千禧状元·中高考冲刺系列

高 考 数 学 冲 刺

主编 张颂方

复 旦 大 学 出 版 社

丛书组委会

丛书编委：（以姓氏笔画为序）

冯大雄　伦丰和　庄起黎　朱　臻

吴　峥　张颂方　杨正家　杨新毅

沈崇娜　肖克卫　陈基福　陈　慧

俞珮华　钱君端　曹家骜　董　艳

丛书策划：潘　抒

图标设计：吴佳彦

本册主编：张颂方

本册编著者：张颂方　李家元　孙海杰

策划编辑：黄　乐

责任编辑：陆盛强

前　言

“千禧状元·中高考冲刺系列”丛书，是为参加中考和高考的上海市学生专门开发编写的辅导书籍，力求体现上海市教育委员会最新教改精神和考试大纲。

来自上海基础教育队伍的大量优秀教师参与了本套丛书的编写。在这样一个协作的集体中，有来自徐汇、黄浦、闸北、杨浦、卢湾、浦东等区的教研员，也有来自上海中学、格致中学、市西中学、进才中学等学校的一线骨干教师，他们或者是教材的资深主编，或者是教学的青年精英，其中大多数还是历年中高考的命题阅卷专家。在强大的教师阵容中有7位校长，6位特级教师，39位高级教师，4位硕士。

聆听最有经验的教师讲解，掌握最具核心的知识，花费最少的时间，寻求最佳的学习效果，是每一个面临中高考的考生心怀的热切愿望，“千禧状元”的策划者们也正是抱着这样的目标辛勤工作的。

本套丛书通过三个方面向考生揭示考试的奥秘：

冲刺秘笈，以中高考改革动态为参照，确定复习目标，梳理考试知识点，揭示知识点在考试中出现的情况和可能。

金牌教练，以典型例题揭示不同题型的个中奥妙、同一题目的不同思路、陌生题型的临场应变，分析解题思路和方法，从中提炼解题规律。金牌教练能让学生切入最有效的解题方法，真正体现优秀教师的价值。

小试锋芒，通过对经典的、出错率高的题目、题型的演练，让学生通过尽可能少的练习，完成最有价值的知识迁移。在这个环节中特别强调对可能出现延伸或新题型的知识点的应用。

在以网络为核心的现代教育技术迅猛发展的今天，“千禧状元”丛书没有停留在一套书籍中，而是采取了全方位的辅导教程——“书籍-光盘-网络-面授”四位一体的综合工程，无论学生选择其中的一种或几种，都将是学生个性化学习的新模式。有了这套辅导教程，完全可以让最好的老师为更多的学生提供最需要的帮助，完全可以做到使学生能更有效地学习。这种辅导方式在上海市还是首例，得到了上海市教育委员会等有关专家的肯定与支持。

本套丛书共有14本，其中为参加中考的学生提供的有语文、数学、英语、物理、化学5本，为参加高考的学生提供的有语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史、综合文科和综合理科9本。我们恳请读者在使用这套书时，发现问题，提出宝贵的意见和建议，以便修订完善。

“千禧状元”丛书组委会
2000年12月

内 容 提 要

本书由上海市富有教学和考试经验的名家编写，能够帮助考生迅速提高应试能力，获得事半功倍的复习效果，如愿以偿地冲向胜利的彼岸.

全书第一部分是“趋势分析”，通过对近几年本学科命题变化的分析，提出今后命题可能的方向，对考前复习大方向的把握具有指导意义.

第二部分共分八讲，每讲由冲刺秘笈、金牌教练、小试锋芒三个子部分组成.其中“冲刺秘笈”精述该讲的知识点、考点和难点，剖析这些“点”在考题中可能出现的形式和运用的技巧；“金牌教练”一是包括针对本讲的秘笈所精选的典型题型及详细的解析过程，二是对历届考题中出错率很高的试题进行解析，三是对可能延伸的新的题型作出解析，强调解题思路和方法技巧，让学生举一反三、融会贯通；“小试锋芒”部分是该讲的针对性训练，所有题目都给出了答案或解析.

第三部分共分四讲，每讲给出一份高考仿真试题，同时给出答案或解析.

本书适合参加高考的学生阅读，尤其适宜学生进行考前最后阶段的突击提高.

目　录

近年高考数学命题趋势分析

一、高考命题立意由知识立意转向能力立意

随着教育改革向纵深发展，教育的质量观发生了根本的变化，以知识掌握为主的知识型质量观向以德、智、体、美、劳全面发展的素质型质量观转变，因此，高考中越来越注重学生能力和素质的考查，使得考试也由知识测量型向能力测量型转变. 高考改革的指导思想，始终坚持有助于高等学校选拔人才、有助于中学实施素质教育、有助于高等学校扩大办学自主权的三项原则. 当今，高考命题立意由知识立意转向能力立意已是发展的总趋势.

高考的改革不是在一朝一夕可以完成的，要随着教育改革的形势同步地深化和完善. 一般每年一次的高考要在保持原有基础相对稳定的前提下作改革，以往一贯的口号是“稳中求变，变中求发展”，多年来，高考改革的轨迹确实是一个由知识立意向能力立意转变的过程，这也是一个不断深化、不断完善的过程，且朝着这个方向继续发展的过程. 高考命题要以能力立意贯穿整个命题过程和整张试卷，已成为高考改革的一个重要举措，并且日益深入人心.

二、高考数学试卷的变化及发展趋势

1. 格式相对稳定，题型结构略有调整，题量有所减少，在客观性试题中也体现了能力的考查.

(1) 在题型方面，全国卷、上海卷是相同的，它们都含有选择题、填空题、解答题三种不同类型，其中选择题、填空题属于客观性命题，答题时只要求直接写出结果. 解答题为主观性命题，答题时要求写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(2) 在题型结构与题量方面，全国卷与上海卷分见表 0-1 和表 0-2.

表 0-1　全　国　卷

数量 题型 / 年份	选择题	填空题	解答题	总题量
1995	15 (1—15)	5 (16—20)	6 (21—26)	26
1996	15 (1—15)	4 (16—19)	6 (20—25)	25
1997	15 (1—15)	4 (16—19)	6 (20—25)	25

（续表）

数量　题型　年份	选择题	填空题	解答题	总题量
1998	15 （1—15）	4 （16—19）	6 （20—25）	25
1999	14 （1—14）	4 （15—18）	6 （19—24）	24
2000	12 （1—12）	4 （13—16）	6 （17—22）	22

全国卷从 1996 年起，连续几年比 1995 年总题量减少一题，1999 年总题量减少到 24 题，2000 年总题量减少到 22 题. 减少的是客观性命题中的填空题和选择题，主观性命题的题量保持不变. 在 1996—1998 年，选择题、填空题、解答题的得分比例是 43.3%∶10.7%∶46%，而 1999—2000 年，这三种题型的得分比例为 40%∶10.7%∶49.3%.

表 0-2　上　海　卷

数量　题型　年份	选择题	填空题	解答题	总题量
1995	8 （1—8）	12 （9—20）	5 （21—25）	25
1996	8 （1—8）	10 （9—18）	6 （19—24）	24
1997	6 （1—6）	10 （7—16）	6 （17—22）	22
1998	5 （12—16）	11 （1—11）	6 （17—22）	22
1999	4 （13—16）	12 （1—12）	6 （17—22）	22
2000	4 （13—16）	12 （1—12）	6 （17—22）	22

上海卷从 1996 年起总题量比 1995 年减少一题（其中填空题减少两题，而解答题增加一题，共 6 题），1997—2000 年总题量减少到 22 题，其中选择题已减少到 4 题，解答题数量保持 6 题不变.

由于客观性试题的解答不要求解题过程，学生答卷时会常有一定猜测的成分（尤其是选择题）. 所以，适当减少客观性试题的数量，稳定主观性试题数量，有利于较完整地考查学生的思维过程和评价学生的实际数学能力，也有利于克服“重结论，轻过程”的不良倾向. 试题总量的适当减少，使学生的实际水平能较正常地发挥.

（3）在客观性试题中也体现了能力的考查（以 2000 年试题为例）.

① 上海卷第 6 题，结合上海市 1998 年完成 GDP 实际问题，编制有时代气息、有教育价值的试题，不但使学生从中学习到 GDP 的知识，且引导学生关心社会热点问题，并应用数学知识进行计算，考查了学生应用数学的能力；体现了数学的应用价值，而这种应用的背景非常贴近生活实际. 知识的深广度切合中学数学教学，又考查了学生一般心理能力，这种试题在任何一本复习书中是没有的. 全国卷第 6 题，结合《中华人民共和国个人所得税法》编制的题也属同一种类型.

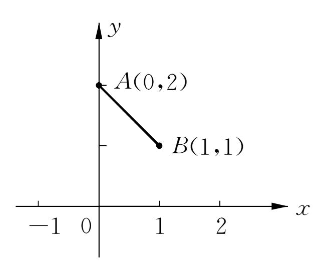

图 0-1

② 上海卷第 8 题：“设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数，它在区间 $[0,1]$ 上的图像为如图 0-1 所示的线段 AB，则在区

间$[1, 2]$上，$f(x)=$ ________”. 这一试题考查了函数的基本性质(周期性，偶函数)，结合对函数图像的观察、分析、抽象，与推理相结合，然后用数学符号语言写出函数的表达式. 这些都是数学学科中的一般能力. 全国卷第 5 题，判断函数 $y=-x\cos x$ 的部分图像，也是考查了数学学科中的一般能力. 全国卷第 16 题，是根据图形考查学生的空间想象能力.

③ 上海卷第 12 题：“在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_{10}=0$，则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}(n<19, n\in \mathrm{N})$ 成立，类比上述性质. 相应地，在等比数列$\{b_n\}$中，若 $b_9=1$，则有等式 ______________ 成立”. 在等差数列中，若某项为 0，则由此等差数列和的通性，来探索在等比数列中，若某项为 1，此等比数列积的通性. 这种以等差数列、等比数列的性质为知识载体，考查学生类比的数学思想方法，这种考法别有新意.

2. 增加综合能力的考查，但适当降低压轴题难度.

(1) 增加本学科之间的综合.

① 如上海卷(2000 年)第 15 题：“若集合 $S=\{y\mid y=3^x, x\in \mathrm{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1, x\in \mathrm{R}\}$，则 $S\cap T$ 是

(A) S.”　　(B) T.”　　(C) $\varnothing$.”　　(D) 有限集.”

本题考查了指数函数 $y=3^x$ 的值域，二次函数 $y=x^2-1$ 的值域，又考查了集合交集的概念，其中还考查了对集合用描述法符号语言表达的正确理解.

② 上海卷(2000 年)第 21 题(整卷的倒数第二题)是数列与函数的综合：“点列 $P_1(a_1, b_1)$、$P_2(a_2, b_2)\cdots P_n(a_n, b_n)\cdots$对每个自然数 n，点 P_n 位于函数 $y=2000\left(\frac{a}{10}\right)^x$，$(0<a<10)$ 的图像上.”考查了学生对数学语言的理解，以及指数函数的性质、三角形两边之和大于第三边等多方面的综合能力，但总体难度有所下降，该题的难度为 0.47，比前几年第 21 题的难度明显下降.

③ 上海卷(2000 年)第 22 题(最后一题)，复数与解析几何结合，在复数中考查了复数的一般概念，但引出坐标平面上点的一个变换，从中考查了学生的一种学习能力. 这充分体现了命题范围遵循教学大纲，但不拘泥于教学大纲，增加了对学生潜能的测试. 但总体难度也有所下降，该题的难度为 0.36，明显比前几年第 22 题的难度低.

(2) 增加跨学科的综合.

转变传统的封闭的学科观念，注意跨学科的综合能力的考查是一种新的趋势. 但一下子不可能太难.

如，上海卷(2000 年)第 20 题，是一道应用题，题中给机器人下指令，题意新颖，与物理学中的匀速直线运动相结合，也十分贴近学生的生活. 如果本题对小球的运动改为以 $M(4, 4)$为圆心，以 17 为半径的圆周上作匀速圆周运动，那么就变成另一个新题. 这种都是跨学科的综合能力的运用.

高考试题过难会造成较多的不良后果，如：①区分度太小，不利选拔优秀生；②对中学教学产生误导，加重学生负担，不利学生充分发展；③数学考试并不是为数学学科选拔专门人才，试题太难会降低该学科在全面考查学生整体素质中的功能. 适当控制难度为具有一定能力的考生充分发挥自己的水平创造了条件，也有利于真正考查学生的多种能力.

3. 密切结合课本，考查教科书中的重点内容，对教学起导向作用.

如，上海卷(2000 年)第 19 题：“已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1, +\infty)$. (1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$的最小值……”由已知函数可化 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2$ 的形式，在高中第一册 P57 上可以找到它的原型. 1997 年全国卷，也在先建立函数关系式的基础上，其函数结构可归结为 $\frac{a}{x}+bx$ $(a、b、x\in \mathrm{R}^+)$ 的极值问题. 1996 年全国卷的增长率问题在课本中是作为指数函数的应用

出现的. 1997 年上海卷的应用题(第 18 题),在新老教材中也都有类同的习题.

结合教材内容,挖掘教材中的潜能,正确处理高考与教学的关系,发挥考试对教学的导向作用,在一定程度上对排除题海战术和大量复习资料进入课堂有一定作用,同时为减轻学生过重负担也有较大的帮助,因此,不能忽视教材中的重点内容和基础知识.

4. 加强对数学多种能力的考查.

(1) 数学应用能力方面.

从 1993 年开始,数学学科逐步加强了数学应用的考查. 最初在选择题和填空题中,1995 年开始,在解答题中编制了应用题,应用题在整卷中的分值比例也有所增加,目前已成为必考的内容. 广大中学教师与学生,对应用题已有较足够的重视,但仍然是一个薄弱环节.

目前,对数学应用问题大致可分为四个不同的层次:①直接套用现成公式计算;②利用现成的数学模型对应用问题进行定量分析;③对于已经经过加工提炼的,忽略了次要因素,保留下来的诸因素关系比较清楚的实际问题建立数学模型;④对原始的实际问题进行分析加工,提炼数学模型. 教育部考试中心任子朝认为"直接套用公式计算与实际背景关系不大,达不到考查应用的目的;而直接面对原始的实际问题则又要求过多的实际经验与其他方面的专门知识,以至数学反降为次要,因此,考查应用应以二、三层次为宜."

上海卷(2000 年)第 6 题是考在第二层面上的应用题,第 20 题是考在第三层面上的应用题. 全国卷(2000 年)第 6 题是考在第二层面上的应用题,第 21 题是考在第三层面上的应用题.

因此,在应用问题上要注意层次.

(2) 数学概念及读书(学习)能力方面.

① 上海卷(1998 年):"设某物体一天中的温度 T 是时间 t 的函数,$T(t)=at^3+bt^2+ct+d\ (a\neq 0)$,其中温度的单位是℃,时间的单位是小时,$t=0$ 表示 12:00,t 取正值表示 12:00 以后. 若测得该物体在 8:00 的温度为 8℃,12:00 的温度为 60℃,13:00 的温度为 58℃,且已知该物体的温度在 8:00 和 16:00 有相同的变化率. ①写出该物体的温度 T 关于时间 t 的函数关系式;②该物体在 10:00 到 14:00 这段时间中(包括 10:00 和 14:00),何时温度最高?并求出最高温度;③如果规定一个函数 $f(x)$ 在 $[x_1,\ x_2]\ (x_1<x_2)$ 上的函数值的平均值为 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$,求该物体在 8:00 到 16:00 这段时间内的平均温度."

这考查了学生对新的数学概念、定义的正确理解,而不局限于平时书本学习中对导数的应用"即时速度"和"切线斜率"等,这对学生的自学能力也是一种很好的考查.

② 上海卷(2000 年)第 22 题,由考生通过复数运算、建立两个复数的实部、虚部间的关系,并把这种关系定义为一种变换,再回答点、直线经过变换后的各种问题.

本题中对变换的定义建立,且应用这种变换,再研究各种问题,显然是对学生学习能力的一种考查.

(3) 增加开放性试题和较新颖的试题.

近年来,逐有开放性试题的出现,①如 1999 年全国卷第 18 题:"如图 0-2,在直四棱柱 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,当底面四边形满足________时,有 $A_1C\perp B_1D_1$."

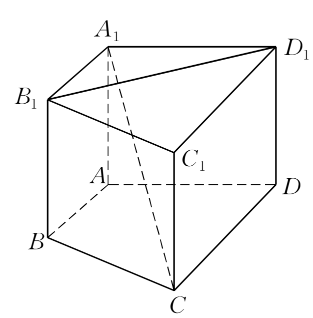

图 0-2

② 上海卷(2000 年)第 7 题:"命题 A:底面为正三角形,且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥. 命题 A 的等价命题 B 可以是:底面为正三角形,且______________________的三棱锥是正三棱锥."

这些题虽然难度不大,但很有教育价值(培养学生良好的思维品质,创造性地分析问题、解决问题,形成较高的数学素养),在教学中要注意学生探究能力的

（减）函数.

函数的单调性在解决函数最值或值域问题中也起着重要作用：若 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上递增（减），则 $y\in[f(a), f(b)]$（$y\in[f(b), f(a)]$）.

4. 函数的最值. 初等数学中的最值问题通常归结到求一元函数的最值或三角函数的最值. 求一元函数的最值根据所给解析式的特征，常利用二次函数、基本不等式、函数单调性或借助图形直观（数形结合思想方法）等方法解决（三角函数的最值在三角函数中讲述）. 值得注意的是求函数最值时，在确定函数解析式后，必须确定函数的定义域. 对于分段函数的最值问题，先在每段内求出最值（或范围），再确定函数的最值. 函数的最值多次以综合题出现在高考试卷中.

5. 反函数. 函数 $y=f(x)$，若对于任 $x_1, x_2\in \mathrm{D}$（D 为 $f(x)$的定义域），由 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则 $y=f(x)$ 存在反函数. 函数 $f(x)$与其反函数 $f^{-1}(x)$之间有如下关系：$y=f(x)$ 的定义域是 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，$y=f(x)$ 的值域是 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 值得注意的是：求 $y=f(x)$ 的反函数，不仅要求出 $y=f^{-1}(x)$ 的解析式，而且要确定 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域不一定是使解析式 $f^{-1}(x)$有意义的 x 的取值范围，而是由原函数 $y=f(x)$ 的值域来确定. 高考的填空题多次出现反函数试题.

6. 函数周期性. 函数 $y=f(x)$，$x\in \mathrm{D}$，若存在常数 $T\neq 0$，使任 $x\in \mathrm{D}$，有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称为周期，若存在最小正数 T_0，则 T_0 称为最小正周期.

二、函数的应用

1. 将实际问题抽象成数学问题，建立一元函数并求函数最值，其一般步骤是：

(1) 设计自变量.

(2) 将解决问题所涉及到的其他变量用自变量的解析式表示.

(3) 建立目标函数，确定函数的定义域.

(4) 根据目标函数解析式的特征用相应的方法求最值.

2. 函数在方程中的应用：

(1) 利用一元二次函数的图像讨论一元二次方程根的分布.

(2) 关于 x 的方程 $f(a, x)=0$，其中 a 是方程的字母系数，对于问题：当方程 $f(a, x)=0$ 在 D 中有解，求 a 的取值范围，若从 $f(a, k)=0$ 中能得到 $a=g(k)$，则 a 的取值范围为 $g(k)$ $(k\in \mathrm{D})$ 的值域.

3. 函数在不等式的应用：

关于 x 的不等式 $f(a, x)>0$（或 <0），其中 a 为字母系数. 对于问题：当 $x\in \mathrm{D}$，不等式 $f(a, x)>0$（或 <0）恒成立，求 a 的取值范围. 等价于 x 为自变量的函数 $f(a, x)$在 D 中的最小值大于零（或最大值小于零），求 a 的取值范围（设 $f(a, x)$的最小值或最大值存在）. 若能从 $f(a, x)>0$（或 <0）中得到 $a>g(x)$（或 $a<g(x)$），且 $g(x)$的最大值（或最小值）存在，则 a 的取值范围为：$a>g(x)_{\max}$（或 $a<g(x)_{\min}$）. 如 2000 年上海高考试卷第 14 题：$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}>0$ 在 $x\in[1, +\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

金牌教练

例 1　求下列函数的值域

(1) $y=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$；

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$；

(3) $y=-2+\sqrt{-x^2+x+1}$；

(4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$；

(5) $y=\dfrac{x^2-4x+13}{x-1}$，$x\in[2,5]$.

【解】 (1) $y=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ **的定义域为** R，

$$y=\frac{3(x^2+1)-5}{x^2+1}=3+\frac{-5}{x^2+1}.$$

$\because x^2+1\geqslant 1$，$\therefore 0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$，$-5\leqslant\dfrac{-5}{x^2+1}<0$，

$-2\leqslant 3+\dfrac{-5}{x^2+1}<3$，$\therefore$ $y=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ **的值域为**$[-2,3)$.

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **的定义域为** $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，

$$y=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2.$$

当 $x>1$，$x-1+\dfrac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}+2=4$，**当且仅当** $x=2$ **时取**“$=$”.
$\therefore$ $y\geqslant 4$.

当 $x<1$，$x-1+\dfrac{1}{x-1}+2=-\left(1-x+\dfrac{1}{1-x}\right)+2\leqslant-2\sqrt{(1-x)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}+2=0$，**当且仅当** $x=0$ **时，取**“$=$”. $\therefore$ $y\leqslant 0$，**故** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **的值域为** $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

(3) $\because -x^2+x+1=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$.

$\therefore 0\leqslant\sqrt{-x^2+x+1}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$y=-2+\sqrt{-x^2+x+1}$ **的值域为** $\left[-2,-2+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

(4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}=\dfrac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}=\dfrac{10^{2x}+1-2}{10^{2x}+1}=1+\dfrac{-2}{10^{2x}+1}$

$\because 10^{2x}+1>1$，$\therefore -2<\dfrac{-2}{10^{2x}+1}<0$，$y=1+\dfrac{-2}{10^{2x}+1}\in(-1,1)$.

(2) 由 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x=\pm 1$，∴ $f(x)$的定义域关于原点对称，当 $x=\pm 1$ 时，$f(x)=0$.
∴ $f(x)$既是奇函数又是偶函数.

(3) 由 $3^x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 0$，∴ $f(x)$的定义域关于原点对称.

$$f(x)=\left(\frac{2+3^x-1}{2(3^x-1)}\right)x=\frac{1}{2}\left(\frac{3^x+1}{3^x-1}\right)x,\ f(-x)=\frac{1}{2}(-x)\frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1}$$

$$=\frac{1}{2}(-x)\frac{1+3^x}{1-3^x}=f(x).$$

∴ $f(x)$是偶函数.

(4) $f(x)=|2x-3|$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，

$$f(1)=1,\ f(-1)=5,\ \therefore f(-1)\neq f(1),\ f(-1)\neq -f(1).$$

∴ $f(x)$是非奇非偶函数.

【说明】 1° 判断函数的奇偶性，先求函数的定义域，判断其是否关于原点对称. 本例第(2)题改为 $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$，其定义域为$\{1\}$，虽仍有 $f(x)=0$，但 $f(x)$是非奇非偶函数.

2° 对于对数、指数类的函数，往往要对函数解析式作适当的恒等变形，否则会误判. 如第(3)题，$f(-x)=-x\left(\frac{1}{3^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=-x\left(\frac{3^x}{1-3^x}+\frac{1}{2}\right)$，若式的变形只停留在上述形式，将会误判为非奇非偶函数.

例 3 已知 $a>0$，$a\neq 1$，$f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

(1) 判断 $f(x)$在其定义域内的单调性及奇偶性，并加以证明；

(2) 若 $f(x)-4$ 恰在$(-\infty,2)$上取负值，求 a 的值.

【解】(1) 设 $t=\log_a x\in\mathbf{R}$，则 $x=a^t$.

$f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$，$t\in\mathbf{R}$，即 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$，$x\in\mathbf{R}$.

∵ $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，∴ $f(x)$是奇函数.

任 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，设 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a}{a^2-1}(a^{x_1}-a^{-x_1}-a^{x_2}+a^{-x_2})=\frac{a}{a^2-1}(a^{x_1}-a^{x_2})\left(1+\frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}\right).$$

当 $a>1$，$a^{x_1}<a^{x_2}$，$\frac{a}{a^2-1}>0$，$1+\frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}>0$，∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$.

∴ $f(x)$是增函数；

当 $0<a<1$，$a^{x_1}>a^{x_2}$，$\frac{a}{a^2-1}<0$，$1+\frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}>0$，∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$.

∴ $f(x)$也为增函数.

综上所述，当 $a>0$，$a\neq 1$，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2) 令 $f(2)-4=0$. ∵ $f(x)-4(x\in\mathbf{R})$ 是增函数，故 $x>2$ 时，$f(x)-4>0$，而 $x<2$，$f(x)-4<0$. 即满足 $x\in(-\infty,2)$，恰有 $f(x)-4<0$. 由 $f(2)-4=0$，得 $\frac{a}{a^2-1}(a^2-a^{-2})-4=0$，解得 $a=2\pm\sqrt{3}$.

【说明】1° $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$ 中的自变量 x 与 $\log_a x$ 中的 x 有着本质区别，不能搞混淆. 否则会误认为 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$ 的定义域为 $x>0$.

2° 在判断函数的单调性时，要对 $a>1$ 与 $0<a<1$ 分类讨论.

3° $f(x)-4$ 恰在 $(-\infty, 2)$ 上取负值，等价于不等式 $f(x)-4<0$ 的解集为 $(-\infty, 2)$. 而 $f(x)$ 的单调性的判断是解决上述问题的基础.

例 4 定义在 R 上的奇函数有最小正周期 2，且 $x\in(0, 1)$ 时，$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的解析式；

(2) 实数 k 取何值时，方程 $f(x)=k$ 在 $[-1, 1]$ 上有解.

【解】(1) 对任 $x\in(-1, 0)$，则 $-x\in(0, 1)$，

$\therefore f(-x)=\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=\frac{2^x}{1+4^x}$. 又 $\because$ $f(x)$ 是奇函数，

故 $f(x)=-f(-x)=-\frac{2^x}{4^x+1}$, $x\in(-1, 0)$.

由 $f(-0)=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=0$, $\therefore$ $f(0)=0$.

$\because$ $f(x)$ 的周期为 2，$\therefore$ $f(-1)=f(-1+2)=f(1)$.

即 $-f(1)=f(1)\Rightarrow f(1)=0$, $f(-1)=0$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{-2^x}{4^x+1} & x\in(-1, 0);\\ 0 & x=\pm1,\ x=0;\\ \frac{2^x}{4^x+1} & x\in(0, 1).\end{cases}$$

(2) $f(x)=k$ 在 $[-1, 1]$ 上有解，等价于 k 在 $f(x)$ $(x\in[-1, 1])$ 的值域范围内取值. 即求 k 的范围，等价于求 $f(x)$ $(x\in[-1, 1])$ 的值域.

当 $x\in(0, 1)$ 时，设 $t=2^x\in(1, 2)$, $\frac{2^x}{4^x+1}=\frac{t}{t^2+1}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$.

对任 t_1, $t_2\in(1, 2)$ 设 $t_1<t_2$,

$t_1+\frac{1}{t_1}-t_2-\frac{1}{t_2}=(t_1-t_2)\left(1-\frac{1}{t_1t_2}\right)$. $\because$ $t_1-t_2<0$, $t_1t_2>1$, $\therefore$ $\frac{1}{t_1t_2}<1$，故 $1-\frac{1}{t_1t_2}>0$,

$\therefore$ $t_1+\frac{1}{t_1}<t_2+\frac{1}{t_2}$，即 $t+\frac{1}{t}$, $t\in(1, 2)$ 是增函数，进而得 $\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$, $t\in(1, 2)$ 是减函数.

$\therefore$ $\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\in\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$，当 $x\in(0, 1)$ 时，$\frac{2^x}{4^x+1}\in\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

同理可求得，当 $x\in(-1, 0)$ 时，$-\frac{2^x}{4^x+1}\in\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$.

$\therefore$ k 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

例 5 求下列函数的最值：

(1) $f(x)=x^2+ax+2$, $x\in[2, 4]$;

(2) $f(x)=kx^2+2kx+3$，$x\in[-3,2]$；

(3) $f(x)=-3x^2-3x+\dfrac{1}{4}+4b^2$，$x\in[-b,b]$，$b>0$.

【解】(1) $f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+2-\dfrac{a^2}{4}$，$x\in[2,4]$.

1° 当$-\dfrac{a}{2}>4$，即$a<-8$时，$f(x)_{\min}=f(4)=18+4a$，$f(x)_{\max}=f(2)=6+2a$；

2° 当$-\dfrac{a}{2}<2$，即$a>-4$时，$f(x)_{\min}=f(2)=6+2a$，$f(x)_{\max}=f(4)=18+4a$；

3° 当$2\leqslant-\dfrac{a}{2}\leqslant3$，即$-6\leqslant a\leqslant-4$时，$f(x)_{\min}=2-\dfrac{a^2}{4}$，$f(x)_{\max}=f(4)=18+4a$；

4° 当$3<-\dfrac{a}{2}\leqslant4$，即$-8\leqslant a<-6$时，$f(x)_{\min}=2-\dfrac{a^2}{4}$，$f(x)_{\max}=f(2)=6+2a$.

(2) 1° 当$k=0$时，$f(x)=3$，$f(x)_{\min}=f(x)_{\max}=3$；

2° 当$k>0$时，$f(x)=k(x+1)^2+3-k$，又$-1\in[-3,2]$，

故$f(x)_{\min}=3-k$，$f(x)_{\max}=f(2)=8k+3$；

3° 当$k<0$时，$f(x)_{\max}=3-k$，$f(x)_{\min}=8k+3$.

(3) $f(x)=-3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+4b^2+1$，$x\in[-b,b]$.

1° 当$-\dfrac{1}{2}<-b$，即$0<b<\dfrac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(b)=b^2-3b+\dfrac{1}{4}$，$f(x)_{\max}=f(-b)=b^2+3b+\dfrac{1}{4}$；

2° 当$-b\leqslant-\dfrac{1}{2}$，即$b\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(b)=b^2-3b+\dfrac{1}{4}$，$f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4b^2+1$.

【说明】本例主要讨论含字母系数的二次函数的最值问题，字母系数的不同取值影响着抛物线顶点的横坐标、张口方向、二次函数定义域区间，从而影响二次函数的最值. 因此要分类讨论. 分类的标准按抛物线顶点横坐标何时属于定义域，何时不属于定义域，张口未定的情况下，要讨论张口方向，即二次项系数的正、负. 对于第(2)题不要遗漏“$k=0$”的特殊情况. 这是因为条件中没有明确$f(x)$是二次函数.

例6 轮船每小时使用的固定费用(不论速度如何)是c元，而每小时使用的可变费用和轮船速度的平方成正比，当速度是20海里/小时的时候，它的可变费用是200元每小时，轮船的最大速度为40海里/小时，如甲、乙两地相距1000海里，轮船从甲地行驶到乙地.

(1) 试用解析式将所需的总费用表示成船速的函数；

(2) 当$c=200$时，求总费用的最小值；

(3) 当$c=1000$时，求总费用的最小值；

(4) 当$c\in[200,1000]$时，求总费用的最小值.

【解】(1) 设船速为v海里/小时，总费用为y元，可变费用为q元/小时. 那么全程所用的时间是$\dfrac{1000}{v}$小时. 按题意：

$$q=kv^2\ (k\text{ 是比例系数}).$$