前　言

QIAN YAN

您现在打开的《高考排雷·数学》修订本)是高考第二阶段复习用书。

"高考排雷"就是要为同学们排除高考中容易出错、造成失分的环节上的"雷"。为此,本书紧密结合高考考试说明和考生实际,确定重点,在认真分析历届考生高考答卷的得失的基础上,选准"雷区",高效"排雷"。

本书所涉及的"雷区",包括历届高考试题中容易失分的知识点,常见的思路缺陷、技能缺陷以及常见的心理障碍,我们力求使同学们在攻关阶段,用尽可能少的时间,集中精力,抓住重点,突破难点,为进军高考铺平道路。

一、丛书特色

1. 采用专题形式,突出重点。本书对选取的高考"雷区"采用专题的形式,全面、细致、深入、充分的讲解,重点突出,深刻透彻。

2. 选择典型错题,针对性强。典型例题,全部采用1998～2002年的高考试题,以充分反映该专题知识点在高考中考查情况,剖析典型错例,破解迷惑性较强的干扰项,深入研究,准确"排雷"。

3. 总结规律,注重思维能力指导。在对典型例题追踪分析之后,由点到面,把基础知识,通性通法,有秩序、有层次、有个性的联系起来,充分体现、透析其本质及规律,加强对各种能力尤其是思维能力的指导。

二、栏目设置

整体结构划分为两大部分:

第一部分　高考雷区巡查

本部分共分为十八个专题,其栏目设置如下:

1. 雷区扫描　将本专题常见的失分点依次列出"示众",精炼语言"点击"失误根

源。

2.排雷示例　选取高考试题中有代表性的典型题,以展示失分的知识点,突出“雷区”,明确复习目标。

[雷区探测]结合典型例题,对该知识点在高考中的考查情况和变化趋势进行全面分析,说明其在近几年高考中的地位以及考查要求,结语精辟深刻,一针见血,居高临下,概括性强,做到有的放矢,言之有物,使同学们直接把握本知识点的内容。

[雷区诊断]结合典型例题,对本知识点进行探讨、分析、查找根源,分析过程,展示思路,阐发深透,点拨到位,破解干扰支,找出失误原因,从而使同学们增强自主分析的能力,形成规范、合理、科学的审题和解题思路,总结规律,培养学生的创新思维能力。从理论的高度,总结出明确的方法,提炼出清晰的概念。

3.排雷演习　精选习题、巩固练习,矫正思维,强化“排雷”方法。

第二部分　排雷模拟

本部分精心编制了五套高考数学模拟试题,以对复习进行全面总结,对能力训练进行全面提升,并突出对最新高考考查信息的渗透。

本书为了突出矫正解题思路和方法,还特别编制了详细的答案解析。我们是想选取一个全新而独特的角度,破译高考,助同学们一臂之力。但由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请批评指正。

编　者

2002年8月

目录

MU LU

第一部分 高考雷区巡查

专题一 集合的关系与运算……（01）
专题二 函数与函数的构造……（09）
专题三 函数性质及其分析……（25）
专题四 函数图象及其变换……（44）
专题五 三角函数……（57）
专题六 有关三角形问题……（74）
专题七 不等式的应用与证明……（86）
专题八 不等式的解法……（97）
专题九 等差数列与等比数列……（106）
专题十 有关数列的探索与证明……（119）
专题十一 复数……（132）
专题十二 空间线面平行与垂直的判定与证明……（144）
专题十三 空间的角和距离……（154）
专题十四 简单几何体……（167）
专题十五 直线与圆……（180）

LU MU 目录

专题十六　圆锥曲线的几何性质……………… (187)

专题十七　求曲线方程…………………………… (202)

专题十八　曲线的变换与组合………………… (214)

第二部分　排雷模拟

高考模拟试题（一）…………………………… (221)

高考模拟试题（二）…………………………… (225)

高考模拟试题（三）…………………………… (229)

高考模拟试题（四）…………………………… (232)

高考模拟试题（五）…………………………… (235)

参考答案………………………………………… (239)

第一部分

高考雷区巡查

专题一　集合的关系与运算

本部分在近五年全国高考中的分布情况

年份	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年	2002 年
分数	4	5	8	4	5

〖雷区扫描〗

本部分常见的失分点有：

1. **错误理解集合的有关概念；**

2. **错误表示集合.**

造成失误的根源是：部分考生对集合的理解只限于形式，没有形成集合思想；不在意地混淆常见记号的意义；有关术语和符号的运用不自如；混淆逻辑联结词"或"与"且". 高考单纯考查集合的题目虽不多，但从与集合有关的题目来看，还存在不该发生的失分现象.

〖排雷示例〗

[**例**1]（2002 **年全国高考题**）**设集合** $M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in \mathbf{Z}\}$，**则**　　（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subset N$　　C. $M\supset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

雷区探测：本题考查集合的表示和关系，分类讨论的基本思想，以及思维能力. 该题表示集合的手法在日常学习中是常见的，对考生不应陌生，如表示角的集合，在 1993 **年高考曾出现类似的选择题.**

雷区诊断:本题解答关键是排雷点$\frac{k}{2}$和$\frac{k}{4}$,特别是弄清集合$\{x \mid x=\frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$和$\{x \mid x=\frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$的构成.草率判断,会误选A;认为$\{x \mid x=\frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\} \supset \{x \mid x=\frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$颠倒两个集合的关系,便误选C;基本功差而丧失判断力的考生可能选D.解答时必须明确集合的构成与表示集合的字母没有关系,如集合M还可表示为$\{x \mid x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, n \in \mathbf{Z}\}$.

正确思路1:$N=\{x \mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

$=\{x \mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k=2n$,或$k=2n-1, n \in \mathbf{Z}\}$

$=\{x \mid x=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{x \mid x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, n \in \mathbf{Z}\}$

$=\{x \mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\} \cup M$

可见,$M \subset N$.

正确思路2:简单列举两个集合元素:

$M=\{\cdots,-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\cdots\}$,

$N=\{\cdots,-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\cdots\}$.

可见,$M \subset N$.

正确答案:B

[**例**2](2002年北京高考题)满足条件$M \cup \{1\}=\{1,2,3\}$的集合M的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

雷区探测:本题考查并集的概念和分析能力,难度不大.题目设计新颖,在以前高考中尚未出现类似形式,可见本题不落俗套,能更好地考查能力.

雷区诊断:解答本题时要对题设作出认真阅读,失误之一是误解题意,如求集合$\{1,2,3\}$的子集个数而误选C或D;另一种失误是认为只有$M=\{2,3\}$误选A.

正确思路:满足题设条件的集合是$M=\{2,3\}$或$M=\{1,2,3\}$.

正确答案:B

[**例**3](1999年全国高考题)如图1—1—1,I是全集,M、P、S是I的3个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )

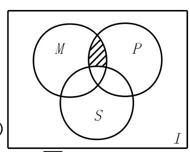


图1—1—1

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap \overline{S}$　　D. $(M\cap P)\cup \overline{S}$

雷区探测：本题主要考查集合的概念和运算，特别是对集合文氏图（示意图）的理解，对于图中给出的全集 I 与 3 个子集 M、P、S，要求考生识别图中阴影部分所表示的集合的表达式，4 个备选项含有集合的各种运算，且均有 $M\cap P$，只需考生对 $M\cap P$ 与 S 的交、并、补有一个正确的理解便可正确作答，无需技巧. 在全国高考题中，借助于文氏图作答的年份还有：1995 年、1996 年.

雷区诊断：集合的文氏图的含义，已被考生们普遍掌握，本题作为高考题的第 1 题，要求考生迅速进入状态，以清醒的头脑取得“开门红”. 考生失误是由对集合的交、并、补的混淆和文氏图的错误辨认造成的，以 D 居多，其次是 A.

正确思路 1：可见图中阴影部分所表示的集合既是 $M\cap P$ 的子集又是 $\overline{S}$ 的子集，故为 $(M\cap P)\cap \overline{S}$.

正确思路 2：由图可见 S 与阴影部分没有公共面积，即阴影部分所表示的集合不含 S 的元素，排除 B；又表示 $(M\cap P)\cap S$ 的部分位于阴影之外，排除 A；阴影部分只是 $\overline{S}$ 的局部而不是全体，排除 D.

当给出的集合不是具体的而是抽象的符号时，一般都要通过文氏图来助解.

正确答案：C

[例4]（2001 年京、皖、蒙春季高考题）$M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是　（　　）

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

雷区探测：本题瞄准考生易错环节，考查对子集的概念的深刻理解，考查用组合知识、二项式定理解决集合问题的方法. 题目虽然难度不大，数学课上时常接触，但对马马虎虎的考生敲了警钟.

雷区诊断：集合 M 的子集 P（记作 $P\subseteq M$）满足：若 $x\in P$，则 $x\in M$. P 中的元素是 M 中的元素的一部分或全部，或 M 中没有元素（空集 $\varnothing$）. 本题错选原因有二：(1) 丢掉空集（空集是任何集合的子集）；(2) 丢掉 M（任何集合都是其自身的子集）.

正确思路：因为从 1，2，3，4，5 中分别任取 0 个、1 个、2 个、3 个、4 个、5 个元素所组成的集合都是 M 的子集，而取法种数分别是 $C_5^0,C_5^1,C_5^2,C_5^3,C_5^4,C_5^5$，所以 M 的子集个数为

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(1+1)^5=2^5=32.$$

一般地，如果集合 M 的元素个数为 n，那么它的子集个数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

正确答案：A

[例5]（1998 年上海高考题）设全集是 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|$

$< a\}$(a 是常数),且 $11 \in B$,则 (　　)

A. $\overline{A} \cup B = \mathbf{R}$　　B. $A \cup \overline{B} = \mathbf{R}$

C. $\overline{A} \cup \overline{B} = \mathbf{R}$　　D. $A \cup B = \mathbf{R}$

雷区探测:本题主要考查集合的关系和运算,考查不等式的解法.题目所给的集合一静一动,能很好的考查运算能力和逻辑推理能力.特别参数 a 的设置,要求考生能够面对问题,冷静地思考,选择有效的方式寻求解题思路,这又是对思维品质和心理素质的测试.一元二次不等式和绝对值不等式是高中阶段所学习的最重要的不等式,在历年高考中都占据显著地位,体现其基础性、工具性.

雷区诊断:集合 A 和 B 分别是一元二次不等式和含绝对值的不等式的解集,集合 B 中含有参数 a.搞清参数 a 所满足的条件是解答此题的基础.本题的干扰项围绕下列三类考生:对集合的补集、并集含糊不清误选 C;解不等式的技能较差误选 A 或 B;不会利用条件 $11 \in B$ 作出分析判断无目标地去看.

正确思路 1:$A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 > 0\} = \{x \mid x < -1$,或 $x > 6\}$;

由题设,非空集 $B = \{x \mid |x - 5| < a\} = \{x \mid 5 - a < x < 5 + a\}$.

$\because 11 \in B$,$\therefore |11 - 5| < a$,即 $a > 6$,

$\therefore 5 - a < -1$,$5 + a > 6$.

因此,$A \cup B = \mathbf{R}$.

正确思路 2:$A = \{x \mid x < -1$,或 $x > 6\}$,$\overline{A} = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 6\}$;

取 $a = 7$,则 $B = \{x \mid -2 < x < 12\}$,$\overline{B} = \{x \mid x \leqslant -2$,或 $x \geqslant 12\}$.

这时 $\overline{A} \cup B = \{x \mid -2 < x < 12\}$,$A \cup \overline{B} = \{x \mid x < -1$,或 $x > 6\}$,$\overline{A} \cup \overline{B} = \varnothing$,$A \cup B = \mathbf{R}$,排除 A、B、C.

读者可思考(变式题目):设 $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 > 0\}$,$B = \{x \mid |x - 5| < a\}$($a$ 是常数).

(1) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$,求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cap B = \varnothing$,求 a 的取值范围.

正确答案:D

[**例**6](2002 年上海春季高考题) 若全集 $I = \mathbf{R}$,$f(x)$,$g(x)$ 均为 x 的二次函数,$P = \{x \mid f(x) < 0\}$,$Q = \{x \mid g(x) \geqslant 0\}$,则不等式组 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

雷区探测:本题从逻辑角度考查集合的关系,其中"$f(x)$,$g(x)$ 均为 x 的二次函数"的设置,既有具体性又有抽象性,给考生选择余地.该题所给数学模型常规,在课本和历年的高考中都有原型,难度不大.

雷区诊断:本题的易错点在集合运算与逻辑联结词"且""非"的关系上,如果有模

糊认识，那么就会得出 $P \cup Q, P \cup \overline{Q}$ **等错误结果.**

正确思路：$\because \{x \mid g(x) < 0\} = \overline{Q}$

$\therefore \{x \mid \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}\} = \{x \mid f(x) < 0\} \cap \{x \mid g(x) < 0\}$

$= P \cap \overline{Q}$

类似地不等式组 $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ **的解集是** $\overline{P} \cap Q$. **提醒考生要防止犯下面的错误：**

$\{x \mid f(x) > 0\} = \overline{P}$.

正确答案：$P \cap \overline{Q}$

[**例**7]（2002 **年上海春季高考题**）**设曲线** C_1 **和** C_2 **的方程分别为** $F_1(x, y) = 0$ **和** $F_2(x, y) = 0$，**则点** $P(a, b) \notin C_1 \cap C_2$ **的一个充分条件是**______.

雷区探测：本题从纯逻辑的角度考查思维能力，用方程的曲线为依托，给考生以题设条件的客观存在，同时兼考曲线与方程、点与曲线、点的坐标与曲线方程的关系. 可见该题带有一定的综合性.

雷区诊断：设曲线 C **的方程为** $F(x, y) = 0$，**本题涉及的逻辑常识有：**$M(x, y) \in C \Leftrightarrow F(x, y) = 0, M(x, y) \notin C \Leftrightarrow F(x, y) \neq 0; P(a, b) \notin C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow P(a, b) \in \overline{C_1 \cap C_2}$. **如果考生在某一关系上弄不清楚，就会陷入题目所设置的雷区自食其果. 不过，本题的要求并不高，只要求填写一个充分条件.**

正确思路 1：$P(a, b) \notin C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow P(a, b) \notin C_1$

或 $P(a, b) \notin C_2 \Leftrightarrow F_1(a, b) \neq 0$ **或** $F_2(a, b) \neq 0$.

正确思路 2：$P \notin C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow P \in \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \Leftrightarrow P \in \overline{C_1}$

或 $P \in \overline{C_2} \Leftrightarrow P \notin C_1$ **或** $P \notin C_2$.

正确思路 3：**当曲线** C_1 **和** C_2 **没有交点，即** $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ **时，**

$P(a, b) \in C_1 \cap C_2$ **不可能成立，有** $P(a, b) \notin C_1 \cap C_2$.

一般地，对于任意两个集合 A、B，**有（摩尔根律）**

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

元素 x **与集合** A、B **的关系可分为以下四种情形：**

①$x \in A$，**且** $x \in B$；②$x \in A$，**且** $x \notin B$；③$x \notin A$，**且** $x \in B$；④$x \notin A$，**且** $x \notin B$.

因为 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$，**且** $x \in B$，**所以** $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in A$，**且** $x \notin B$；**或** $x \notin A$，**且** $x \in B$；**或** $x \notin A$，**且** $x \notin B$. **从以上分析还可知，**$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$，**且** $x \notin B$.

正确答案：$F_1(a, b) \neq 0$；**或** $F_2(a, b) \neq 0$；**或** $F_1(a, b) \neq 0$，**且** $F_2(a, b) \neq 0$；$P \notin C_1$；**或** $P \notin C_2$；$P \notin C_1$，**且** $P \notin C_2$，**或** $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

[**例**8]（1999 **年上海高考题**）**设集合** $A = \{x \mid |x - a| < 2\}, B = \{x \mid \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$，**若**

$A \subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

雷区探测:本题是例五的深化,把解不等式同集合的关系一并考查,旨在突出对能力特别是逻辑思维能力的要求.

雷区诊断:本题主要错解有:

错误略解 1:求得 $A=\{x \mid a-2<x<a+2\}$;由 $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$,得 $2x-1<x+2$,即 $x<3$,于是 $B=\{x \mid x<3\}$.

由 $A \subseteq B$,得 $a+2 \leqslant 3$,所以实数 a 的取值范围是 $a \leqslant 1$.

(评注:只有当 $x+2>0$ 时,才能由 $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$,得 $2x-1<x+2$!)

错误略解 2:求得 $A=\{x \mid a-2<x<a+2\}$;$B=\{x \mid -2<x<3\}$.

$\because A \subseteq B$,$\therefore \begin{cases} a-2>-2 \\ a+2<3 \end{cases}$,于是 $0<a<1$.

(评注:当不等式组中有一个取等号,仍有 $A \subseteq B$!)

本题解答关键是正确地解好两个不等式,充分利用数形结合列出 a 所满足的关系式,特别要注意区间的端点是否应在考虑之内. 两类错解表明本题有较好的区分度. 在解不等式时,不要随意将分母去掉,即使去分母,也要在等价思想的指导下去运作;$A \subseteq B$ 和 $A \subset B$(在原教材中)的意义不尽相同,在处理它们所表示关系时,一定要谨慎行事.

解不等式的常用依据是:

$$f(x) \cdot g(x)>0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x)<0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases}$$

正确解法:由 $|x-a|<2$,得 $a-2<x<a+2$,

$\therefore A=\{x \mid a-2<x<a+2\}$.

由 $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$,得 $\dfrac{x-3}{x+2}<0$,即 $-2<x<3$.

$\therefore B=\{x \mid -2<x<3\}$.

$\because A \subseteq B$,$\therefore \begin{cases} a-2 \geqslant -2 \\ a+2 \leqslant 3 \end{cases}$,于是 $0 \leqslant a \leqslant 1$.

因此,实数 a 的取值范围是 $\{a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1\}$.

〖排雷演习〗

一、选择题

1. **方程组** $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-4y=-8 \end{cases}$ **的解集是** ( )

A. $\{2,3\}$ B. $\{x=2,y=3\}$ C. $\{(2,3)\}$ D. $\{(3,2)\}$

2. **设集合** $A=\{x \mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=2k-1,k\in\mathbf{N}\}$，**则** A，B **之间的关系是** ( )

A. $A=B$ B. $A\cap B=A$ C. $A\cup B=A$ D. $A\cap B=\varnothing$

3. **设全集** $I=\{0,1,2,3,4\}$，**集合** $A=\{0,1,2,3\}$，**集合** $B=\{2,3,4\}$，**则** $\overline{A}\cup\overline{B}$ **等于** ( )

A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{0,1,4\}$ D. $\{0,1,2,3,4\}$

4. **设集合** $M=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$，**集合** $N=\{x \mid x^2-2x-3<0\}$，**集合** $M\cap N$ **等于** ( )

A. $\{x \mid 0\leqslant x<1\}$ B. $\{x \mid 0\leqslant x<2\}$

C. $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ D. $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

5. **已知全集** $I=\mathbf{N}$，**集合** $A=\{x \mid x=2n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=4n,n\in\mathbf{N}\}$，**则** ( )

A. $I=A\cup B$ B. $I=\overline{A}\cup B$

C. $I=A\cup\overline{B}$ D. $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

6. **已知** I **为全集，集合** $M,N\subset I$，**若** $M\cap N=N$，**则** ( )

A. $\overline{M}\supseteq\overline{N}$ B. $M\subseteq\overline{N}$ C. $\overline{M}\subseteq\overline{N}$ D. $M\supseteq\overline{N}$

7. **设** $f(x)$，$g(x)$ **的定义域为全集** $\mathbf{R}$，$F=\{x \mid f(x)>0\}$，$G=\{x \mid g(x)>0\}$，$H=\{x \mid f(x)g(x)>0\}$，**则** ( )

A. $H=F\cap G$ B. $H=F\cup G$

C. $H=(F\cap G)\cup(\overline{F}\cap\overline{G})$ D. A、B、C **都不对**

8. **设** $f(x)$，$g(x)$ **的定义域为全集** $\mathbf{R}$，**集合** $M=\{x \mid \sqrt{x^2}>2\}$，$N=\{x \mid \log_x 7>\log_3 7\}$，**那么** $M\cap\overline{N}$ **等于** ( )

A. $\{x \mid x<-2\}$ B. $\{x \mid x<-2$，**或** $x\geqslant 3\}$

C. $\{x \mid x\geqslant 3\}$ D. $\{x \mid -2\leqslant x<3\}$

9. **设全集** $I=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}\}$，**集合** $M=\{(x,y) \mid \dfrac{y-3}{y-2}=1\}$，$N=\{(x,y) \mid y\neq x+1\}$，**那么** $\overline{M\cup N}$ **等于** ( )

A. $\varnothing$ B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$ D. $\{(x,y) \mid y=x+1\}$

10. **设集合** $M=\{(x,y) \mid x>0$，**且** $y>0\}$，$N=\{(x,y) \mid x+y>0$，**且** $xy>0\}$，**则** ( )

A. $M=N$　　B. $M\subset N$　　C. $M\supset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

二、填空题

11. 使 $A\cup B=\{1,2\}$ 成立的集合 A、B 共有______组.

12. 已知全集 $I=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{-4,4\}$，$A\cap\overline{B}=\{-1,1,3\}$，则 $A=$______，$B=$______.

13. 设 I 是全集，非空集合 $P\subset Q\subset I$，若含 P、Q 的一个运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是______（只要求写出一个表达式）.

三、解答题

14. 已知全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid |x-1|<c\}$ 其中 $c>0$，$B=\{x\mid |x-3|\leqslant 4\}$，若 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，求 c 的取值范围.

15. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid qx^2+px+1=0\}$ 同时满足：(1) $A\cap B\neq\varnothing$；(2) $A\cap\overline{B}=\{-2\}$，其中 p,q 均为不等于零的实数，求 p,q 的值.

随感录

专题二　函数与函数的构造

本部分在近五年全国高考中的分布情况

年份	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年	2002 年
分数	8	16	22	12	8

〖雷区扫描〗

本部分常见的失分点有:

1. 有关映射与函数的概念性的判断和推理;
2. 关于反函数的判断、求反函数式;
3. 对记号 $f(x)$ 的理解;
4. 与指数和对数有关的函数式的变式处理;
5. 应用题中函数的构造及定义域的确定.

造成失误的根源是:部分考生还没有形成映射与函数的思想,不能分辨对应和映射这两个相关概念,从而发生连锁反应:不会“映射”地看待函数,不能“函数”地解决数学问题,以致对记号 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 所表达的关系不够清晰,抑制“函数性”思维;对指数与对数的理解肤浅,运算性质掌握得不熟练,经常混淆;在日常学习中,忽视课外“充电”,对周围的事情漠不关心,死读书、读死书,对函数的各种形式的表示了解甚少,在考场上理所当然不会把文字语言、图形语言、表格语言翻译成符号语言.考生如果有以上方面的“症状”,必然会阻碍思维能力和运算能力的正常发展,在高考中步入雷区,难于自拔.

〖排雷示例〗

[例1](1999 年全国高考题)已知映射:$f:A\to B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对于任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是　　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

雷区探测:本题重在考查映射的概念,兼顾考查集合的特征.试题难度不大,用陈述式说明表示映射的对应关系:取绝对值,原象集是有限集,象集恰好与集合 B 相等,这就为考生得分进一步提供了机会.映射在教学中所占的比例很小(1 课时),

1999 年和 2000 全国高考连续两年进行了专项考查，可见命题者对其很重视.

雷区诊断：本题错选以 D 居多，错选的考生草率审题，他们认为：由于集合 A 含有 7 个元素，所以集合 B 也含有 7 个元素. 失误的原因大致来源于二：(1) 没有抓住实质 —— 对应法则是“$a \to |a|$”不是一一映射（一一对应），如 A 中元素 1 和 -1 在 B 中对应的元素都是 1；(2) 忽视集合中元素的互异性，集合中的元素不能重复（重复的看成同一元素，如 -2 和 2 的象 2 只能算作一元素）.

正确思路：根据对应法则 $f(a)=|a|$，映射 $f:A\to B$ 使 A 中元素 $-3,-2,-1,1,2,3,4$ 依次对应于象集 B 中的元素 3,2,1,1,2,3,4，所以 $B=\{1,2,3,4\}$，故集合 B 中元素的个数是 4.

在高中阶段，函数的学习是建立在映射的基础上进行的，从映射的角度看函数，可谓居高临下. 函数是非空数集到非空数集的映射，只有正确理解映射的概念，才能深入理解函数的概念，从而形成对应、变化的观点，数学地分析和解决问题. 更值得指出的是，映射是进一步学习近、现代数学的基础，数学的各个分支，无一不以映射思想为基础. 可见，高考重视对映射的考查，完全符合高考改革精神.

正确答案：A

[**例**2]（1999 年全国高考题）若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，$f(a)=b$，$ab\neq 0$，则 $g(b)$ 等于 （　　）

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

雷区探测：本题考点集中，主要考查了反函数的概念，只要考生对反函数的概念有基本的理解，便可作答. 从题设条件看，命题者有意对符号语言和抽象思维进行考查，可见该题带有“数学味”，突出学科特点.

雷区诊断：本题的干扰项切中考生要害，即错误地理解函数与反函数的概念，混淆“函数的互反”与“实数的互倒”这两个截然不同的概念. 该题没有采用反函数的符号 $f^{-1}(x)$，而写成 $g(x)$，也没有给出 $f(x)$ 的具体解析式，对函数和反函数两个概念的考查深入，特别是 $ab\neq 0$ 这个条件的引入，增加了迷惑性，从而使部分考生忽视了对 $g(x)$ 意义的理解.

正确思路 1：因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，所以对 $f(x)$ 定义域内的任意值 x，都有 $g[f(x)]=x$，而 a 在 $f(x)$ 的定义域内，因此有 $g[f(a)]=a$.

正确思路 2：取 $f(x)=2^x$，则 $g(x)=\log_2 x$，再取 $a=2$，则 $b=f(2)=4$，从而 $g(b)=g(4)=2$，排除 B、C、D.

一般地，如果函数 $y=f(x)(x\in A)$ 有反函数，且 $f(x)$ 的值域为 C，那么：$f^{-1}[f(x)]=x,(x\in A)$；$f[f^{-1}(x)]=x,(x\in C)$.

正确答案：A

[**例**3]（2001 年京、皖、蒙春季高考题）函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 对于任意的实

数 x, y **都有** ( )

A. $f(xy)=f(x)f(y)$ B. $f(xy)=f(x)+f(y)$

C. $f(x+y)=f(x)f(y)$ D. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

雷区探测:本题瞄准知识的形成过程,考查指数运算和指数函数的概念,试题难度并不大,但对数学符号及其意义、对阅读理解、数学语言的转化有一定的要求.这种题型在近几年高考中频率不高,据调研这对高中生并不陌生,在数学课上有所接触,早在 1985 **年曾出现过一道类似的高考副题.**

雷区诊断:考生对函数的记号 $f(x)$ **的认识模糊、或对指数运算性质把握不当,会不由自主地踩雷.特别是出现下列错误:误认为** $a^{xy}=a^x\cdot a^y$ **而误选** A;**误认为** $a^{x+y}=a^x+a^y$ **而误选** D;**颠倒指数与对数的运算性质认为** $a^{xy}=a^x+a^y$ **而误选** B.

正确思路 1:**由指数运算性质知**:$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

所以,$f(x+y)=f(x)f(y)$.

正确思路 2:**由** B **得** $f(0\times 0)=f(0)+f(0)$,**于是** $f(0)=0$;

由 D **得** $f(0+0)=f(0)+f(0)$,**于是** $f(0)=0$.

但 $f(0)=a^0=1$,**可排除** B、D.

由 A **得** $f(1\times 1)=f(1)f(1)$,**于是** $f(1)=0$,**或** $f(1)=1$.

但 $f(1)=a^1=a, a>0$,**且** $a\neq 1$,**排除** A.

正确思路 3:**取** $a=2, x=0, y=1$,**由指数的意义** A、B、C、D **依次为**:

$1=2$;$1=3$;$2=2$;$2=3$. **其中有三个不成立,排除** A、B、D.

可见,数学上的颠倒是非、混淆黑白也只能是自食其果——高考失分.利用高等数学知识可以证明:

如果函数 $f(x)$ **不恒为常数,那么在定义域上**

(1) **满足** $f(xy)=f(x)f(y)$ **的函数是** $f(x)=x^n(n\in\mathbf{R})$(**幂函数**);

(2) **满足** $f(xy)=f(x)+f(y)$ **的函数是** $f(x)=\log_a x(a>0$,**且** $a\neq 1)$(**对数函数**);

(3) **满足** $f(x+y)=f(x)f(y)$ **的函数是** $f(x)=a^x(a>0$,**且** $a\neq 1)$(**指数函数**);

(4) **满足** $f(x+y)=f(x)+f(y)$ **的函数是** $f(x)=kx(k\neq 0)$(**正比例函数**).

正确答案:C

[**例**4](2001 **年全国高考题**) **函数** $y=2^{-x}+1(x>0)$ **的反函数是** ( )

A. $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}, x\in(1,2)$ B. $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}, x\in(1,2)$

C. $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}, x\in(1,2]$ D. $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}, x\in(1,2]$

雷区探测:本题考查指数、对数及其运算性质,考查反函数的知识、方程的思想和

思维能力，特别是要求考生深刻理解反函数的概念．指数、对数、反函数是每年的必考内容，该题的组合，体现了以综合为主的命题思路．

雷区诊断：本题的干扰支是三颗重雷：对指数式与对数式的互化或对数的运算性质掌握得不牢固将踩中雷 B；未能把握函数与反函数的定义域与值域的关系将踩中雷 C；二者兼有会踩中危险性更大的雷 D．看来人虽有情，但关系到国家的选拔性考试却无情．

正确思路 1：先求函数 $y=2^{-x}+1(x>0)$ 的值域．

$\because x>0,-x<0,\therefore 0<2^{-x}<1,1<2^{-x}+1<2$，即 $1<y<2$．

所以反函数的定义域即原函数的值域是 $(1,2)$．

$\because y=2^{-x}+1$，即 $2^{-x}=y-1$，

$\therefore -x=\log_2(y-1),x=-\log_2(y-1)=\log_2\dfrac{1}{y-1}$．

因此，函数 $y=2^{-x}+1(x>0)$ 的反函数是 $y=\log_2\dfrac{1}{x-1},x\in(1,2)$．

正确思路 2：函数 $y=2^{-x}+1(x>0)$ 的图象经过点 $(1,\dfrac{3}{2})$，其反函数的图象应经过点 $(\dfrac{3}{2},1)$．把 $x=\dfrac{3}{2}$ 代入四个选项中的函数式，可排除 B、D；在选项 C 中，取 $x=2$，得 $y=0$，但 0 不是函数 $y=2^{-x}+1(x>0)$ 定义域中的元素，排除 C．

对于指数式与对数式，首先要理解并牢固掌握：$a^b=N\Leftrightarrow\log_a N=b$；其次，要正确运用指数和对数的运算性质，并弄清它们的相互关系．

求反函数的方法是将原函数式 $y=f(x)$ 看成关于 x 的方程从中准确的解出 $x=f^{-1}(y)$，进而得反函数 $y=f^{-1}(x)$．要把握原函数的定义域和值域分别是反函数的值域和定义域这一根本关系．

正确答案：A

［**例** 5］（1998 年全国高考题）向高为 H 的水瓶中注水，注满为止，如果水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图 1—2—1 所示，那么水瓶的形状是　　（　　）

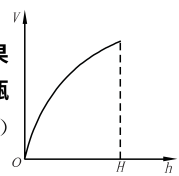
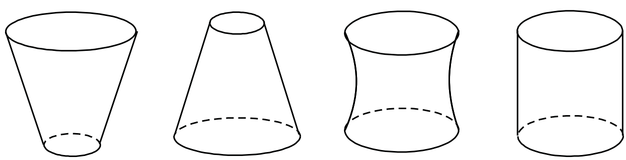


图 1—2—1



A　　B　　C　　D

雷区探测：本题考查对函数图象的理解、观察能力，考查思维的敏捷性、批判性和

灵活性，进而考查运用数学知识、思想解决实际问题的能力. 试题形式新颖，极富个性，其背景是人们常见的向瓶内注水，其设计采用了一个全新的角度，摒弃具体的计算和画图，突出对观察、想象和分析的考查，从而实现“考能力、考素质”这一目标. 这种题型自 1998 年问世以来，逐年稳步地确立了在高考题中的地位.

雷区诊断：若通过求注水量 V 与水深 h 的函数关系 $V=f(h)$（结果是三次函数），再画图与题设图象相比较，显然是自讨苦吃，这是被考生所摒弃的. 命题之意不是考查思维的严密性和要求考生进行精确地数学表达，而是从观察现象的表象要求考生进行思考和概括，迅速抓住问题的实质发现规律——体积随高度的增加速度越来越慢，只有 B 可选. 该题以误选 A 的考生居多，主要是没有弄清注水瓶横截面积的变化对体积的影响；其次，极少数考生误选 C，理由是图象与水瓶轴截面的形状相近，表现出这些考生知识的贫乏.

正确思路 1：依题设，函数 $V=f(h)$ 的图象是一段曲线弧，V 随 h 的增加而增加，而且开始增加的速度较快，以后逐渐变慢，因此瓶子的形状必然是下部大上部小，A、C、D 都不具备这个条件，应予排除，选 B.

正确思路 2：记 $V=f(h)$，依图可见 $f(\frac{H}{2})>\frac{1}{2}f(H)$. 对于 A 瓶上粗下细，应有 $f(\frac{H}{2})<\frac{1}{2}f(H)$；对于 C、D 瓶，由于其上下关于中截面对称，应有 $f(\frac{H}{2})=\frac{1}{2}f(H)$. 故选 B.

本题是对创新意识和实践能力考查的一个开端，结合学科特点来说，创新意识应表现在对社会、自然界所发生的数学现象要有好奇心，追求新知、独立思考，会科学地发现、提出、分析问题；实践能力应表现在运用数学的知识、思想、方法解决问题. 观图看势，抓其本质，为数学的学习指引了一条可行之路.

正确答案：B

[例6]（2000 年全国高考题）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额. 此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
……	…

某人一月应交此纳税款 26.78 元，那么他的当月工资、薪金所得介于（　　）