图书在版编目(CIP)数据
高考通鉴——高三总复习3+X·数学卷(学生用书)/费建华,陈兴祥主编.—长沙:湖南大学出版社,2002
ISBN 7-81053-504-8
Ⅰ.高… Ⅱ.①费…②陈… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第044742号

高考通鉴——高三总复习3+X·数学卷(学生用书)

本册主编 费建华 陈兴祥

□责任编辑 厉 亚
□特约编辑 彭亚新
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 长沙市天心区井岗印刷厂

□开本 880×1230 16开 □印张 15.25 □字数 660千
□版次 2003年5月第2版 □2003年5月第1次印刷
□书号 ISBN 7-81053-504-8/G·123
□定价 19.00元

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高 考 通 鉴

[数学卷]

主 编:费建华　陈兴祥
编 撰:张杨柳　龚　勤
　　邹细斌　王湘阳

湖 南 大 学 出 版 社

目次









第一章　集合逻辑

考点解读与检测 1　集合 …… 1
考点解读与检测 2　简易逻辑 …… 3
考点解读与检测 3　充要条件 …… 5
单元检测 1 …… 7

第二章　函　数

考点解读与检测 4　映射与函数 …… 9
考点解读与检测 5　函数的解析式与定义域 …… 11
考点解读与检测 6　函数的值域 …… 13
考点解读与检测 7　函数的奇偶性 …… 16
考点解读与检测 8　函数的单调性 …… 18
考点解读与检测 9　反函数 …… 20
考点解读与检测 10　二次函数 …… 23
考点解读与检测 11　指、对数式 …… 25
考点解读与检测 12　指数函数与对数函数 …… 28
考点解读与检测 13　函数的最值 …… 30
考点解读与检测 14　函数图像 …… 33
考点解读与检测 15　函数的综合应用 …… 35
单元检测 2 …… 37

第三章　数　列

考点解读与检测 16　数列的概念 …… 39
考点解读与检测 17　等差数列 …… 41
考点解读与检测 18　等比数列 …… 44
考点解读与检测 19　等差与等比数列的综合运用 …… 46
考点解读与检测 20　特殊数列求和 …… 49
单元检测 3 …… 51

第四章　三角函数

考点解读与检测 21　三角函数的概念 …… 53
考点解读与检测 22　三角函数的性质 …… 55
考点解读与检测 23　三角函数的图像 …… 58
考点解读与检测 24　三角函数的恒等变形 …… 61
考点解读与检测 25　三角函数的求值问题 …… 63
考点解读与检测 26　三角函数的最值问题 …… 66
单元检测 4 …… 68

第五章　平面向量

考点解读与检测 27　向量、向量的加减法 …… 71
考点解读与检测 28　实数与向量的积 …… 73
考点解读与检测 29　平面向量的数量积 …… 75
考点解读与检测 30　线段的定比分点、平移 …… 77
考点解读与检测 31　正弦定理、余弦定理 …… 80
考点解读与检测 32　解斜三角形及应用 …… 82
单元检测 5 …… 85

第六章　不等式

考点解读与检测 33　不等式的概念与性质 …… 87
考点解读与检测 34　不等式的证明(比较法) …… 89
考点解读与检测 35　不等式的证明(综合法、分析法) …… 91
考点解读与检测 36　不等式的证明(反证法、放缩法等) …… 93
考点解读与检测 37　有理不等式的解法 …… 95
考点解读与检测 38　绝对值不等式的解法与性质 …… 98

单元检测 6 …… 100

第七章　平面解析几何(一)

考点解读与检测 39　平面直角坐标系 …… 102
考点解读与检测 40　直线的方程 …… 104
考点解读与检测 41　两直线的位置关系 …… 107
考点解读与检测 42　有关对称问题与简单线性规划 …… 109
考点解读与检测 43　圆的方程 …… 111
考点解读与检测 44　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 113

单元检测 7 …… 115

第八章　平面解析几何(二)

考点解读与检测 45　椭圆 …… 117
考点解读与检测 46　双曲线 …… 119
考点解读与检测 47　抛物线 …… 121
考点解读与检测 48　直线与圆锥曲线的位置关系(Ⅰ) …… 123
考点解读与检测 49　直线与圆锥曲线的位置关系(Ⅱ) …… 126
考点解读与检测 50　圆锥曲线有关的最值问题 …… 128
考点解读与检测 51　轨迹问题 …… 130

单元检测 8 …… 132

第九章　直线与平面

考点解读与检测 52　平面及其基本性质 …… 133
考点解读与检测 53　空间两条直线 …… 136
考点解读与检测 54　直线与平面 …… 138
考点解读与检测 55　平面与平面 …… 140
考点解读与检测 56　三垂线定理及其逆定理 …… 143
考点解读与检测 57　空间的角 …… 145
考点解读与检测 58　空间距离 …… 148

单元检测 9 …… 150

第十章　简单的几何体

考点解读与检测 59　棱柱 …… 152
考点解读与检测 60　棱锥 …… 155
考点解读与检测 61　欧拉公式与球 …… 157

单元检测 10 …… 160

第十一章　排列、组合、二项式定理

考点解读与检测 62　两个基本原理和排列组合的概念 …… 162
考点解读与检测 63　排列与组合 …… 164
考点解读与检测 64　二项式定理 …… 167
考点解读与检测 65　二项式定理的应用 …… 169

单元检测 11 …… 171

第十二章　概率与统计

考点解读与检测 66　概率与统计 …… 173

单元检测 12 …… 177

第十三章　复　数

考点解读与检测 67　数学归纳法 …… 179
考点解读与检测 68　数列极限意义及运算 …… 181
考点解读与检测 69　函数的极限与运算 …… 183
考点解读与检测 70　导数及其简单应用 …… 185
考点解读与检测 71　复数的概念 …… 186
考点解读与检测 72　复数的三角形式 …… 188
考点解读与检测 73　复数的运算 …… 190

单元检测 13 …… 192

参考答案 …… 193

第一章　集合逻辑

考点解读与检测 1 集　合



考点梳理

一、知识要点

1. 集合的概念及表示法

一组对象的全体形成一个集合，表示方法有：列举法、描述法、区间表示法和图示法.

2. 集合的性质及相关符号

集合的性质即元素的性质，分别有：

①确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象要么是该集合中的元素，要么不是该集合中的元素.

②互异性：集合中的任何两个元素都是互不相同的. 表示集合时，相同的对象只能算是该集合中的一个元素.

③无序性：表示集合时，元素之间无顺序之分，如$\{a,b\}$与$\{b,a\}$为同一集合. 元素与集合的关系是从属关系. 用"$\in$"与"$\notin$"表示，而集合与集合的关系是包含关系. 用"$\subseteq$"、"$\not\subseteq$"、"$\not\supseteq$"表示. 显然两集合相等是指两集合中的元素完全相同.

3. 集合的运算

(1)并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$，或$x\in B\}$；

(2)交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且$x\in B\}$；

(3)补集：全集用字母U表示，则补集为：$C_UA=\{x\mid x\in U$，且$x\notin A\}$.

二、重点难点

集合的交、并、补的综合运算是本节的重点. 在进行集合的运算或判断时，应从元素入手，通过元素的属性分析掌握集合的性质. 同时应充分利用数轴、韦恩图来帮助运算、解题. 并记住下列常见结论：

①$C_U(A\cap B)=C_UA\cup C_UB$

$C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$

②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$. $\varnothing\subseteq A$. $A\cup\varnothing=A$. $A\cap\varnothing=\varnothing$.

③由n个元素组成的集合的子集个数为2^n. 即$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

三、应试热点

高考中经常把集合的概念，表示和运算综合在一起. 复习时，应重点放在准确理解集合的概念、正确使用相关符号和运算上. 同时应强化对集合语言和集合思想的训练，提高分析与转化能力. 集合问题多与函数、方程、不等式有关，应加强学科内的综合，准确解题.



考点范题

●知识要点范例

[范题1]若集合$A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，$A\cup B=\{1,3,x\}$，满足条件的实数x的个数有(　　).

(A)1个　　(B)2个　　(C)3个　　(D)4个

[解析]由已知条件可知，$x^2=3$或$x^2=x$.

若$x^2=3$，则$x=\pm\sqrt{3}$；

若$x^2=x$，则$x=0$，或1.

代入检验知$x\neq1$.

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$或0.

答案：(C).

[范题2]设全集$U=\{a,b,c,d,e\}$集合$M=\{a,c,d\}$. $N=\{b,d,e\}$. 则$C_UM\cap C_UN$是(　　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$　　(C) $\{a,c\}$　　(D) $\{b,c\}$

[解析]思路1：根据补集定义. $C_UM=\{b,e\}$，$C_UN=\{a,c\}$.

$\therefore C_UM\cap C_UN=\varnothing$

思路2：$\because C_UM\cap C_UN=C_U(M\cup N)$，

$\therefore C_UM\cap C_UN=\varnothing$.

思路3：借助韦恩图亦可得.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

答案:(A).

[范题 3]若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$,则使 $A\subseteq B$ 成立的 a 的集合是(　　).

(A)$\{a|1\leqslant a\leqslant 9\}$　　(B)$\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$

(C)$\{a|a\leqslant 9\}$　　(D)$\varnothing$

[解析]∵A 为非空集合,∴$2a+1\leqslant 3a-5$,

∴$a\geqslant 6$,又∵$A\subseteq B$,

∴$\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22,\end{cases}$∴ $1\leqslant a\leqslant 9$.

综上所得　$6\leqslant a\leqslant 9$.

答案:(B).

●重点难点范例

[范题 4]已知集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{x|mx-3=0\}$ 且 $A\cup B=A$,则 m 的值为_____.

[解析]若 $m=0$,则 $B=\varnothing$ 满足 $A\cup B=A$. 若 $m\neq 0$,则 $B=\left\{\frac{3}{m}\right\}$. 由已知得　$\frac{3}{m}=1$ 或 $\frac{3}{m}=3$,$m=3$ 或 $m=1$.

答案:所求 m 的值为0、1、3.

[范题 5]设 $A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$,$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,$A\cup B=\{x|x>-2\}$,$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$,则 $a=$_____,$b=$_____.

[解析]由 $A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$,及 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$,可推出 B 可能是$\{x|x\leqslant -2$,或$-1\leqslant x\leqslant 3\}$,又由 $A\cup B=\{x|x>-2\}$,结合数轴可知 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$.

答案:$a=-1$,$b=3$.

[范题 6]集合 $A=\{x|x^2+px-2=0\}$,$B\{x|x^2-x+q=0\}$,若 $A\cup B=\{-2,0,1\}$,求 p,q 的值.

[解析]虽然 $0\notin A$,故必有 $0\in B$,从而 $q=0$. 所以 $B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$,

得 $A=\{-2\}$ 或 $A=\{-2,1\}$.

若 $A=\{-2\}$,说明方程 $x^2+px-2=0$ 有两个相等实根 -2,而$-2\times(-2)=4\neq -2$ 矛盾!故 $A\neq\{-2\}$,

若 $A=\{-2,1\}$,则$-p=-2+1$,$p=1$.

答案:$p=1$,$q=0$.

●应试热点范例

[范题 7]已知全集 $U=\mathbf{R}$. $A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$,$B\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$,求 $C_UA\cap B$.

[解析]由已知得 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}4$.

∵ $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数,

∴ $0<3-x\leqslant 4$,解得 $-1\leqslant x<3$.

∴ $A\{x|-1\leqslant x<3\}$.

由$\frac{5}{x+2}\geqslant 1$ 解得 $-2<x\leqslant 3$,

∴ $B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$.

于是 $C_UA=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}$,

∴ $C_UA\cap B=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$

答案:$C_UA\cap B=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

[范题 8]已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$,$Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$,且 $P\cap Q=Q$,求 m 的取值范围.

[解析]点集 P 是以 $O_1(-2,3)$ 为圆心,2 为半径的圆所围成的区域(包括圆周),点集 Q 是平面上以 $O_2(-1,m)$ 为圆心,$\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部,要使 $P\cap Q=Q$,应 $\odot O_2$ 内含或内切于 $\odot O_1$. 故有 $|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$,即$(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant(2-\frac{1}{2})^2$,$3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

答案:$3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.



考点预测

●知识要点题

[预测题 1]设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$,$N=\{x|x^2-2x-3<0\}$,则 $M\cap N=$(　　).

(A)$\{x|0\leqslant x<1\}$　　(B)$\{x|0\leqslant x<2\}$

(C)$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　(D)$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

[预测题 2]设 U 是全集,集合 P,Q 满足 $P\subsetneq Q$,则下面的结论中错误的是(　　).

(A) $P\cup Q=Q$　　(B) $C_UP\cup Q=U$

(C)$P\cap C_UQ=\varnothing$　　(D)$C_UP\cap C_UQ=C_UP$

[预测题 3]若$\{1,2,3\}\subsetneq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,则满足这一关系的集合 A 的个数是_____.

[预测题 4]设全集 $U=\{(x,y)|x\cdot y\in\mathbf{R}\}$,$M=\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$,则 $C_U(M\cup N)=$(　　).

(A)$\varnothing$　　(B)$\{(2,3)\}$

(C)$(2,3)$　　(D)$\{(x,y)|y=x+1\}$

●重点难点题

[预测题 5]已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,且 $A=B$,则 $x=$_____,$y=$_____.

[预测题 6]已知 $A=\{x|\log_2(x^2-2x-3)>\log_25\}$,$B=\{x|x^2-ax-2a^2\leqslant 0\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

●应试热点题

[预测题 7]已知 $M=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 若 $M\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 a 的范围.

[预测题 8]已知集合 $M=\{(x,y)\mid |x|\leqslant a,|y|\leqslant a,a\geqslant 0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，问 a 为何值时，(1) $M\cap N=N$，(2) $M\cap N=M$.



学科内综合题预测

[创新题 1]设 M、N 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于(　　).

(A)P　　(B)$M\cap P$

(C)$M\cup P$　　(D)M

[创新题 2]设集合 $P=\{(x,y)\mid y=ax^2+2bx+c,a\neq 0\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=dx^2+2ex+f,d\neq 0\}$，$M=\{(x,y)\mid y=0\}$. a、b、c、d、e、f 均为实数，且 ac、be、fd 成等差数列. 求证：$(P\cup Q)\cap M\neq\varnothing$.

考点解读与检测 2 简易逻辑



考点梳理

一、知识要点

1. 逻辑联结词

"或"、"且"、"非"这几种词.

并与集合语言进行比较，加深理解.

2. 简单命题与复合命题

命题：可以判断真假的语句

简单命题：不含逻辑联结词.

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

其形式为：p 或 q，p 且 q，非 p.

其真值表如下：

表 1

p	非 p
真	假
假	真

表 2

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

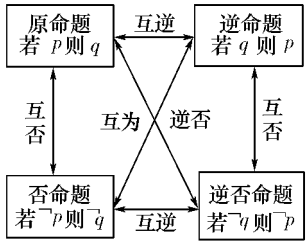
表 3

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

3. 四种命题及关系

原命题、逆命题、否命题、逆否命题

其关系如图示显然这四个命题的真假是成对出现的.



二、重点难点

理解"或"、"且"、"非"的真正含义，弄清复合命题的结构(真值表)，准确熟练地写出一个命题的其他三种命题，进而正确判断命题的真假性. 同时还应注意：互为逆否命题的两个命题是等价命题.

三、应试热点

充分利用等价命题进行转化并结合运用逻辑思维和反证法是学习本节的重点和关键、复习时应强化对转化能力的培养.



考点范题

●知识要点范例

[范题 1]分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题.

(1)$x=2$ 或 $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根;

(2)π 既大于 3 又是无理数;

(3)$x+3\geqslant x-1$;

(4)直角不等于 $90°$.

[解析](1)它是 p 或 q 的形式.

p:$x=2$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根,q:$x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

(2)它是 p 且 q 的形式.

p:π 大于 3,q:π 是无理数.

(3)它是 p 或 q 的形式.

p:$x+3>x-1$,q:$x+3=x-1$.

(4)它是非 p 的形式.

p:直角等于 $90°$.

[范题 2]判断由下列命题构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题的真假.

(1)p:$4\in\{2,3\}$,q:$2\in\{2,3\}$;

(2)p:$0\in\varnothing$,q:$\{x|x^2-3x-5<0\}\subsetneq\mathbf{R}$.

[解析](1)∵ p 假 q 真,∴"p 或 q"为真,

"p 且 q"为假,"非 p"为真.

(2)p 或 q:$0\in\varnothing$ 或 $\{x|x^2-3x-5<0\}\subsetneq\mathbf{R}$,

p 且 q:$0\in\varnothing$ 且 $\{x|x^2-3x-5<0\}\subsetneq\mathbf{R}$,

非 p:$0\notin\varnothing$,

∵ p 假 q 真,∴"p 或 q"为真,

"p 且 q"为假,∴"非 p"为真.

[范题 3]对命题 p:$A\cap\varnothing=\varnothing$,命题 q:$A\cup\varnothing=\varnothing$. 下列说法正确的是(　　).

(A)"p 且 q"为假　　(B)"p 或 q"为假

(C)"非 p"为真　　(D)"非 p"为假

[解析]∵ p 为真,∴"非 p"为假.

答案:故选(D).

● 重点难点范例

[范题 4]$\sqrt{9}\geqslant 3$ 是_____形式的复合命题,它是_____命题.

[解析]它是"p 或 q"形式的,它是真命题.

[范题 5]下列命题中,其否命题为假命题的是(　　).

(A)若两直线平行,则同位角相等

(B)若 x,y 全为零,则 $xy=0$

(C)若方程 $x^2-3x+2>0$,则 $x^2-3x>0$

(D)若 $b^2=ac$,则 a、b、c 成等比数列

[解析]∵ x,y 不全为零时,xy 可以为零.

答案:故应选(B).

[范题 6]命题"方程 $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}=0$ 有实根 -1 或 1"是_____形式 ①p 或 q;②p 且 q;③非 p.

[解析]应填①.

● 应试热点范例

[范题 7]"$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$"是"$\tan\alpha\neq 1$"的_____条件.

[解析]∴ $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$ 而 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时,$\tan\alpha=1$,既不是充分条件. 同时 $\tan\alpha\neq 1$,$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$ 等价于

$\alpha=\frac{\pi}{4}$,$\tan\alpha=1$,而它显然成立.

故是必要非充分条件.



考点预测

●知识要点题

[预测题 1]当命题"若 p 则 q"为真时,下列命题中一定正确的是(　　).

(A)若 q 则 p　　(B)若 $\neg p$ 则 $\neg q$

(C)若 $\neg q$ 则 $\neg p$　　(D)p 且 q

[预测题 2]命题"对顶角相等"与它的逆命题、否命题,逆否命题中,真命题是(　　).

(A)上述四个命题　　(B)原命题与逆命题

(C)原命题与逆否命题　(D)逆命题与否命题

[预测题 3]命题"若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$"与它的逆命题、否命题、逆否命题中,有_____个真命题.

● 重点难点题

[预测题 4]判断下列命题的真假.

(1)命题"若 $b^2-4ac<0$,则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 无实数解"的否命题;

(2)命题"若 $a>b$,则 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$"的逆否命题;

(3)命题"直线 $l\perp$ 平面 α,则直线 l 垂直平面 α 内的无数条直线"的逆命题.

[预测题 5]若命题 p:不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $\{x\mid x>-\frac{b}{a}\}$,命题 q:关于 x 的不等式 $(x-a)(x-b)<0$ 的解集为 $\{x\mid a<x<b\}$,则"p 且 q"、"p 或 q"及"非 p"形式的复合命题中的真命题是_____.

● 应试热点题

[预测题 6]指出下列各命题中,p 是 q 的什么条件

(1) p:$a>b$;q:$a^3>b^3$ $(a,b\in\mathbf{R})$;

(2) p:$\triangle ABC$ 是锐角三角形,q:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.



学科内综合题预测

[创新题 1]命题 p 的否命题是 r,命题 r 的逆命题为 s,则 s 是 p 的逆命题 t 的(　　).

(A)逆否命题　　(B)逆命题

(C)否命题　　(D)原命题

[创新题 2]已知命题 A、B,若 $\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的充分非必要条件,则 B 是 A 的(　　).

(A)必要不充分条件

(B)充分非必要条件

(C)充要条件

(D)既不充分又不必要条件

考点解读与检测 3 充 要 条 件



考点梳理

一、知识要点

1. 充要条件的概念

对于命题 A、B,若 $A\Rightarrow B$,则 A 是 B 成立的充分条件;若 $B\Rightarrow A$,则 A 是 B 成立的必要条件;若 $A\Rightarrow B$,若 $B\Rightarrow A$ 则 A 是 B 成立的充要条件.

2. 判定充要条件的常用方法:

(1)定义法;

(2)用原命题与逆否命题等价关系来判定;

(3)数形结合法(或图解法).

3. 作用

加强理解,深化概念.

二、重点难点

充要条件是对某种关系而言的,是一种相对概念,不能说某条件是充分条件或必要条件或充要条件.而要弄清谁是条件,谁是结论.亦即,若条件⇒结论,则条件是结论的充分条件;若结论⇒条件,则条件是结论成立的必要条件.

三、应试热点

充要条件是高中数学中一个十分重要的概念,高考中常以它为载体来考查概念性较强的知识的掌握程度,它可涉及代数、三角、立体几何、平面几何等各个领域.在判断时,应重视充要条件的等价转化,强化等价思想.



考点范题

●知识要点范例

[范题 1]设甲、乙、丙是三个命题,若甲是丙的充要条件.丙是乙的必要条件,则乙是甲的_____条件.

[解析]∵ 甲⇔丙⇐乙.∴乙是甲的充分条件.

[范题 2]"$p>0,q>0$"是"方程 $x^2-px+q=0$ 有正根"的(　　).

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分又不必要条件

[解析]$p>0,q>0$ 并不保证 $\Delta\geqslant 0$,因此 $x^2-px+q=0$ 不一定有解;反之,$x^2-px+q=0$ 有正根必有 $p>0,q>0$ 故选(B).

[范题 3]"$a=1$"是"函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π"的(　　).

(A)充分不必要条件
(B)必要不充分条件
(C)充要条件
(D)既不充分又不必要条件

[解析]∵原函数可化为 $y=\cos 2ax$，∴最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|a|}$，$a=1$，∴$T=\pi$；但 $a=-1$ 时，$T=\pi$，故应选择(A).

[范题 4]"$x>1$ 且 $y>2$"是"$x+y>3$"的_____条件.

[解析]∵$x>1$，$y>2$ 根据不等式性质 $x+y>3$，而 $x+y>3$ 时，如 $x=4$，$y=-1$，故应填充分不必要条件.

●重点难点范例

[范题 5]在△ABC 中，"$A>B$"是"$|\cos A|<|\cos B|$"的_____条件.

[解析]∵$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B$
$\Leftrightarrow \sin A>\sin B>0\Leftrightarrow \sin^2 A>\sin^2 B$
$\Leftrightarrow \cos^2 A<\cos^2 B\Leftrightarrow |\cos A|<|\cos B|$
故应填充要条件.

[范题 6]试写出使 $a<b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件.

[解析]$a<b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Leftrightarrow a<b$ 且 $\frac{b-a}{ab}>0\Leftrightarrow a<b$ 且 $ab>0$.
故一个充分非必要条件为 $b>a>0$.

[范题 7]S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项的和，且 $S_n=an^2+bn+c$(a、b、c 为实常数)．则 $c=0$ 是$\{a_n\}$为等差数列的_____条件.

[解析]$c=0$ 时，$a_n=2an+b-a$，易证$\{a_n\}$是等差数列，反之$\{a_n\}$是等差数列，

则 $a_n=\begin{cases}a+b+c, & n=1,\\ 2an+b-a, & n\geqslant 2.\end{cases}$

∵a_n 可以统一成 $2an+b-a$，故 $c=0$．即 $c=0$ 是充要条件，可作为常见结论使用.

●应试热点范例

[范题 8]设函数 $f(x)$是定义在 R 上的增函数，记 $F(x)=f(x)-f(k-x)$($k\in\mathbf{R}$，$k\neq 0$)．求证函数 $y=F(x)$的图像关于点 $A(a,0)$对称的充要条件是 $k=2a$.

[解析](1)充分性．若 $k=2a$，设 $M(x_1,y_1)$是 $F(x)$上任意一点 $y_1=F(x_1)=f(x_1)-f(2a-x_1)$，而 $M'(2a-x_1,-y_1)$且 $F(2a-x_1)=f(2a-x_1)-f[2a-(2a-x_1)]=f(2a-x_1)-f(x_1)=-y_1$.
即点 M'也在 $F(x)$的图像上，即 $F(x)$关于 $A(a,0)$对称，充分性得证.
(2)必要性，设 $P(x,y)$，$Q(2a-x,-y)$是 $F(x)$图像上两点则有 $-y=F(2a-x)$．$y=F(x)$即
$f(k-2a+x)+f(k-x)=f(x)+f(2a-x)$.
若 $k>2a$，则 $k-2a+x>x$，$k-x>2a-x$.
又 $f(x)$在 R 上递增，∴$f(k-2a+x)+f(k-x)>f(x)+f(2a-x)$矛盾！同理可证 $k<2a$ 也不成立，故 $k=2a$.
必要性得证



考点预测

●知识要点题

[预测题 1]"$\frac{b^2}{a}=c$"是"a、b、c 成等比数列"的_____条件.

[预测题 2]"$\log_3 M>\log_3 N$"是"$M>N$"的(　　).
(A) 充分非必要条件
(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件
(D) 既非充分又非必要条件

[预测题 3]"$\alpha=\beta$"是"$\tan\alpha=\tan\beta$"的_____条件.

●重点难点题

[预测题 4]"点 M 在曲线 $x^2+y^2=4$ 上"是"点 M 的坐标是方程 $x=-\sqrt{4-y^2}$的解"的(　　).
(A)充分非必要条件
(B)必要非充分条件
(C)充要条件
(D)既非充分又非必要条件

[预测题 5]$x\in\mathbf{R}$，不等式$(1-|x|)(1+x)>0$ 成立的充要条件是_____.

[预测题 6]$a,b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2<1$ 是 $ab+1>a+b$ 的_____条件.

●应试热点题

[预测题 7]"$x+y\neq -2$"是"x，y 不都为-1"的(　　).
(A) 充分不必要条件
(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件
(D) 既不充分又不必要条件

[预测题 8]在△ABC 中"$\angle A>\angle B$"是"$\sin A>\sin B$"的_____条件.



学科内综合题预测

[创新题 1]已知抛物线 $C:y=-x^2+mx-1$，点 $A(3,0)$、$B(0,3)$，求 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

单元检测 1

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|ax-1=0\}$ 是集合 $P=\{1,2\}$ 的真子集，则实数 a 的个数是(　　).
(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

2. 命题甲："$x>0,y>0$"，命题乙："$x+y>0$"，则命题甲是乙的(　　).
(A)充分条件　　(B)必要条件
(C)充要条件　　(D)非充分也非必要条件

3. 设全集 $u=R$，集合 $M=\{x|\log_2 x<0\}$，集合 $N=\{x|\frac{1}{x}\leqslant 1\}$，则下列关系正确的是(　　).
(A) $C_U M\subsetneqq N$　　(B) $C_U N\subsetneqq M$
(C) $M\subsetneqq C_U N$　　(D) $M\cup N=\mathbf{R}$

4. 设 $M=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$. 则(　　).
(A) $M\cap N=\{2,4\}$　　(B) $M\cap N=\{4,16\}$
(C) $M=N$　　(D) $M\subsetneqq N$

5. 已知集合 $P=\{(x,y)\mid|x|+|y|=1\}$，$Q=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则(　　).
(A) $P\subseteq Q$　　(B) $P=Q$　　(C) $Q\subseteq P$　　(D) $P\cap Q=Q$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，"$\angle A>\angle B$"是"$\sin A>\sin B$"的(　　).
(A)充分条件　　(B)必要条件
(C)充要条件　　(D)即不充分又不必要条件

7. 已知 p：9 是质数，q：8 是 12 的约数，则"p 或 q"，"p 且 q"，"非 p"的复合命题中，真命题的个数是(　　).
(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

8. 对 $x\in[0,1]$ 的一切值，$a+2b>0$ 是使 $ax+b>0$ 恒成立的(　　).
(A)充要条件　　(B)充分条件
(C)必要条件　　(D)既不充分又不必要条件

9. 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$P=\{x|y=\log_{\frac{1}{2}}x,y\in M\}$，则(　　).
(A) $M\cap P=P$　　(B) $M\cup C_U P=M$
(C) $C_U M\cup P=\{x|x\leqslant 1\}$
(D) $C_U M\cap C_U P=\{x|x\leqslant 0$ 或 $\frac{1}{2}<x<1\}$

10. 设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集 $M-P=\{x|x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)=$(　　).
(A) P　　(B) $M\cap P$　　(C) $M\cup P$　　(D) M

二、填空题

11. 同时满足 $\{1\}\subset A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是_____.

12. 设 U 为全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$，若求含 P、Q 的一个集合的表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算的表达式可以是_____.

13. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$C_U A=\{5\}$，集合 $M=\{x|x=\log_2|a|\}$ 的全部子集为_____.

14. $ab\leqslant 0$ 是 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$ 取等号的_____条件.

三、解答题

15. 已知集合 $A=\{x|x^2+3x-18>0\}$，$B=\{x|(x-k)(x-k-1)\leqslant 0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 k 的取值范围.

16. 将下列命题改写成"若 p 则 q"的形式，并写出其逆命题、否命题、逆否命题.
(1)正数 a 的平方根不等于 0；
(2)两条对角线不相等的平行四边形不是矩形.

17. 已知 $U=\mathbf{R}$ 为全集，$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$，
求 $C_U A\cap B$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

18. 某地对 100 户农户的生活情况做了调查，交来的统计表上称：有彩电的 65 户，有电冰箱的 84 户，两者都有的 53 户，

①问彩电与冰箱至少有一种的有几户？

②若两者全无的只有 2 户，问这一统计数字正确吗？

19. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，集合 $B=\{x|x^2+2x-8>0\}$，集合 $C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $C\supseteq A\cap B$，求实数 a 的取值范围.

第二章 函 数

考点解读与检测 4 映射与函数



考点梳理

一、知识要点

1. 映射的概念

一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$.

并且若 $a\xrightarrow{f}b$，则 b 叫做 a 在 f 下的像，a 叫做 b 的原像.

2. 函数

(1)定义：函数是非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射.

数集 A 叫做函数的定义域，而数集 B 不一定是函数的值域，但有值域 $M\subseteq B$.

(2)函数的三要素

定义域、对应法则和值域.

判断两个函数是同一函数只要判断其定义域和对应法则相同即可.

(3)函数的表示法

解析法、列表法、图像法.

二、重点难点

(1) 中学阶段的常用函数

正(反)比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数、常数函数等. 掌握以上函数是重中之重.

(2) 分段函数

根据对应法则分几个式子表示的函数，因此解决分段函数必须分类讨论，恰当处理整体和局部的关系.

(3) 复合函数

复合函数的概念、复合的构成，根据中间变量确定复合函数的定义域和值域是一个难点.

三、应试热点

函数是中学数学的核心内容，特别是函数思想几乎贯穿高中，它提示了两个变量之间互相依存、互相联系的规律、指导人们利用运动变化、数列结合的观点去认识和解决一些问题，真正意义上具有工具性和实用性. 近几年函数知识在高考中占有极其重要的地位，体现了“侧重”原则，一方面考查函数概念和三要素，另一方面考查函数性质的应用与解题.



考点范题

●知识要点范例

[范题 1]下列从 A 到 B 的对应法则 f 是映射的为(　　).

(A) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}^+$，f：取绝对值

(B) $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}$，f：开平方

(C) $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}$，f：取对数

(D) $A=Q$，$B=\{$偶数$\}$，f：乘 2

答案：选(C).

[范题 2]设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}_+$，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，像 20 的原像是(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

[解析]依题意 $2^n+n=20$，四个选项中只有 $n=4$ 为方程的解，故选(C).

[范题 3]与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是(　　).

(A) $y=\sqrt{x^2}$　　(B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$　　(D) $y=\log_a a^x\ (a>0,a\neq 1)$

[解析](A)中，$y=\sqrt{x^2}=|x|$，对应法则不同；

(B)中，$y=\dfrac{x^2}{x}=x\ (x\neq 0)$ 定义域不同；

(C)中，$y=a^{\log_a x}=x$ $(x>0)$定义域不同；故选(D).

[范题 4]集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c\}$，那么可建立从 A 到 B 的映射个数是_____.

[解析]从 A 到 B 分五步进行，每一步均有 3 种对出方法，故共有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$ 种映射.

●重点难点范例

[范题 5]f 是从集合 A 到集合 B 的映射，且 $f:x\to x^2$. $B=\{1,2\}$. 则 $A\cap B=$_____.

[解析]∵ $f:x\to x^2$，

令 $x^2=1$ 或 $x^2=2$ 得：$x=\pm1,\pm\sqrt{2}$.

∴ A 可能是$\{1\},\{-1\},\{\sqrt{2}\},\{-\sqrt{2}\}$，

$\{1,-1\},\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\},\{1,\sqrt{2}\}$，

$\{1,-\sqrt{2}\},\{-1,\sqrt{2}\}$，

$\{-1,-\sqrt{2}\},\{1,-1,\sqrt{2}\}$，

$\{1,-1,-\sqrt{2}\},\{1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$，

$\{-1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\},\{-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

故 $A\cap B=\varnothing$ 或$\{1\}$.

[范题 6]已知 $f(x+1)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant0,\\ \lg(-x), & x<0,\end{cases}$

则 $f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot f(-9)=$_____.

[解析]$f(\frac{\pi}{2}+1)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，

$f(-9)=f(-10+1)=\lg10=1$.

∴ $f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)=1$.

●应试热点范例

[范题 7]A、B 两地相距 150 公里，某汽车以每小时 50 公里的速度从 A 地到 B 地，在 B 地停留 2 小时之后，又以每小时 60 公里的速度返回 A 地，写出该车离开 A 地的距离 S(公里)关于时间 t(小时)的函数关系.

[解析]由 $50t=150$ 得 $t_1=3$，

由 $60t=150$ 得 $t_2=\frac{5}{2}$. 显然有

$$S=\begin{cases}50t, & t\in[0,3].\\ 150, & t\in(3,5].\\ 150-60(t-5), & t\in[5,7.5].\end{cases}$$

[范题 8]若函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+x)=-f(1-x)$. 试求 $f(2)+f(-2)$的值.

[解析]∵ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+x)=-f(1-x)$，

∴当 $x=0$ 时，应有 $f(1+0)=-f(1-0)$，

即 $f(1)=-f(1)$，∴ $f(1)=0$.

又∵ $f(x)=(x+a)^3$，

∴ $(1+a)^3=0$，$a=-1$，

∴ $f(x)=(x-1)^3$，

∴ $f(2)+f(-2)=-26$.



考点预测

●知识要点题

[预测题 1]给定映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$，则在对应法则 f 下，$(6,-2)$的原像是(　　).

(A)$(6,-2)$　　(B)$(-2,6)$

(C)$(2,4)$　　(D)$(4,2)$

[预测题 2]已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，则函数 $f[f(x)]$的定义域是(　　).

(A) $\{x|x\neq1\}$

(B) $\{x|x\neq-2\}$

(C) $\{x|x\neq-1$ 且 $x\neq-2\}$

(D)$\{x|x\neq-1$ 或 $x\neq-2\}$

[预测题 3]$g(x)=1-2x$. $f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}$. $(x\neq0)$，则 $f(\frac{1}{2})=$(　　).

(A) 1　　(B) 3　　(C) 15　　(D) 30

●重点难点题

[预测题 4]下列各式中：

①$y=x-(x-3)$；

②$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$；

③$y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant0;\end{cases}$

④$y=\begin{cases}0 & (x\text{ 为有理数}),\\ 1 & (x\text{ 为无理数}).\end{cases}$

其中表示 y 是 x 的函数的有(　　).

(A)4 个　　(B)3 个　　(C)2 个　　(D)1 个

[预测题 5]已知函数 $f(x)$满足 $f(mn)=f(m)+f(n)$且 $f(2)=p$，$f(3)=q$，则 $f(36)=$_____.

[预测题 6]邮寄国内挂号信件，每 20 克应付邮资0.8元，不足 20 克以 20 克重量计算，另加挂号费 1 元，求每封挂号信(不超过 60 克)邮资总额 y(元)与挂号重量 x(克)的函数关系式.

●应试热点题

[预测题 7]已知 $A+\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$且 $a,k\in\mathbf{N}_+$，$x\in A$，$y\in B$，且 $f:x\to y=3x+1$ 是 A 到 B 上的一个函数，求 a,k.



学科内综合题预测

[创新题 1]已知集合 $M\{(x,y)|x+y=1\}$，映射 $f:M\to N$ 在 f 作用下，点 (x,y) 的图像是 $(2^x,2^y)$，则集合 $N=$(　　).

(A) $\{(x,y)|x+y=2,x>0,y>0\}$

(B) $\{(x,y)|xy=1,x>0,y>0\}$

(C) $\{(x,y)|xy=2,x<0,y<0\}$

(D) $\{(x,y)|xy=2,x>0,y>0\}$

[创新题 2]已知函数 $y=f(x)(x\in[a,b])$，则集合 $\{(x,y)|y=f(x),x\in[a,b]\}\cap\{(x,y)|x=2\}$ 中所含的元素的个数是(　　).

(A)1　　(B)0

(C)1 或 0　　(D)1 或 2

考点解读与检测 5 函数的解析式与定义域



考点梳理

一、知识要点

1. 函数的解析式

函数的解析式是给定了对应法则，能揭示定义域与值域之间的一种对应关系，是函数表示法中最常用的一种.

2. 函数的定义域

函数定义域即自变量 x 的取值范围，也就是指能使整个式子有意义的所有实数 x 的集合. 求函数的定义域时，首先应掌握如下几个方面：(1) 分式的分母不能为零；(2) 偶次方根的被开方数非负；(3)对数的真数必须大于零，底数大于零且不等于 1；(4) $y=\tan x(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$，$y=\cot x$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$ 等. 其次对实际问题，除了要考虑函数解析式有意义外，还应考虑使整个实际问题有意义，函数定义域在函数三要素中的地位十分重要.

二、重点难点

1. 求解析式的方法

(1) 待定系数法：已知函数的模型(构造).

(2) 代入法.

(3) 换元法：如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，常用换元法求 $f(x)$ 的表达式，当表达式较简单时，可直接用配凑法，但应注意复合换元时定义域的变化.

2. 复合函数的定义域

设函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则复合数函数 $y=f[g(x)]$ 中 x 的取值范围即复合函数的定义域，即 x 使 $g(x)$ 有意义，同时还应保证 $g(x)$ 的值域不超过 $f(u)$ 的定义域.

二、应试热点

运用函数思想建模，确定函数定义域求解实际应用问题是高考的一大热点，而且应用范围广、涉及的知识面宽. 如代数、三角、几何知识，因此复习函数部分时，既要重视建构能力的培养，还应重视知识间的相互联系，渗透及综合.



考点范题

●知识要点范例

[范题 1]求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{|x|+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-2^x}$；

(2) $f(x)=\frac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

[解析](1) x 应满足 $\begin{cases}|x|+x\geqslant 0,\\ \frac{1}{2}-2^x\geqslant 0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbf{R},\\ x\leqslant -1;\end{cases}$

$\Rightarrow x\leqslant -1$，即定义域为 $\{x|x\leqslant -1\}$.

(2) x 应满足 $\begin{cases}|x|-x>0,\\ 1-x^2>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0,\\ -1<x<1;\end{cases}$

$\Rightarrow -1<x<0$，

∴定义域为 $\{x|-1<x<0\}$.

[范题 2]在一定范围内，某种产品的购买量 y 吨与单价 x 元之间满足一次函数关系，如果购买 1 000 吨，每吨 800 元，购买 2 000 吨，每吨 700 元，一客户购买 400 吨，单价应是(　　).

(A) 820 元　　(B) 840 元

(C) 860 元　　(D) 880 元

[解析]设 $y=kx+b$，则有

$\begin{cases}1\,000=k\cdot 800+b,\\ 2\,000=k\cdot 700+b;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-10,\\ b=900.\end{cases}$

则当 $y=400$ 时，$x=860$，故选(C).

[范题 3]已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，求 $f(x^2-1)$ 和 $f(\sin x)$ 的定义域.

[解析]∵ $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，

∴ $f(x^2-1)$ 的定义域为 $0<x^2-1\leqslant 1$，

得 $\{x\mid 1<x\leqslant\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant x<-1\}$.

$f(\sin x)$ 的定义域为 $0<\sin x\leqslant 1$，

得 $\{x\mid 2k\pi<x<(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

[范题 4]已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+3+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$_____.

[解析] $f(x-\frac{1}{x})=x^2+3+\frac{1}{x^2}$，

即 $f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+5$，

∴ $f(x)=x^2+5\quad(x\in\mathbf{R})$.

●重点难点范例

[范题 5]函数 $f(x)$ 是一个偶函数，$g(x)$ 是一个奇函数且 $f(x)+g(x)=\sin x+x^2$. 求 $f(x)$，$g(x)$.

[解析]∵ $f(x)+g(x)=\sin x+x^2$ ①

∴ $f(-x)+g(-x)=\sin(-x)+(-x)^2$，

又 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

即有：$f(x)-g(x)=-\sin x+x^2$， ②

由①②得 $f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$.

[范题 6]设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图像在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

[解析]设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

由 $f(x-2)=f(-x-2)$，$-\frac{b}{2a}=-2$ 得

$4a-b=0$， ①

$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，

∴ $b^2-4ac=8a^2$； ②

由已知得 $c=1$. ③

由①②③解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$，$c=1$，

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

[范题 7]若函数 $f(x)=\frac{x-4}{mx^2+4mx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

[解析]依题意得 $mx^2+4mx+3$ 恒不为零.

①当 $m=0$ 时，符合题意.

②当 $m\neq 0$ 时，则有 $\Delta=16m^2-12m<0$，

即 $0<m<\frac{3}{4}$.

综上得 m 的范围为 $m\in[0,\frac{3}{4})$.

●应试热点范例

[范题 8]已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x>0),\\ e & (x=0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$

则 $f\{f[f(-2)]\}=$(　　).

(A) 0　　(B) e　　(C) e^2　　(D) 4

[解析]∵ $f(-2)=0$，

∴ $f[f(-2)]=f(0)=e$，

∴ $f\{f[f(-2)]\}=f(e)=e^2$，故选(C).



考点预测

●知识要点题

[预测题 1]函数 $y=\frac{\sqrt{\lg[-(x-2)]}}{x}$ 的定义域是(　　).

(A)$\{x\mid x\neq 0\}$　　(B)$\{x\mid x\geqslant 3\}$

(C)$\{x\mid x\geqslant 12\}$　　(D)$\{x\mid x>2\}$

[预测题 2]已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$. 则 $f(x)=$_____.

[预测题 3]设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，则函数 $f(\lg x)$ 的定义域为(　　).

(A)$(0,1)$　　(B)$(1,10)$

(C)$[0,1]$　　(D)$[1,10]$

[预测题 4]已知 $f(x)=\begin{cases}2^x & (x\geqslant 4),\\ f(x+2) & (x<4);\end{cases}$

求 $f(\log_{\frac{1}{2}}3)$ 的值.

●重点难点题

[预测题 5]已知 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=cx$ ($a,b,c\in\mathbf{R}$. $ab\neq 0$ 且 $a^2\neq b^2$)，求 $f(x)$.

[预测题 6]已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$，求 $f(x)$ 的定义域.

[预测题 7]求函数 $y=\lg(a^x-2\cdot 3^x)(a>0$ 且 $a\neq 1)$的定义域.

●应试热点题

[预测题 8]函数 $y=\sqrt{(2+x)(3-x)}$的定义域为集合 A,函数 $y=\lg(kx^2+4x+k+3)$的定义域为集合 B. 当 $A\supset B$ 时,求实数 k 的取值范围.

张 高考X导航 考点聚焦

学科内综合题预测

[创新题 1]动点 P 从边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发顺次经过 B、C、D 再回到 A. 设 x 是表示点 P 点的行程. y 表示 PA 的长,求 y 关于 x 的函数解析式.

考点解读与检测 6 函数的值域

纲 高考命题纲要 考点梳理

考点梳理

一、知识要点

1. 函数值域的概念

函数值域即所有函数值所成的集合,函数是一个特殊的映射,$f:A\to B$. 值域不一定是集合 B,只能说值域是像的集合. 值域是函数重要性质之一.

2. 基本函数的基本方法

常有观察推理法、配方法、判别式法、不等式法、换元法、函数单调性法、反函数法、数形结合法、有界法等.

二、重点难点

1. 求函数值域时,应特别重视定义域对值域的制约关系,因此一般要先求定义域.

2. 准确把握各种方法适用的范围及注意事项,选择最优解法.

一般而言,形式较简单的函数采用观察法;一次分式函数采用反函数法,形如 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1$,$a_2$ 不同时为零)的函数采用判别式法;二次函数式可化为二次函数的函数采用配方法;无理函数采用换元法或函数单调性法;能很快作出图像或利用几何意义的采用数列结合法;而形式中隐含定值的函数采用基本不等式法.

其中值得注意的是换元时,应考虑新变量的取值范围. 利用判别式法时,应考虑二次项的系数和转换的等价性. 而利用不等式法时,应注意三个方面的验证.

三、应试热点

求函数值域与求函数的最值密不可分,应注重相互间的渗透. 另外虽然求函数值域的方法多,灵活性大. 但仍有规律可依,学习时,应加强总结经验. 因此在遇到求范围的问题时,应注意等价转化,通过变换思维角度或建模的思想,将问题转化为求函数的值域. 这点在学习时应进一步强化和落实,近几年的高考题中,此类问题的出现频率较高.

需要全本请访问 www.ertongbook.com