f(x)$的单调递增区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$. 同理可知 $f(x)$单调递减区间$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in Z)$.

当 $0<a<1$ 时,

$f(x)$单调递增区间$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,单调递减区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in Z)$.

(3) 当 $a>1$ 时,

$$x=k\pi(k\in Z),f(x)_{max}=1;$$

$$x=k\pi\ \frac{\pi}{2}(k\in Z)\ f(x)_{min}=a^{-\frac{1}{4}}.$$

当 $0<a<1$ 时,

$$f(x)_{max}=a^{-\frac{1}{4}},\ f(x)_{min}=1.$$

说明: 对于复合函数的单调性, 应能加以讨论判定. 指数函数、对数函数当底数情况不确定时, 应分情况加以讨论.

例 7　在坐标平面上, 已知曲线 $f(x)=\log_2(x+1)$, 当点 (x,y) 满足 $y=f(x)$ 时, 点 $\frac{x}{3},\frac{y}{2}$ 在曲线 $y=g(x)$ 上,

(1) 求 $g(x)$ 表达式;

(2) 若 $g(x)-f(x)\geq 0$, 求 x 的范围;

(3) 在(2)中所求 x 的范围内, 求 $g(x)-f(x)$ 的最大值.

解: (1) 令 $x'=\frac{x}{3},y'=\frac{y}{2}$, 则 $x=3x',y=2y'$.

$y=\log_2(x+1)$, $\therefore 2y'=\log_2(3x'+1)$, $y'=\frac{1}{2}\log_2(3x'+1)$, 得

$$g(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1).$$

(2) $\because g(x)-f(x)\geq 0$, $\therefore \frac{1}{2}\log_2(3x+1)\geq\log_2(x+1)$, $3x+1\geq(x+1)^2$, $x(x-1)\leq 0$,

$$\therefore \qquad 0\leq x\leq 1.$$

(3) $g(x)-f(x)=\frac{1}{2}\log_2\frac{3x+1}{(x+1)^2}$, $x\in[0,1]$.

令 $u=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$, 则

$$ux^2+(2u-3)x+(u-1)=0.$$

$$\because \qquad u\neq 0,$$

由
$$\Delta=(2u-3)^2-4u(u-1)\geq 0, u\leq\frac{9}{8}.$$

由 $\frac{9}{8}=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$, 解得 $x=\frac{1}{3}$, 而 $x=\frac{1}{3}\in[0,1]$,

$$\therefore \qquad u_{max}=\frac{9}{8}.$$

又 $g(x)-f(x)=\frac{1}{2}\log_2 u$, 关于 u 递增,

$$\therefore \qquad [g(x)-f(x)]_{max}=\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{8}=\log_2 3-\frac{3}{2}.$$

对于函数的定义域、值域、对应法则、奇偶性、单调性及图象应熟练牢固掌握, 并能作到灵活处理与应用.

例 8 设 $f(x)$ 是定义域在 R 上以 2 为周期的函数, 对于 $k\in Z$, 用 I_k 表示区间 $(2k-1, 2k+1]$, 已知当 $x\in I_0$ 时, $f(x)=x^2$,

(1) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式;

(2) 对于自然数 k, 求集合 $M_k=\{a\,|\,$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不等实根$\}$.

解: (1) ∵ $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, ∴当 $k\in Z$ 时, $2k$ 也为 $f(x)$ 的周期.

当 $x\in I_k$ 时, $x-2k\in I_0$,

∴ $$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2.$$

(2) 方程 $(x-2k)^2=ax$ 在 I_k 上有两个不等实根, ∴函数 $y=ax$ 与 $y=(x-2k)^2$ 在 $(2k-1, 2k+1]$ 上应有两个不同的交点. 作出相应图形, 知 $0<a\le\frac{1}{2k+1}$,

∴ $$M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\le\frac{1}{2k+1}, k\in N\right\}$$

例 9 已知函数 $f(x)$ 满足: (1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$; (2) 值域是 $[-1, 1]$; (3) 在定义域 D 上递减; (4) $f(xy)=f(x)+f(y)$, 求证: $\frac{1}{4}\notin D$, 并解不等式 $f^{-1}(x)\cdot f^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\le\frac{1}{2}$.

解: 假设 $\frac{1}{4}\in D$, 则

$f\left(\frac{1}{4}\right)$ 有定义, 且 $f\left(\frac{1}{4}\right)\in[-1, 1]$, 但 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\notin[-1, 1]$ 矛盾, ∴ $\frac{1}{4}\notin D$.

由条件(2), (3) 知 $f(x)$ 的反函数存在且在定义域 $[-1, 1]$ 上递减.

设 $y_1=f^{-1}(x_1)$, $y_2=f^{-1}(x_2)$, 则

$$x_1=f(y_1),\ x_2=f(y_2),$$

即 $$x_1+x_2=f(y_1)+f(y_2)=f(y_1y_2),$$

$$y_1y_2=f^{-1}(x_1+x_2),$$

∴ $$f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)=f^{-1}(x_1+x_2).$$

∴ 原不等式等价于

$$f^{-1}\left(x+\frac{1}{1-x}\right)\le f^{-1}(1); \qquad x+\frac{1}{1-x}\ge 1;$$

$$-1\le x+\frac{1}{1-x}\le 1; \qquad -1\le x+\frac{1}{1-x}\le 1;$$

$$-1\le x\le 1; \qquad -1\le x\le 1;$$

$$-1\le\frac{1}{1-x}\le 1. \qquad -1\le\frac{1}{1-x}\le 1.$$

解得: $x=0$, ∴ 原不等式解集 $\{0\}$.

说明: 注意对函数、反函数 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 的深刻理解. 可以证明在其定义域上单调的函数必存在反函数且反函数与其原函数的单调性相同.

例 10 设函数 $f(x)=\log_2[(3-2k)x^2-2kx-k+1]$, 求使 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 而在 $(1, +\infty)$ 上单调递增的所有实数 k 组成的集合 A.

解：令 $g(x)=(3-2k)x^2-2kx-k+1$，由对数函数定义域知，在 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 上必须 $g(x)>0$.

∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，而在 $(1,+\infty)$ 上递增，∴ $3-2k>0$ 且 $g(x)$ 的图象的对称轴与 x 轴交点的横坐标必定属于 $[0,1]$. ∴ 问题等价于 k 应满足

$$3-2k>0;$$

$$0\le\frac{k}{3-2k}\le 1;$$

$$g(0)=-k+1\ge 0;$$

$$g(1)=-5k+4\ge 0.$$

解得 $0\le k\le\frac{4}{5}$,

∴ $$A=\left\{k\mid 0\le k\le\frac{4}{5}\right\}.$$

说明：据题意，结合函数图形，先直接列出控制参数 k 的混合组，然后求解得参数的取值范围.

例 11　已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 即是奇函数又是单调递减函数，如果当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\cos 2\theta-4t)+f(4t\sin\theta-3)\ge 0$ 都成立，求 t 的取值集合 M.

解：∵ $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(\cos 2\theta-4t)+f(4t\sin\theta-3)\ge 0$，$f(\cos 2\theta-4t)\ge -f(4t\sin\theta-3)$，$f(\cos 2\theta-4t)\ge f(3-4t\sin\theta)$. ∵ $f(x)$ 在 R 上为递减函数，∴ $\cos 2\theta-4t\le 3-4t\sin\theta$，$\sin^2\theta-2t\sin\theta+2t+1\ge 0$.

令 $$x=\sin\theta,\ x\in[0,1],$$

令 $$g(x)=x^2-2tx+2t+1$$
$$=(x-t)^2-t^2+2t+1\ge 0,$$

当 $x\in[0,1]$ 时恒成立，

∴ 在 $[0,1]$ 上，$g(x)$ 的最小值 $m\ge 0$ 恒成立.

(1) 当 $t<0$ 时，$m=g(0)=2t+1\ge 0$，

∴ $$-\frac{1}{2}\le t<0.$$

(2) 当 $0\le t\le 1$ 时，$m=g(t)=-t^2+2t+1\ge 0$，$1-\sqrt{2}\le t\le 1+\sqrt{2}$，

∴ $$0\le t\le 1.$$

(3) 当 $t>1$ 时，$m=g(1)=1-2t+2t+1=2\ge 0$，

∴ $$t>1,$$

综上 $$M=\left\{t\mid t\ge -\frac{1}{2}\right\}.$$

说明：设法将所求问题转化为已知不等式在集合 M 上恒成立，则利用极端原理测定参数应满足条件，常可使求解简捷.

建立目标函数，运用基本函数性质（或不等式）等手段求最值是必须掌握的技能.

例 12　已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c，且 $a+b+c=m$，$\angle BAC=\theta$，其中 m,θ 均为常数，求△ABC 的面积 S 的最大值.

解: 由已知及余弦定理得

$$m=a+b+c=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta}+b+c\geq\sqrt{2bc-2bc\cos\theta}+2\sqrt{bc}=2\sqrt{bc}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right),\quad \sqrt{bc}\leq\frac{m}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\therefore\qquad S=\frac{1}{2}bc\sin\theta\leq\frac{1}{2}\sin\theta\frac{m^2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{m^2\sin\theta}{8\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

当且仅当

$$b=c;$$

$$\sqrt{bc}=\frac{m}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$b=c=\frac{m}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)};$$

即

$$a=m-(b+c)=\frac{m\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}},$$

时等式成立,

$$\therefore\qquad S_{\max}=\frac{m^2\sin\theta}{8\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

说明: 利用重要不等式建立所求变量的控制不等式, 然后解此不等式求其取值范围或最值是一种常用方法.

例 13　已知当 $0\leq x\leq 1$ 时, 函数 $f(x)=px^2-2x+q$ 的最小值是 1, 求 p 与 q 的关系.

解: (1) **当 $p=0$ 时**, $f(x)=-2x+q$ **在** $x\in[0,1]$ **上递减**, $\therefore f(x)_{\min}=f(1)=q-2=1$

$$\therefore\qquad q=3$$

(2) **当 $p\neq 0$ 时,**

$$f(x)=p\left(x-\frac{1}{p}\right)^2+q-\frac{1}{p}$$

① **若** $p>0$, **则** $\frac{1}{p}>0$,

$\therefore$ **当** $\frac{1}{p}\leq 1$ **即** $p\geq 1$ **时**

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{p}\right)=q-\frac{1}{p}=1$$

当 $\frac{1}{p}>1$ **即** $0<p<1$ **时**

$$f(x)_{\min}=f(1)=p-2+q=1,$$

即

$$p+q=3.$$

② 若 $p<0$, 则 $\frac{1}{p}<0$,

$$\therefore \qquad f(x)_{\min}=f(1)=p-2+q=1,$$

即 $$p+q=3.$$

综上; 当 $p<1$ 时, $p+q=3$; 当 $p\geq 1$ 时, $q-\frac{1}{p}=1$.

说明: 这是一道含字母系数的一次、二次函数在给定区间上的最值问题. 注意对字母系数进行分类讨论.

例 14　设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $-ax^2+bx+c=0$ 分别有一非零根 x_1 和 x_2, 求证: 方程 $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ 必定有介于 x_1 与 x_2 之间的根.

分析: 用函数和数形结合的思想加以考虑, 设 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$, 若使 $f(x)$ 有一根 $x_0\in(x_1,x_2)$, 可转化为证明 $f(x_1)f(x_2)<0$, 写出 $f(x_1)f(x_2)$ 的表达式, 并注意 x_1, x_2 所满足的条件即可达到目的.

证: 由已知: $ax_1^2+bx_1+c=0$, $-ax_2^2+bx_2+c=0$.

设 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$, 则

$$f(x_1)f(x_2)=\frac{a}{2}x_1^2+bx_1+c \quad \frac{a}{2}x_2^2+bx_2+c$$

$$=(ax_1^2+bx_1+c)-\frac{a}{2}x_1^2 \cdot (-ax_2^2+bx_2+c)+\frac{3a}{2}x_2^2$$

$$=-\frac{a}{2}x_1^2 \quad \frac{3a}{2}x_2^2$$

$$=-\frac{3}{4}a^2x_1^2x_2^2<0, (\because a\neq 0, x_1\neq 0, x_2\neq 0),$$

$$\therefore \qquad \frac{a}{2}x^2+bx+c=0 \text{ 有一根 } x_0\in(x_1,x_2).$$

说明: 本题如果着眼于在根的表达式上考虑, 势必走上岔道, 难以得证.

例 15　设 a 是实常数, 考察对数方程, $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$ 的实根的个数.

解: 原方程等价于

$$\begin{cases} 1<x<3, \\ x<a, \\ (x-1)(3-x)=a-x. \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \begin{cases} 1<x<3, & (1\text{-}1\text{-}1) \\ x<a, & (1\text{-}1\text{-}2) \\ x^2-5x+(a+3)=0. & (1\text{-}1\text{-}3) \end{cases}$$

由 $\Delta=25-4(a+3)\geq 0$ 得

$$a\leq\frac{13}{4}.$$