# 高考热点与冷点

丛书主编　任志鸿
本册主编　董立木　吕新亮　庞月伟

南方出版社

# 用信息备考

## ——代前言

高考改成了“3＋X”，备考却“一如继往”，信息社会的人们在这里也要“日出而作，日落而息”，“自由”在这里却步而止。

如何让高考在信息社会变得简单起来，高考备考有没有捷径？

新版《高考热点与冷点》在对传统高考深入研究的基础上，以学科内知识的综合和巩固为前提，结合最新高考信息和社会热点，通过由此形成的网络来把握热点，通过热点来体现考点。用信息备考，让高考在信息社会变得简单起来，让备考更便捷有效，是2002年新版《高考热点与冷点》的最大特点。

本书的热点包括三个方面：知识考查热点、社会热点、学科间综合热点。知识考查热点是从近三年高考中筛选出来的稳定考点，其理论性强，与社会实际联系少，预测在2002年高考再现率较高；社会热点是将社会热点分门别类，罗列出若干个专题，并指出其与所学知识的内在联系；学科间综合热点是指本学科与其他学科的知识结合点、交叉点，预测其在2002年高考中出现的机率较高。

本书的冷点包括冰点和盲点两方面：冰点指以前常考的热点，由于高考改革，近三年不考了的考点；盲点指以往高考不考或很少考的知识点，由于高考改革的深入，或根据2002年《考试说明》的要求，很可能在2002年高考中出现的考点。

找准高考的热点，帮助考生有的放矢地“临考磨枪”！找准高考

冷点,帮助考生提高复习效率,更好地“查漏补缺”!这是本书的基本编写理念。

本书的栏目主要有:[热点透析][仿真试题][方法精要](或[小结])[创新思维训练]。备考实践证明,热点一旦选定,便具有较强的稳定性,而题则是以这些点为中心,不断变化。[热点透析]就是要给师生一双神奇的“慧眼”,能通过对近几年考题的分析,准确地掌握整个热点并对该热点在 2002 年“3+X”高考中的变化趋势了然于胸。[仿真试题]是在[热点透析]基础上结合有关 2002 年高考的最新信息,对 2002 年高考的科学、准确的近距离预测。[方法精要](或[小结])是通过[仿真试题]的实战演习,进一步总结该热点的发展、变化趋势,总结在这些发展趋势下最简练有效的应对方法。最后通过[创新思维训练]让考生进行全方位实战训练,彻底掌握热点,从容面对新高考。

丛书的编写原则是深入浅出,由“透析”到“仿真试题”是深入,由“方法精要”到“创新思维训练”是浅出。丛书的结构形式是“由面到点”,再“由点到面”。高考题是“面”,“点”是指学生必须掌握的知识点,即“热点”。由往年的高考题到知识点是“由面到点”,贯彻了“深入浅出”中的“深入”原则;由“热点”到对今年高考题的预测是“由点到面”,贯彻了“深入浅出”中的“浅出”原则。

希望本书能成为你高考路上的快乐之源!

因时间仓促,难免有疏漏和不妥之处,诚盼老师和同学提出宝贵的意见和建议。

编　者

2002 年 3 月

THE BEST DESIGN

# 目　　录

# 上篇 知识考查热点与冷点导航

## 热点1 二次函数

### 热点透析

二次函数是高中生所学过的最正规、最完备的函数之一,它最能体现学生对函数思想的把握,是联系高中与大学知识的纽带,在历届高考中的再现率为100%,2002年的高考将会继续考查.

纵观近几年来高考数学试题,涉及二次函数及其应用题的题型连年出现,成为数学高考的一个热点,并且热度始终不减,归纳起来,主要有两种类型:一种是直接考查二次函数知识的试题;另一种是运用构造二次函数法求解的综合题试题,今后考查的方向不变,试题仍以这两种类型为主,是重点复习的内容.

1996年高考第25题考查了二次函数的单调性;1997年高考第24题考查了二次函数的对称性及二次方程的关系,这是考查二次函数相关知识的代表;而近几年的高考题中更注重二次函数与其他知识的联系,在知识的交汇处出题,考查了学生分析问题、解决问题的能力,使题目更具有时代感.

如2000年春季高考京皖卷第24题:已知函数

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in[0,\frac{1}{2}) \\ f_2(x) & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases},$$

其中 $f_1(x)=-2(x-\frac{1}{2})^2+1, f_2(x)=-2x+2$,

(1) 在右面坐标系上画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 设 $y=f_2(x)(x\in[\frac{1}{2},1])$ 的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1, a_2=g(a_1),\cdots,a_n=g(a_{n-1})$;求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

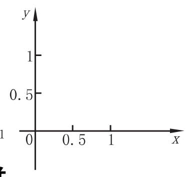


图1—1

(3) 若 $x_0 \in [0, \frac{1}{2})$，$x_1 = f(x_0)$，$f(x_1) = x_0$，求 $x_0$.

简析：本题不仅考查了二次函数，而且考查了数列极限、函数图象，求函数的反函数、等比数列前 $n$ 项和等知识；着重考查了综合应用所学的知识、思想和方法解决问题的能力；本题是一个综合性较强的难题.

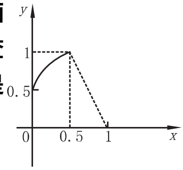


图 1—2

答案：(1) 如图 1—2 所示.

(2) $a_n = \frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$

$= \frac{2}{3}$

(3) $x_0 = \frac{1}{4}$.

再如：2000 年上海高考第 19 题：已知函数 $f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x}$，$x \in [1, +\infty)$，

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$，$f(x) > 0$ 恒成立，试求实数 $a$ 的取值范围.

解析：(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$f(x) = x + \frac{1}{2x} + 2$

$\because f(x)$ 在区间$[1, +\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x)$ 在区间$[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(1) = \frac{7}{2}$.

(2)（解法一）在区间$[1, +\infty)$ 上，$f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x} > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a > 0$ 恒成立；设 $y = x^2+2x+a$，$x \in [1, +\infty)$，$y = x^2+2x+a = (x+1)^2+a-1$ 递增，$\therefore$ 当 $x = 1$ 时，$y_{\min} = 3+a$. 于是当且仅当 $y_{\min} = 3+a > 0$ 时，函数 $f(x) > 0$ 恒成立，故 $a > -3$.

（解法二）$f(x) = x + \frac{a}{x} + 2$，$x \in [1, +\infty)$

当 $a \geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的值恒为正；当 $a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 递增，故当 $x = 1$ 时，$f(x)_{\min} = 3+a$，于是当且仅当 $f(x)_{\min} = 3+a > 0$ 时，$f(x) > 0$ 恒成立，故 $a > -3$.

（解法三）在区间$[1, +\infty)$ 上 $f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x} > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > -x^2-2x$ 恒成立.

又 $\because x \in [1, +\infty)$，$a > -x^2-2x$ 恒成立.

$\therefore a$ 应大于 $\mu=-x^2-2x, x\in[1,+\infty)$ 的最大值.

$\therefore a>-(x+1)^2+1, x=1$ 时 $\mu_{\max}=-3$. 故 $a>-3$.

纵观上述解题过程可见,此题入手易,方法多,考查灵活,实践了在知识交汇处出题,是一道难得的好题.

## 仿真试题

[试题1] 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$,是否存在常数 $a$、$b$、$c$,使不等式 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 $x$ 都成立;若存在,求出 $a$、$b$、$c$;若不存在,说明理由.

解答:假设存在符合题意的 $a$、$b$、$c$,

$\because f(x)$ 的图象过点 $(-1,0)$, $\therefore f(-1)=0$, $\therefore a-b+c=0$ ①

又 $\because x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 $x$ 都成立,特别地取 $x=1$,则 $1\leqslant a+b+c\leqslant 1$, $\therefore$ 必有: $a+b+c=1$ ②

解①②得: $b=\frac{1}{2}$, $a+c=\frac{1}{2}$, $\therefore f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$

由 $\begin{cases} f(x)\geqslant x \\ f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)\end{cases}$ 得 $\begin{cases} ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\geqslant 0 & ③ \\ (a-\frac{1}{2})x^2+\frac{1}{2}x-a\leqslant 0 & ④\end{cases}$

对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,由③ $a=0$ 时, $x\leqslant 1$ 不合题意.

$\therefore \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \frac{1}{4}-4a(\frac{1}{2}-a)\leqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ (4a-1)^2<0\end{cases}$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

将 $a=\frac{1}{4}$ 代入④得 $x^2-2x+1\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore$ 存在满足条件的 $a$、$b$、$c$,且 $a=c=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$.

[试题2] 设集合 $A=[-1,1]$, $B=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$,函数 $f(x)=2x^2+mx-1$.

(1) 设不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $C$,当 $C\subseteq(A\cup B)$ 时,求实数 $m$ 的取值范围;

(2) 若对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(1+x)=f(1-x)$ 成立,试求 $x\in B$ 时, $f(x)$ 的值域;

(3) 当 $m\in A$, $x\in B$ 时,证明: $|f(x)|\leqslant\frac{9}{8}$.

**解答**：(1)$C \subseteq (A \cup B) = [-1,1] \cup [-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}] = [-1,1]$，二次函数 $f(x)$ 图象的开口向上，且 $\Delta = m^2 + 8 > 0$ 恒成立，即图象始终与 $x$ 轴有两个不同交点，据题意要使这两个交点的横坐标 $x_1$、$x_2 \in [-1,1]$，当且仅当

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \\ -1 < \frac{m}{4} < 1 \end{cases}$$ **解得**：$-1 \leqslant m \leqslant 1$

(2)$\because$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1+x) = f(1-x)$

$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，$\therefore -\frac{m}{4} = 1$，$\therefore m = -4$，从而 $f(x) = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x-1)^2 - 3$

$\therefore$ 当 $x \in B$ 即 $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 时，$f(x)$ 单调递减．

$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}$，$f(x)_{\max} = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$

$\therefore f(x)$ 的值域是$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

(3)$\because m \in A$，$x \in B$，$\therefore |m| \leqslant 1$，$x^2 \leqslant \frac{1}{2}$，$\therefore 1 - 2x^2 \geqslant 0$，

$\therefore |f(x)| = |2x^2 - 1 + mx| \leqslant |2x^2 - 1| + |mx| = 1 - 2x^2 + |mx| \leqslant 1 - 2x^2 + |x| = 1 - 2|x|^2 + |x| = -2(|x| - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8} \leqslant \frac{9}{8}$.

当且仅当 $|x| = \frac{1}{4}$ 时，等号成立．

[试题 3] 二次函数 $y = f(x) = ax^2 + (2a-1)x - 3$ 在区间$[-\frac{3}{2},2]$上的最大值为 1，求 $a$ 值．

**解答**：$f(x) = a(x + \frac{2a-1}{2a})^2 - (2 + a + \frac{1}{4a})$ 的对称轴为动直线 $x = \frac{1}{2a} - 1$，且开口方向不确定，但该函数 $f(x)$ 的最大值只可能在 $x_1 = -\frac{3}{2}$，$x_2 = 2$ 或 $x_3 = \frac{1}{2a} - 1$ 处取得，分三种情况：

(1) 令 $f(-\frac{3}{2}) = 1$，得 $a = -\frac{10}{3}$，此时对称轴为直线 $x = -\frac{23}{20}$，因 $-\frac{23}{20} \in [-\frac{3}{2},2]$，$a = -\frac{10}{3} < 0$，$\therefore y_{\max}$ 不可能在 $x_1$ 处取得，因此，$a = -\frac{10}{3}$ 不符合题意，

舍去.

(2) 令 $f(2)=1$,得 $a=\frac{3}{4}$,此时对称轴为直线 $x=-\frac{1}{3}$,因 $-\frac{1}{3}\in[-\frac{3}{2},2]$ 且 $a=\frac{3}{4}>0$,$y_{\max}=f(2)$,因此,$a=\frac{3}{4}$ 符合题意.

(3) 令 $f(\frac{1}{2a}-1)=1$,得 $a=\frac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$,要使 $y_{\max}=f(\frac{1}{2a}-1)$,当且仅当 $a<0$ 且 $-\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2a}-1\leqslant2$ 时成立,经检验,仅当 $a=-\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})$ 时,才有 $-\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2a}-1\leqslant2$,因此,$a=-\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})$ 符合题意.

综上可知符合题意的 $a$ 值分别为:$a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})$.

[试题 4] 实数 $a$、$b$、$c$ 满足 $(a+c)(a+b+c)<0$,证明:$(b-c)^2>4a(a+b+c)$.

证明:从 $(b-c)^2>4a(a+b+c)$ 类比二次方程中判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的形式,可构造二次函数 $f(x)=x^2-(b-c)x+a(a+b+c)$

$\because(a+c)(a+b+c)<0$,取 $x_0=a+b+c$,则 $f(x_0)=(a+b+c)^2-(b-c)(a+b+c)+a(a+b+c)=(a+b+c)[(a+b+c)-(b-c)+a]=2(a+c)(a+b+c)<0$

又 $f(x)$ 开口向上　$\therefore f(x)$ 与 $x$ 轴相交

$\therefore\Delta=(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$

即 $(b-c)^2>4a(a+b+c)$

[试题 5] 已知 $A$、$B$ 是 $\triangle ABC$ 的两个内角,且 $\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}B$ 是方程 $x^2+mx+m+1=0$ 的两个实根,求 $m$ 的取值范围.

解答:由韦达定理得:$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B=-m$,$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B=m+1$,$\therefore\mathrm{tg}(A+B)=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{1-\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B}=\frac{-m}{1-(m+1)}=1$,$\because0<A+B<\pi$,$\therefore A+B=\frac{\pi}{4}$,$\therefore0<A<\frac{\pi}{4}$,$0<B<\frac{\pi}{4}$,故 $\mathrm{tg}A\in(0,1)$,$\mathrm{tg}B\in(0,1)$.

因此方程 $x^2+mx+m+1=0$ 的两个实根均在 $(0,1)$ 内,问题由此可转化为:$f(x)=x^2+mx+m+1$ 与 $x$ 轴有两个交点,且交点的横坐标在 $(0,1)$ 内,又 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=-\frac{m}{2}$.

$$\therefore\begin{cases}f(-\frac{m}{2})\leqslant2\\f(0)>0\\f(1)>0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}-\frac{m^2}{4}+m+1\leqslant0\\m+1>0\\2m+2>0\end{cases}$$

高考热点与冷点·数学

解得:$-1 < m < 2-2\sqrt{2}$.

故 $m$ 的取值范围是$(-1,2-2\sqrt{2})$

[试题 6] 行驶中的汽车,在刹车后由于惯性的作用,要继续向前滑行一段距离后才会停下,这段距离叫刹车距离．为测定某种型号汽车的刹车性能,对这种型号的汽车在国道公路上进行测试,测试所得数据如下表:

| 刹车时车速 $v$(千米/小时) | 15 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 刹车距离 $s$(米) | 1.23 | 7.30 | 12.20 | 18.40 | 25.80 | 44.40 |

在一次由这种型号的汽车发生的交通事故中,测得刹车距离为 15.13 米,问汽车在刹车时的速度为多少?(假设发生交通事故的路面与国道公路路面的条件相仿)

解答:以 $v$ 为横坐标,$s$ 为纵坐标,建立直角坐标系,并在坐标系中指出点 $A(15,1.23)$、$B(30,7.30)$、$C(40,12.20)$、$D(50,18.40)$、$E(60,25.80)$、$F(80,44.40)$

由这六个点可以估计出它们在一条抛物线上,因为车速为零时,刹车距离为零．故该抛物线过原点．

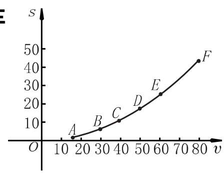

图 1—3

设 $s=av^2+bv$ ∵ $B$、$F$ 两点在抛物线上,

$\therefore \begin{cases}7.30=900a+30b\\44.40=6400a+80b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\approx 0.0062\\b\approx 0.0563\end{cases}$

$\therefore s=0.0062v^2+0.0563v$ ①

将 $A$、$C$、$D$、$E$ 各点坐标代入 ① 式检验．

如,取 $v=40$ 和 60,代入 ① 式,分别求得 $s\doteq 12.17$ 和 25.70 与表中数据的偏差都是许可的,这说明二次函数 $s=0.0062v^2+0.0563v$ 描述的 $s$ 与 $v$ 的关系完全合理．

当 $s=15.13$ 时,由 $15.13=0.0062v^2+0.0563v$ 解得 $v\approx 45.07$. 故刹车时车速为 45.07 千米/小时．

## 方法精要

高考始终对二次函数进行重点考查,考查的方向仍是两个方面:一种是直接考查二次函数知识的试题,另一种是构造二次函数去解决实际问题．前几年在高考中,对二次方程根的分布,二次函数最值,二次函数的对称性、单调性等都充分地考查过．展望今后高考,对二次函数的考查应侧重于特殊与一般的关系上如试题 1;二次函数与其他知识的交汇点处,如二次函数与三角函数,试题 5 就是很好的例题;再如二次函数与数列,二次函数与解析几何,构造二次函数解决问题的代数证明题等．

## 创新思维训练

### 一、选择题

1. 设 $f(x+1)=x^2+2x-1, x\in[1,2]$，那么 $f(x+1)$ 的反函数 ( )

A. 在$[1,2]$上是增函数　B. 在$[1,2]$上是减函数

C. 在$[2,7]$上是减函数　D. 在$[2,7]$上是增函数

2. 若函数 $f(x)=x^2+2x+3$ 在区间$[m,0]$上的最大值为 3，最小值为 2，则实数 $m$ 的取值范围是 ( )

A. $[1,2]$　B. $(-\infty,-1]$　C. $[-1,0]$　D. $[-2,-1]$

3. 在区间$[\frac{1}{2},2]$上函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 在同一点取得相同的最小值，那么 $f(x)$ 在$[\frac{1}{2},2]$上的最大值是 ( )

A. $\frac{13}{4}$　B. 4　C. 8　D. $\frac{5}{4}$

4. 若二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间$[-1,1]$内至少存在一点 $C(c,0)$，使 $f(c)>0$，则实数 $p$ 的取值范围是 ( )

A. $-\frac{1}{2}<p<1$　B. $-3<p<\frac{3}{2}$

C. $p\leqslant -3$　D. $-3<p<-\frac{1}{2}$ 或 $1<p<\frac{3}{2}$

5. 已知 $f(x)=(x-a)(x-b)-2$，且 $\alpha$、$\beta$ 是方程 $f(x)=0$ 的两根，则实数 $a$、$b$、$\alpha$、$\beta$ 的大小关系可能是 ( )

A. $\alpha<a<b<\beta$　B. $a<\alpha<\beta<b$

C. $a<\alpha<b<\beta$　D. $\alpha<a<\beta<b$

6. 对任意 $a\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值总大于 0，则 $x$ 的取值范围是 ( )

A. $\{x\mid 1<x<3\}$　B. $\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$

C. $\{x\mid 1<x<2\}$　D. $\{x\mid x<1$ 或 $x>2\}$

### 二、填空题

7. 已知关于 $x$ 的方程 $x^2+(m-2)x+2m-1=0$ 有一根在$(0,1)$内，则 $m$ 的取值范围是________.

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与两坐标轴的交点分别为$(-1,0)$和$(0,-1)$，且顶点在 $y$ 轴的右侧，则 $b$ 的取值范围是________.

9. 设函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，若当 $x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，则当 $x>1$ 时，$f(x)$ 的表达式为________.

三、解答题

10. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(1)=2$，在 $x=t$ 处($t\in\mathbf{R}$)取得最值；若 $y=g(x)$ 为一次函数，且 $f(x)+g(x)=x^2+2x-3$.

(1) 求 $y=f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)\geqslant -1$ 恒成立，求 $t$ 的取值范围.

11. 设二次函数 $f(x)=x^2+px+q$，已知$(p-1)^2\leqslant 4q$.

(1) 求证方程 $f(x)=x$ 与 $f[f(x)]=x$ 在实数范围内同解；

(2) 求证不等式 $f[f(x)]\geqslant x$ 对一切 $x$ 恒成立.

12. 已知 $f(x)=x^2+ax+b(a、b\in\mathbf{R})$ 的定义域为$[-1,1]$.

(1) 记 $|f(x)|$ 的最大值为 $M$，求证：$M\geqslant\frac{1}{2}$；

(2) 求出(1) 中的 $M=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的表达式.

13. 某种商品，生产 $x$ 吨，需费用 $100+5x+\frac{1}{10}x^2$ 元，而卖出 $x$ 吨的价格是每吨 $p$ 元，$p=a+\frac{x}{b}$($a、b$是常数)，如果生产的产品全部卖掉，当生产量是 150 吨时利润最大，这时每吨价格为 40 元，求 $a、b$ 的值.

# 热点 2　函数的图象与性质

## 热点透析

函数是中学数学研究的最主要内容之一，幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等构建成高中代数的一条重要主线，对函数的图象及性质的考查以及利用函数性质解决各种数学问题及实际问题，可以说高考年年考，各种题型也比较齐全，近几年的专题显露出在知识网络的交汇处设计试题的特点，依此可见，其他数学知识围绕函数这条主线进行融汇贯通，必将使函数的考查变得更加灵活、内容更丰富．

纵观近年高考，对函数的考查主要集中在映射、函数的定义域、值域、反函数性质、单调性、奇偶性、周期性、对称性、函数最值、图象变换等问题，考查全面、层次多．如 1999 年高考中对函数图象及性质的考查涉及到第 2、3、4、5、11、20、23 等题（以理科为例），分值占到 38 分．2000 年第 1、4、5、6、17、19、21 等题考查了映射、奇偶性、分段函数、三角函数图象性质等内容，分值占 50 分．2001 年全国卷（理）函数问题所占分值为 39 分，尽管比 2000 年有所降低，仍然达到了相当的广度和深度．2001 年上海高考理科卷，直接考查函数问题的分值达 54 分．可以预见，在 2002 年高考中，函数图象及性质以及函数思想的考查仍是重中之重，加大对函数部分的复习力度，是非常必要的．

下面依据近几年考题，分析今年复习要注意的几个问题．

先看 1999 年理科题：设复数 $z=3\cos\theta+i2\sin\theta$．求函数 $y=\theta-\arg z(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的最大值及对应的 $\theta$ 值．

简析：本题主要考查知识的综合性和灵活应用，试题的知识载体落在知识网络的交汇点上，以复数为框架，考查了三角变换、函数性质、函数最值，是一道区分度很好的试题．

简解：（解法一）由 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，得 $\mathrm{tg}\theta>0$，由 $z=3\cos\theta+i2\sin\theta$

得 $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 及 $\mathrm{tg}(\arg z)=\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta}=\frac{2}{3}\mathrm{tg}\theta$

故 $\mathrm{tg}y=\mathrm{tg}(\theta-\arg z)=\dfrac{1}{\dfrac{3}{\mathrm{tg}\theta}+2\mathrm{tg}\theta}$

高考热点与冷点·数学

由 $\mathrm{tg}\theta > 0 \quad \mathrm{tg}y \leqslant \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$

当 $\frac{3}{\mathrm{tg}\theta} = 2\mathrm{tg}\theta$ 时，即 $\mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，取“=”

∴ 当 $\theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$y_{\max} = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{12}$.

（解法二）计算 $\cos(\arg z)$ 和 $\sin(\arg z)$ 的值

而 $y = \theta - \arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 且 $\sin y$ 单增.

$\sin y = \sin(\theta - \arg z) = \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{13 + 9\mathrm{ctg}^2\theta + 4\mathrm{tg}^2\theta}} \leqslant$
$\frac{1}{\sqrt{13+12}} = \frac{1}{5}$

由 $9\mathrm{ctg}^2\theta = 4\mathrm{tg}^2\theta$ 得 $\mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时 $y_{\max} = \arcsin\frac{1}{5}$.

（解法三）计算 $\cos y \geqslant \frac{2}{5}\sqrt{6}$. 进一步利用单调性，可求得 $y_{\max} = \arccos\frac{2}{5}\sqrt{6}$.

可见，不管利用哪种方法，对三角函数的考查都是相当深刻的. 如果此题是知识交汇点上的一道好题的话，那么同是 1999 年理科的另一道题则把交汇点出题上升到更高层次：已知函数 $y = f(x)$ 的图象是自原点出发的一条折线，当 $n \leqslant y \leqslant n+1 (n = 0,1,2,\cdots)$ 时，该图象是斜率为 $b^n$ 的线段（其中正常数 $b \neq 1$）. 设数列 $\{a_n\}$，由 $f(x_n) = n (n = 1,2,\cdots)$ 定义.

（1）求 $x_1$、$x_2$ 和 $x_n$ 的表达式；

（2）求 $f(x)$ 的表达式，并写出其定义域；

（3）证明：$y = f(x)$ 的图象与 $y = x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点.

简析：从考查知识的角度看，抓住了函数概念的实质，通过图象求表达式和定义域，解题过程交汇了数列、极限、不等式、归纳法等知识和方法，几乎涵盖了高中代数的主要内容. 此题显现出高数的一点影子，注意了与高等数学的衔接，对解题者提出了更高的要求. 可以说 1999 年全国卷中的“交汇点题”提高了难度，对高三备考提出新的要求.

2000 年理 19 题：设 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ax$，其中 $a > 0$.

（1）解不等式 $f(x) \leqslant 1$；

（2）求 $a$ 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

简析：本题继续发扬了 1999 年的出题风格. 以不等式为框架，将函数与解不等式有机结合，在解不等式时又可用函数的思想去解决，同时又考查了函数单调

性的判断证明,有效地考查了运算能力,推理论证的能力.

**简解**:(1)(**解法一**)$f(x)\leqslant 1\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\leqslant 1+ax$,而 $1\leqslant 1+ax$,$ax\geqslant 0$,$\therefore x\geqslant 0$

$\therefore$ 原不等式等价于 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2+1\leqslant(1+ax)^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ (a^2-1)x+2a\geqslant 0\end{cases}$

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时,不等式解集为 $[0,\dfrac{2a}{1-a^2}]$.

当 $a\geqslant 1$ 时,不等式解集为 $[0,+\infty)$.

此时探求出 $x\geqslant 0$ 是至关重要的,它使解题步骤简单,否则依以下解法二进行解答会非常麻烦.略解如下:

(**解法二**)原式 $\Leftrightarrow\begin{cases}1+ax\geqslant 0\\ x^2+1\leqslant(1+ax)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{1}{a}\\ x[(a^2-1)x+2a]\geqslant 0\end{cases}$

然后分 $0<a<1$ 和 $a>1$,$a=1$ 进行讨论.

(2)(略)

再看 2001 年高考的压轴题:设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数,其图象关于直线 $x=1$ 对称,对任意 $x_1$、$x_2\in[0,\dfrac{1}{2}]$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,且 $f(1)=a>0$.

(1) 求 $f(\dfrac{1}{2})$,$f(\dfrac{1}{4})$;

(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数;

(3) 记 $a_n=f(2n+\dfrac{1}{2n})$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

**简析**:此题考查了函数的概念、图象、奇偶性、周期性以及数列极限等基础知识,把函数与极限有机结合起来,较好地考查了学生的运算能力和思维能力.

**简解**:(1) 关键在于利用已知关系式得出:

$f(1)=f(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2})=[f(\dfrac{1}{2})]^2\Rightarrow f(\dfrac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$,同理得 $f(\dfrac{1}{4})=a^{\frac{1}{4}}$.

(2) 突破口是 $f(1-x)=f(1+x)\Rightarrow f(x+2)=f(-x)$

$\because f(-x)=f(x)$ 得 $f(x+2)=f(x)$,得证.

(3) 关键在于由 $T=2$,得 $a_n=f(2n+\dfrac{1}{2n})=f(\dfrac{1}{2n})$.

再由 $f(1)=f(2n\cdot\dfrac{1}{2n})=f(\underbrace{\dfrac{1}{2n}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}}_{n\text{个}})=[f(\dfrac{1}{2n})]^{2n}=a$

高考热点与冷点·数学

$\therefore a_n = a^{\frac{1}{2n}}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n) = 0$.

在知识的交汇点上出题，我们还可以找出许多例子，如2001年上海卷第18题，2001年津晋赣卷（新教材）第19题．总而言之，在2002年的备考中加大对不同知识点的交融是必要的，但同时又要求我们对函数的有关基础知识有更进一步的认识，在小处着手．向2001年全国卷（理）中，第1、4、6、8、10题都是对某一知识点的考查．

## 仿真试题

［试题1］设 $f(x)$ 为定义在R上的奇函数，当 $x\leqslant -1$ 时，$y=f(x)$ 的图象是经过点 $A(-1,-1)$，斜率为1的射线，又在 $y=f(x)$ 的图象上有一部分是经过 $A(-1,-1)$，$B(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ 两点的三次函数图象上的曲线段．

(1) 写出函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 用单调性定义证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，从而推测 $f(x)$ 在R上的单调性．

解答：(1) 当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=x$

$\because f(x)$ 为R上的奇函数，$\therefore x\geqslant 1, f(x)=x$.

且 $f(x)$ 的曲线段部分经过 $(0,0)$、$(-1,-1)$、$(1,1)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ 四点，将其代入 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 得

$$\begin{cases} d=0 \\ -a+b-c+d=0 \\ a+b+c+d=1 \\ \frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+d=\frac{1}{8} \end{cases} \quad 得 \begin{cases} a=1 \\ b=c=d=0 \end{cases}$$

$\therefore f(x)=x^3$　　$\therefore$ 函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -1 \\ x^3 & -1<x<1 \end{cases}$

(2) 任取 $x_1$、$x_2\in[0,+\infty)$，$x_2>x_1$，即 $x_2-x_1>0$

当 $0\leqslant x_1<x_2<1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$

当 $0\leqslant x_1<1\leqslant x_2$ 时，$x_2-1\geqslant 0, 1-x_1^3>0$

$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1^3=(x_2-1)+(1-x_1^3)>0$

当 $1\leqslant x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$

$\therefore$ 综合以上知 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数．