高考难点与方法

丛书主编　任志鸿
本册主编　董立木　朱　博　毛秀琴
　　　　　耿庆斌

南方出版社

让考点从知识的海洋中凸现出来

——代前言

新高考在即，广大师生依旧在艰难的探索中备考，在艰难的备考中探索。

新高考和旧高考之间的关系如何？面对综合考试，单科的复习如何进行？新高考实行“3＋X”考试，各学科还有难点存在吗？

对“3＋X”考试的最新研究结果表明，第一，新高考有别于旧高考的最大特征是“综合”，但“综合”不是空穴来风，是在原来知识之上的综合。所以，新高考是旧高考基础上的升级，有很强的传承性。第二，综合考试是建立在各学科基础之上的一种综合性考试，在复习时，必须以各科复习为基础，各学科的基础扎实了，各学科的内部综合确实搞好了，跨学科综合自然水到渠成。第三，实行“3＋X”考试后，从传统的高考来看，试题难度的确是要降低，因为新高考对知识点不再像以前那样向纵深挖掘。但是，综合考试注重学科间的知识交叉，注重知识的发散，强调知识联系的广度和深度，这对一直在传统高考的复习模式中学习的学生来说，便形成了新的难点。

新版的《高考难点与方法》，便是在这一认识的基础之上，以全新的面貌和广大读者见面的。新版《高考难点与方法》有三个方面的特点：(1)注重与传统高考的衔接。(2)注重学科内的综合。(3)注重对最新高考信息的搜集并加以体现。三方面结合，由此形成一个纵横交错的网络，通过难点来体现考点。“让考点从知识的海洋中凸现出来”，是2002年新版《高考难点与方法》的突出特点。

在这里，“难点”一是指知识难点，二是指在学科内、学科外综合中产生的“新”难点。“方法”一是指解决知识的难点和新难点的具体方法，二是指如何发现和解决新的难点的方法。

本书的主要栏目有：[难点透析][仿真试题][方法精要]（或[小结]）[创新思维训练]等。备考实践证明，难点永远是固定的点，而题是该点的面，具有多种形式并可不断变化。[难点透析]就是要给师生一双“火眼金睛”，能通过对近几年考题的分析，透彻地掌握整个难点并对该难点在2002年“3＋X”高考中的变化趋势了然于胸。[仿真试题]是在[难点透析]基础上结合有关2002年高考的最新信息，对2002年高考的科学、准确的近距离预测。[方法精要]（或[小结]）是通过[仿真试题]的实战演习，进一步总结该难点的发展、变化趋势，总结在这些发展趋势下最简练有效的应对方法。最后通过[创新思维训练]让考生全方位实战训练，彻底掌握难点，从容面对考点。

丛书的编写原则是深入浅出，由“透析”到“仿真试题”是深入，由“小结”到“创新思维训练”是浅出。丛书的结构形式是“由面到点”，再“由点到面”。高考题是“面”，“点”是指学生必须掌握的知识点，即“难点”。由往年的高考题到知识点是“由面到点”，贯彻了“深入浅出”中的“深入”原则；由“难点”到对今年高考题的预测是“由点到面”，贯彻了“深入浅出”中的“浅出”原则。

愿本书能伴你享受征服高考的快乐！

因时间仓促，难免有疏漏和不妥之处，诚盼老师和同学提出宝贵的意见和建议。

编　者

2002年3月

THE BEST DESIGN

目　　录

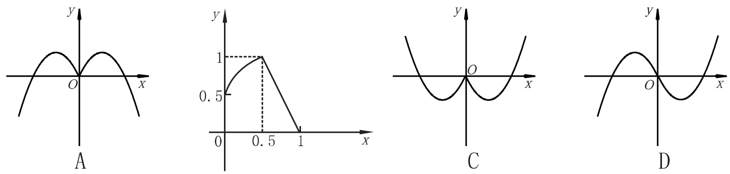
上篇　难点攻关

难点 1　函数的图象

难点透析

纵观近几年的高考，函数的图象始终是高考的必考内容. 函数图象的考查在选择题中出现较多，解答题中也有时出现，而且许多与函数有关的问题，表面上与图象无关，但我们常要借助于函数图象去解决，因此对函数图象的复习应引起我们的重视. 函数的图象与其性质密不可分，解题时必须注意考虑函数的性质. 函数的图象几乎是每年的必考内容.

如：2000 年理 5 题为：函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是　　　　(　　)



本题主要考查函数的图象和奇偶性等基本知识，给出的函数式是幂函数与余弦函数的乘积，既贴近教材，又不是流行材料所常见的组合. 解题思路是：由所给是奇函数可知其图象关于原点对称，故排除 A、C，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y<0$，故排除 B，选 D.

理 17 题为：函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1, x\in\mathbf{R}$. (1)(略)，(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

本题在考查其他知识的基础上进一步考查函数的图象变换，其解题思路是：由(1)知可将函数式化为 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$，因此(2)应为 ① 把 $y=\sin x$

的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$的图象；② 将得到的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象；③ 把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（横坐标不变）得到函数$y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象；④ 把得到的图象向上平移$\frac{5}{4}$个单位，得到$y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$的图象. 综上得到函数$y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$的图象. 本题第(2)问重在考查函数图象的各种平移和伸缩变换.

2001年高考第4题为：若定义在区间$(-1,0)$内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$，则a的范围是 ( )

A. $(0,\frac{1}{2})$ B. $(0,\frac{1}{2}]$ C. $(\frac{1}{2},+\infty)$ D. $(0,+\infty)$

本题考查对数函数的图象和对底数分类思考的方法. 其解题思路是：因$f(x)=\log_{2a}(x+1)=\log_{2a}t$且$0<t=x+1<1$，$\log_{2a}t>0$，结合$y=\log_{2a}t$的图象知$0<2a<1$，$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$，故选A.

第22题为：设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，其图象关于直线$x=1$对称，对任意x_1、$x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且$f(1)=a>0$.

(1) 求$f(\frac{1}{2})$及$f(\frac{1}{4})$；

(2) 证明$f(x)$是周期函数；

(3) 记$a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

第(2)问考查了函数图象的轴对称问题. 其解题思路为：依题意$y=f(x)$关于直线$x=1$对称. 故$f(x)=f(1+1-x)$，即$f(x)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$，又$f(x)$是偶函数，知$f(-x)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，$\therefore f(-x)=f(2-x)$，将上式中$-x$以x代换得$f(x)=f(x+2)$，$x\in\mathbf{R}$，这表明$f(x)$是$\mathbf{R}$上的周期函数，且2是它的一个周期.

再如2000年高考文21应用题第(1)问是给出两个函数的图象，让学生写出函数的解析式.

从高考试题看，函数图象的考查往往与性质密不可分，只有深刻理解函数性质，注意观察图象特点，才能达到顺利解题之目的. 2002年高考，函数图象的考

查仍是必考内容之一.

仿真试题

[试题 1] 作出函数 $y=\log_2(1-x)$ 的图象.

解答:∵ $y=\log_2(1-x)=\log_2[-(x-1)]$,故图象可由 $f(x)=\log_2 x$ 的图象作关于 y 轴的对称图象得 $y=\log_2(-x)$,再沿 x 轴向右平移 1 个单位而得,如图 1—1 所示.

注:要深刻理解 $f(x)$ 与 $f(x+a)$ 等变换中变量关系.

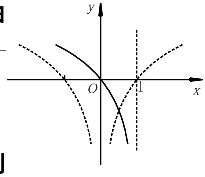
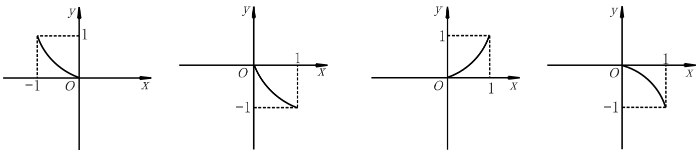


图 1—1

[试题 2] 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$,则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是　　(　　)



解法一:由 $y=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 0\\0\leqslant y\leqslant 1\\\sqrt{1-x^2}=1-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 0\\0\leqslant y\leqslant 1\\1-x^2=(1-y)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 0\\0\leqslant y\leqslant 1\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$$

因此 $f(x)$ 的图象是以点 $(0,1)$ 为圆心,1 为半径的圆在 $-1\leqslant x\leqslant 0$,$0\leqslant y\leqslant 1$ 的部分,由于 $f^{-1}(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,据此可得 $f^{-1}(x)$ 的图象,故选 B.

解法二:因为在由已知函数求反函数时,最后必须将 x、y 互换,因此反函数必满足方程 $x=1-\sqrt{1-y^2}$,整理得 $(x-1)^2+y^2=1$,此方程表示以 $(1,0)$ 为圆心,1 为半径的圆,因此只有 B 满足此关系.

[试题 3] 如图 1—2,现有一个计时沙漏,开始时盛满沙子,沙子从上部均匀漏下,经过 5 分钟漏完,h 是该沙漏中沙面下降的高度,则 h 与下落时间 t(分) 的函数关系式用图象表示应该是　　(　　)

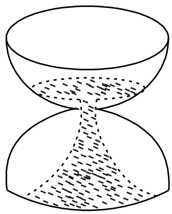
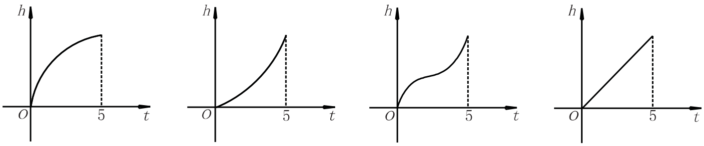


图 1—2



A　　B　　C　　D

解答：沙面下降高度由慢变快，答案为 B.

[试题 4] 作出下列函数的大致图象.

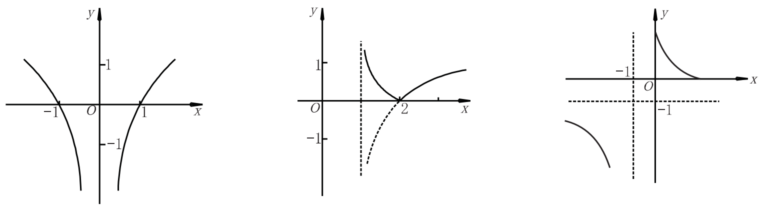
(1) $y=\log_2|x|$　(2) $y=|\log_2(x-1)|$　(3) $y=\dfrac{2-x}{x+1}$

解答：(1) ∵ 函数为偶函数，∴ 只要做出当 $x>0$ 的部分图象，即 $y=\log_2 x$ 的图象，再作出它关于 y 轴的对称部分即得.

另解：∵ $y=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ \log_2(-x) & (x<0)\end{cases}$ 作出函数 $y=\log_2 x$ 的图象后，再作出它关于 y 轴的对称部分即得.

(2) $y=\begin{cases}\log_2(x-1) & (x\geqslant 2)\\ -\log_2(x-1) & (1<x<2)\end{cases}$，把 $y=\log_2 x$ 图象向右平移一个单位后，再作在 x 轴下方的部分关于 x 轴对称图形即得.

(3) $y=\dfrac{2-x}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}-1$ 先作出 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象，然后将图象向左平移一个单位，再向下平移一个单位即得 $y=\dfrac{3}{x+1}-1$ 的图象.



(1) 图　(2) 图　(3) 图

图 1—3

[试题 5](1) 方程 $\lg|x|=\sin x$ 实根的个数为________.

(2) 不等式 $x^2<\log_a x$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上成立，则实数 a 的取值范围________.

解答：(1) 在同一坐标系中作出 $y=\lg|x|$ 和 $y=\sin x$ 的图象，由于两个图象有 6 个交点，因此原方程有 6 个实根，如图 1—4.

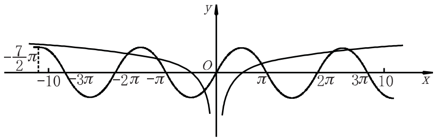


图 1—4

(2) 原式要成立,必有 $a\in(0,1)$(否则由图象右恒不成立).如图 1—5 作出 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 上 $y=x^2$ 的图象和 $y=\log_a x$ 的图象,由图知必须$(\frac{1}{2})^2\leqslant\log_a\frac{1}{2}$,解得 $a\geqslant\frac{1}{16}$,故 a 的范围应为$\frac{1}{16}\leqslant a<1$.

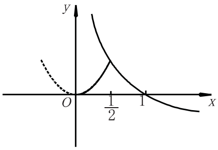


图 1—5

方法精要

关于函数的图象要从以下三个方面着手:

一、作图

1.利用描点法作图:(1) 确定函数的定义域;(2) 化简函数解析式;(3) 讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性);(4) 画出函数的图象.

2.利用基本函数图象和变换作图.

如:平移变换、伸缩变换、对称变换.

二、识图

对于给定函数的图象,要能从图象的左、右、上、下分布范围、变化趋势、对称性等方面研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性,注意图象与函数解析式中参数的关系.

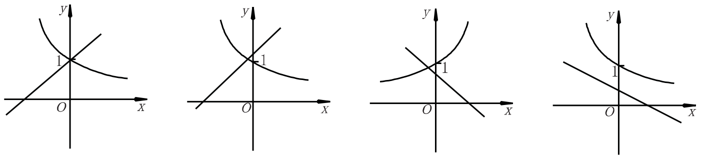
三、用图

函数图象形象地显示了函数的性质,为研究数量关系问题提供了“形”的直观性,它是探索解题途径,获得问题结果的重要工具,要重视数形结合解题的思想方法.

创新思维训练

一、选择题

1.当 $a\neq0$ 时,函数 $y=ax+b$ 和 $y=b^{ax}$ 的图象是 ( )



A B C D

2. 函数 $y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 的图象 （　　）

A. 关于原点对称　　B. 关于 y 轴对称

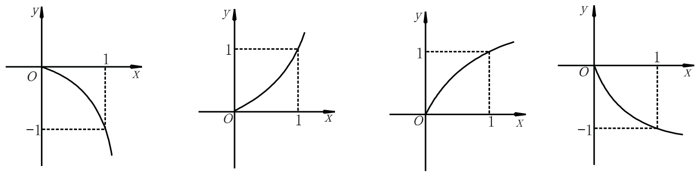
C. 关于 x 轴对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

3. 设函数 $y=f(x)$ 定义在实数集上，则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于 （　　）

A. 直线 $y=0$ 对称　　B. 直线 $x=0$ 对称

C. 直线 $y=1$ 对称　　D. 直线 $x=1$ 对称

4. 已知函数 $f(x)=\log_2(1-x)$，$(x\in\mathbf{R}^-)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是下图中的 （　　）

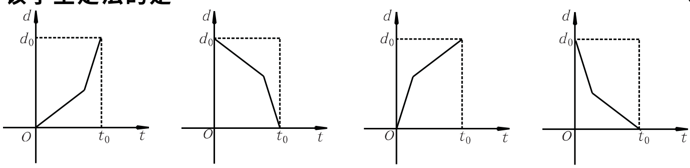


A B C D

5. 设 $f(x)=3ax-2a+1$，若存在 $x_0\in(-1,1)$，使 $f(x_0)=0$，则实数 a 的范围是 （　　）

A. $-1<a<\dfrac{1}{5}$　　B. $a<-1$　　C. $a<-1$ 或 $a>\dfrac{1}{5}$　　D. $a>\dfrac{1}{5}$

6 某学生离家去学校，由于怕迟到，所以一开始就跑步，等跑累了再走余下的路程，图中纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，下面四个图形中较符合该学生走法的是 （　　）



A B C D

二、填空题

7. 已知直线 $y=x+m$ 与函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有两个不同的交点，则 m 的取值范围是________.

8. 关于函数 $f(x)=\lg\dfrac{x^2+1}{|x|}$,($x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 0$)，有下列命题：

① 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称 ② 当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是增函数，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 是减函数 ③ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\lg 2$ ④ 当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时，$f(x)$ 是增函数 ⑤ $f(x)$ 无最大值，也无最小值

其中正确命题的序号是________.

9. 若函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 对称，则 a 值为________.

三、解答题

10. 作出下列函数的大致图象.

(1) $f(x)=\sin\theta^{|\log_{\sin\theta}x|}$,$(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ (2) $y=|\log_2|x||$

11. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(m+x)=f(m-x)$.

(1) 求证：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称；

(2) 若 $x\in[0,2m]$($m>0$) 时，$f(x)=\sqrt{2mx-x^2}$，试画出函数 $y=f(x+m)$ 的图象.

难点 2　函数的性质

难点透析

函数是中学数学研究的最主要内容之一，函数的思想方法贯穿于整个高中数学．对函数性质的考查以及利用函数的性质来解决各种数学问题及实际应用问题，是高考所考查的重中之重，是历年高考的热点．对函数性质的考查主要集中在函数的定义域、值域，反函数的概念与性质，函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性、函数的最值等，对函数性质进行综合性考查也常在高考试题中体现．函数的性质是每年的必考内容之一．

2001 年全国高考理 22 题为：设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$．(1) 求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数；(3) 记 $a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln a_n)$．

本题考查函数的概念、图象，函数的奇偶性和周期性等基础知识，考查运算能力和思维能力．以抽象函数的形式考查函数性质，既新颖又有深度．其解题思路为：

(1) 因为 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，所以 $f(x)=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})\geqslant 0,x\in[0,1]$．$\because f(1)=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{2})]^2$，$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{4})=[f(\frac{1}{4})]^2$，$f(1)=a>0$，$f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$，$f(\frac{1}{4})=a^{\frac{1}{4}}$

(2) 依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，故 $f(x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}$，又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x)=f(x),x\in\mathbf{R}$．$\therefore f(-x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}$，将上式中 $-x$ 以 x 代换，得 $f(x)=f(x+2),x\in\mathbf{R}$，这表明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且 2 是它的一个周期．

(3) 由(1)知 $f(x)\geqslant 0,x\in[0,1]$，$\because f(\frac{1}{2})=f(n\cdot\frac{1}{2n})=f[\frac{1}{2n}+(n-1)$

$\frac{1}{2n}] = f(\frac{1}{2n}) \cdot f[(n-1) \cdot \frac{1}{2n}] = \cdots = f(\frac{1}{2n}) \cdot f(\frac{1}{2n}) \cdot \cdots \cdot f(\frac{1}{2n}) = [f(\frac{1}{2n})]^n$，

$f(\frac{1}{2}) = a^{\frac{1}{2}}$，$\therefore f(\frac{1}{2n}) = a^{\frac{1}{2n}}$，$\because f(x)$ 的一个周期是 2，$\therefore f(2n+\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n})$，

因此 $a_n = a^{\frac{1}{2n}}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}\ln a) = 0$

2000 年高考理 19 题为：设 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ax$，其中 $a > 0$，(1) 解不等式 $f(x) \leqslant 1$；(2) 求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

本题主要考查函数的概念、单调性、解不等式等基础知识，同时考查分类讨论的思想方法及运算、推理能力. 其解题思路为：

(1) 不等式 $f(x) \leqslant 1$，即 $\sqrt{x^2+1} \leqslant 1+ax$，由此可得 $1 \leqslant 1+ax$，又由 $a > 0$ 知 $x \geqslant 0$，所以原不等式等价于

$\begin{cases} x^2+1 \leqslant (1+ax)^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ (a^2-1)x+2a \geqslant 0 \end{cases}$，所以，当 $a \geqslant 1$ 时，解为 $x \geqslant 0$，当 $0 < a < 1$ 时，解为 $0 \leqslant x \leqslant \frac{2a}{1-a^2}$.

(2) 在区间 $[0,+\infty)$ 上任取 x_1, x_2，使得 $x_1 < x_2$.

$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} - a(x_1-x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a(x_1-x_2) = (x_1-x_2)(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a)$，因为 $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，所以 $0 < \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} < 1$，若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调，则 $f(x_1) - f(x_2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒正或恒负，又 $x_1 - x_2 < 0$ 且 $a > 0$ 知只有 $a \geqslant 1$ 才满足要求，故当 $a \geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数.

从高考试题看，函数的性质的考查，客观题、主观题都经常出现，且考查是全方位、多层次的、灵活度很高. 由于函数是中学数学的重要内容，预测 2002 年高考，对函数性质的考查仍为重点内容之一.

仿真试题

[试题 1] 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且它的图象关于直线 $x=2$ 对称，已知 $x \in [-2,0)$ 时，$f(x) = -x^2+1$，求 $x \in [-6,-2]$ 时，$f(x)$ 的表达式.

解答：$\because f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，$\therefore f(x+4) = f(-x)$，$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(4+x) = f(-x) = f(x)$，$\therefore T = 4$ 为 $f(x)$ 的一个周期，当 $x \in [-6,-2]$ 时，$x+4 \in [-2,2]$，$\therefore f(x) = f(x+4) = -(x+4)^2+1 = -x^2-$

$8x-15$

[试题2]设函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c\in\mathbf{Z})$ 是奇函数,且在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,$f(1)=2,f(2)<3$.

(1) 求 a,b,c 的值;

(2) 证明:$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数;

(3) 作出 $f(x)$ 的图象.

(1) 解:由 $f(x)$ 是奇函数,得 $f(-x)=\dfrac{ax^2+1}{-bx+c}=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}=-f(x)$,∴ $-bx+c=-bx-c$,∴ $c=0$,由 $f(1)=2$,知 $\dfrac{a+1}{b+c}=2$,∴ $a=2(b+c)-1=2b-1$,∵ $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数,∴ $2=f(1)<f(2)<3$,即 $2<\dfrac{4a+3}{2b}<3$,将 $a=2b-1$ 代入可解得 $a=1,b=1,c=0$.

(2) 证明:$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$,任取 $x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $x_1<x_2$,则有 $x_1-x_2<0,x_1x_2-1<0$,∴ $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1^2+1}{x_1}-\dfrac{x_2^2+1}{x_2}=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}>0$,∴ $f(x_1)>f(x_2)$,即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

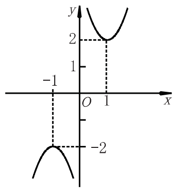


图 2—1

(3) 解:$y=f(x)$ 的图象如图 2—1 所示.

[试题3]设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,当 $x>0$ 时,$f(x)>1$,且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

求证:(1) $f(0)=1$　(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

证明:(1) 令 $x=0,y=1$,则 $f(0+1)=f(0)\cdot f(1)$,即 $f(1)=f(0)f(1)$.

∵ $f(1)>1$,∴ $f(0)=1$

(2) 第一步:∵ $f(x)\cdot f(-x)=f(x-x)=f(0)=1>0$,∴ $f(-x)$ 与 $f(x)$ 同号,但 $x>0$ 时 $f(x)>1$,∴ 当 $x<0$ 时必有 $f(x)>0$.

因此 $x\in\mathbf{R}$ 时必有 $f(x)>0$.

第二步:设 $x_1<x_2$,令 $x_2-x_1=t>0$,则 $x_2=x_1+t$ 且 $f(t)>0,f(x_1)>0$,∴ $f(x_2)=f(x_1+t)=f(x_1)f(t)>f(x_1)$,即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

另外(2)小题也可作如下处理:

由 $f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1>0$ 得 $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$,证得 $f(x)>0$ 恒成立,且 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2)\cdot f(-x_1)=f(x_2-x_1)>1$,∴ $f(x_2)>f(x_1)$.

[试题4]设 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的奇函数,且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

(1)若 $f(1)=0$,解关于 x 的不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0,(a>1)$.

(2)若 $mn<0,m+n\leqslant 0$,求证:$f(m)+f(n)\leqslant 0$.

(1)解:∵ $f(x)$ 是奇函数,且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数,∴ $f(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数,∵ $f(x)$ 为奇函数,$f(1)=0$,∴ $f(-1)=-f(1)=0$,∴ 不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0$ 同解于不等式组:

$$\begin{cases}\log_a(1-x^2)+1<0\\ \log_a(1-x^2)+1>-1\end{cases} \quad ①$$

$$\text{或}\begin{cases}\log_a(1-x^2)+1>0\\ \log_a(1-x^2)+1>1\end{cases} \quad ②$$

解①得 $\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$ 或 $-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a}}$,解②知不等式组②无解,∴ 原不等式的解集为

$$\{x\mid\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\text{ 或 }-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a}}\}$$

(2)证明:∵ $mn<0$,∴ $m>0,n<0$ 或 $m<0,n>0$

当 $m>0,n<0$ 时,由 $m+n\leqslant 0$ 有 $0<m\leqslant -n$

∵ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,∴ $f(m)\leqslant f(-n)$

又∵ $f(x)$ 是奇函数,∴ $f(m)\leqslant -f(n)$,$f(m)+f(n)\leqslant 0$

当 $m<0,n>0$ 时,同理可证 $f(m)+f(n)\leqslant 0$

[试题5]已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ 对一切实数 x、y 都成立,且 $f(0)\neq 0$.

(1)求证 $f(x)$ 是偶函数.

(2)$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的增函数,且 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$,①求 $f(1)$ 的值;②若 $f(6)=1$,解不等式 $f(x+3)-f(\frac{1}{x})<2$.

(1)证明:令 $x=y=0$,则 $f(0)+f(0)=2f^2(0)$,∵ $f(0)\neq 0$,∴ $f(0)=1$.令 $x=0$,则 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$,∴ $f(-y)=f(y)$,故 $f(x)$ 是偶函数.

(2)解:①在 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ 中,令 $x=y=1$,则有 $f(1)=f(1)-f(1)=0$

②∵$f(6)=f(\frac{36}{6})=f(36)-f(6)$,∴$2f(6)=f(36)=2$,因此 $f(x+3)-f(\frac{1}{x})=f(\frac{x+3}{1/x})=f[x(x+3)]<2=2f(6)=f(36)$,即 $f[x(x+3)]<f(36)$

∵$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的增函数,

∴$0<x(x+3)<36$,解得:$\frac{-3-\sqrt{153}}{2}<x<-3$(舍去)或 $0<x<\frac{-3+\sqrt{153}}{2}$.

方法精要

研究函数的性质及应用,一要从定义出发:如函数单调性、奇偶性均从定义出发;二要重视图形的应用,求函数值域,研究奇偶性、单调性都可借助图形直观解决;三要注意定义域先行,奇偶性要求定义域关于原点对称,单调性在定义域内研究;四是掌握常规方法和解题步骤.如求函数值域常用配方法、利用基本不等式或函数的单调性、换元法、数形结合法等.

另外,注意奇偶性和单调性的联用,掌握利用函数单调性解证不等式、比较两数大小.函数的周期性也应引起足够重视.

对于抽象函数的性质,一定要注意一般与特殊的关系,注意特殊值的运用.

创新思维训练

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1$,已知 $f(x+1)$ 为奇函数,当 $x<1$ 时,$f(x)=2x^2-x+1$,那么,当 $x>1$ 时,$f(x)$ 的递减区间为 (　　)

A. $[\frac{5}{4},+\infty)$　　B. $(1,\frac{5}{4}]$　　C. $[\frac{7}{4},+\infty)$　　D. $(1,\frac{7}{4}]$

2. 设 $f(x+1)=x^2+2x-1$,$x\in[1,2]$,那么 $f(x+1)$ 的反函数是 (　　)

A. 在$[1,2]$上是增函数　　B. 在$[1,2]$上是减函数

C. 在$[2,7]$上是减函数　　D. 在$[2,7]$上是增函数

3. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数,不等式 $f(x)>0$ 的解集是(a^2,b),$g(x)>0$ 的解集是$(\frac{a^2}{2},\frac{b}{2})$($\frac{b}{2}>a^2$),那么不等式 $f(x)\cdot g(x)$ 的解集是 (　　)

A. $(\frac{a^2}{2},\frac{b}{2})$　　B. $(-b,-a^2)$

C. $(a^2,\frac{b}{2})\cup(-\frac{b}{2},-a^2)$　　D. $(\frac{a^2}{2},b)\cup(-b^2,-a^2)$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且满足 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$,当 $2\leqslant x\leqslant3$