前 言

QIAN YAN

有位大学校长曾说过："我们教育学生就象猎人学打猎一样，要教会他们如何使用猎枪，而不是老让他们带'干粮'"。教学的根本目的是让学生掌握知识，将知识转化为一种工具，并最终运用这个工具去解决实际问题。如果说'熟练使用猎枪'是猎人生存的基本保证，那么'灵活运用知识'一定是学习成功的必然要求。

修订后的《课程标准》和《考试说明》要求，教学应以教会学生如何学、学会如何用为主要任务，高考以考查学生能力为目标。提高素质，训练能力是新世纪人才培养的基本要求。

'学案'即是以'学'为主的学习辅导方案。它的科学之处在于以学生为本，充分调动学生的学习积极性，发挥学生的主体作用，全面培养学生的学习兴趣，挖掘学生的学习潜能。让学生在主动研究、思考和探索的情境中学习，使学生能准确理解和牢固掌握理论知识，并最终形成灵活运用知识的能力。

《高中同步测控优化设计》系列丛书以其独到的设计理念、对新教材的准确把握和高效实用的性能受到广大师生的厚爱，品牌地位已经确立。策编人员与时俱进，开拓创新，经过共同努力，新版丛书又将呈现出更高的品位和全新的面貌。新版《高中同步测控优化设计》丛书，以'学案'式理论为指导，推广和实施科学、高效的最新学习辅导方略。学习的关键是学生如何学，'教会学生如何学、如何用'是教学的最终要求，也是本丛书策划设计的基本点。

本次修订有以下创新：第一、对原［学习目标］栏目进行改造，由过去对大纲要求的简单陈述，改之以问题的方式设置一些思考性、探索性、实用性的课前问题。第二、'知识梳理'要求将要点内容以框架形式列出，对其重要概念、规律和方法设计成填空或填表，由学生在预习课本，复习教材的基础上完成。第三、根据各学科特点，分别增设'问题探索'、'研究性学习'、'导学诱思'、'自学导引'、'创新训练'、'语篇领悟'、'提纲优化'、'要点扫描'、'学后反思'等自学性、研究性、开放性栏目。

本次修订凸显以下特色：

吸引新成果　创设新模型　传统教辅模式存在'重教轻学'的弊端，栏目设置往往忽视对学生的学习积极性的培养，缺乏学习方法的研究与指导。本次修订力求保留成熟而稳定的'优化设计'特色，在广泛听取读者建议，吸纳最新教研成果的基础上，成功地将'学案'式教辅理论用于指导丛书的策划和设计，旨在为广大师生提供一套实用、创新、科学和高效的教学辅导精品。

尊重学习规律　精心设置梯度　本丛书力求遵照同步教学的客观规律，在体例设置、内容安排、方法应用、训练考查等方面都充分考虑学生的实际，由浅入深，循序渐进，逐步提高；并适度、战略性地把握高考动向和要求，在同步教学中逐步渗透高考意识。

着眼教学实际　力求科学实用　本丛书紧密结合新教材实际，内容设计、章节划分均符合教学使用习惯，充分体现'同步'意义。各科均增加了课后或章后训练习题，并严格控制各种试题的难度和深度，力求更大程度地满足不同层次学生的训练需求。同时，"1+1"(《学生用书》+《教师用书》)设计模式，为广大教师的课堂教学及课后辅导都提供了有益的参考和帮助。

本书为高二数学上册。本书以单元为编写单位，设置以下主要栏目：

[要点扫描]本栏目以学案形式设计，将知识要点或重要规律设计成填空，由学生在预习课本的基础上，归纳完成。旨在训练学生主动、自觉学习的良好习惯。

[典例剖析]精选典型、新颖的教学、考试题。点拨思路，示范方法，展示细节，规范解析。

[随堂训练]选题情景简单，思路清晰。意在巩固基础知识，训练基本技能。

[强化训练]在'随堂训练'的基础上稍有提高。注重知识应用，提高解题技巧。

[学后反思]结合例题及各种训练题，总结解题路和体会，指出易错问题，反思错解原因。

全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们，只有不懈努力，才会不断前进。

编　者

2002 年 7 月

目录

MU LU

第六章　不等式

§6.1　不等式的性质

★第一课时

学习要求

掌握实数的运算性质与大小顺序之间的关系，会用“比差”法比较两个实数或代数式的大小.

要点扫描

$a-b>0\Leftrightarrow$______，$a-b<0\Leftrightarrow$______，$a-b=0\Leftrightarrow$______. 比较两个代数式的值的大小步骤是：________________.

典例剖析

[例1]已知 $x>3$，比较 x^3+11x 与 $6x^2+6$ 的大小.

解：$x^3+11x-(6x^2+6)=x^3-3x^2-3x^2+11x-6$

$=x^2(x-3)+(-3x+2)(x-3)$

$=(x-3)(x^2-3x+2)$

$=(x-3)(x-2)(x-1)$.

由 $x>3$，得 $(x-3)(x-2)(x-1)>0$，从而

$x^3+11x>6x^2+6$.

说明：比较 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号，至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要). 比较 a 与 b 大小的步骤是：①作差；②变形(分解因式或配方)；③判断差的符号.

[例2]比较 $a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$ 的大小.

解：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\geqslant0$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

说明：比较两个代数式的大小，作差后在变形的过程中有分解因式(如例1)，有时写成几个非负数或非正数的和的形式(如本例)，有时这两者合起来用. 符号“$\geqslant$”的意义是大于或者等于.

[例3]已知：$x>y$ 且 $y\neq0$. 比较 $\frac{x}{y}$ 与 1 的大小.

解：$\frac{x}{y}-1=\frac{x-y}{y}$

$\because x>y$，$\therefore x-y>0$.

当 $y<0$ 时，$\frac{x-y}{y}<0$，即 $\frac{x}{y}-1<0$，

$\therefore \frac{x}{y}<1$；

当 $y>0$ 时，$\frac{x-y}{y}>0$，即 $\frac{x}{y}-1>0$，

$\therefore \frac{x}{y}>1$.

说明：判断差的符号时，根据字母取值范围，进行了分段讨论.

随堂训练

▶1. 若 $a>b$，则 …………（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $a^2\geqslant b^2$

C. $a^2\leqslant b^2$　　D. 以上都不对

▶2. 已知 $x>2$，则 …………（　　）

A. $x^3+2>2x^2+x$　　B. $x^3+2<2x^2+x$

C. $x^3+2\leqslant 2x^2+x$　　D. 以上都不对

▶3. 已知 a、b 都为正数，则 …………（　　）

A. $a+b>2\sqrt{ab}$　　B. $a+b<2\sqrt{ab}$

C. $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$　　D. $a+b\leqslant2\sqrt{ab}$

▶4. 已知 $x\neq1$，则 …………（　　）

A. $x^2+y^2\geqslant2x-6y-10$

B. $x^2+y^2>2x-6y-10$

C. $x^2+y^2\leqslant2x-6y-10$

D. $x^2+y^2<2x-6y-10$

▶5. 不等式① $a^2+2>2a$，② $a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$，③ $a^2+b^2>ab$ 恒成立的个数是 …………（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

▶6. 若 $x\neq2$ 或 $y\neq-1$，$M=x^2+y^2-4x+2y$，$N=-5$，M 与 N 的大小关系是 …………（　　）

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. 不能确定

强化训练

▶1. 已知 a、b 分别对应数轴上的 A、B 两点，且 A 在原点右侧，B 在原点左侧，则下列不等式成立的是 …………（　　）

A. $a-b\leqslant0$　　B. $\frac{a}{b}>-\frac{a}{b}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2+b^2\geqslant-2ab$

▶2. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则 …………（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

▶3. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是 ……（　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

▶4. 已知 $a>b$，不等式① $a^2>b^2$，② $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，③ $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 能成立的个数是 ……（　）

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

▶5. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 $f(x)$______ $g(x)$.

▶6. 对于下列结论，其中正确命题的序号是__________.

①若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　②若 $a>b$，则 $\frac{b}{a}<1$　③若 $a^2>b^2$ 且 $a<0$，$b<0$，则 $a<b$　④ $a^2+b^2+ab\geqslant 0$

▶7. 已知 $a>b>c$，比较 $a^2b+b^2c+c^2a$ 与 $ab^2+bc^2+ca^2$ 的大小.

▶8. 比较 $(\frac{\sqrt{6}x}{6}+1)^3-(\frac{\sqrt{6}}{6}x-1)^3$ 与 2 的大小.（$x\in\mathbf{R}$）

▶9. 若 a、b、c 满足 $b+c=3a^2-4a+6$，$b-c=a^2-4a+4$，比较 a、b、c 的大小.

▶10. 比较 a^3 与 b^3 的大小.

学后反思

比较两式的大小的一般步骤是：

①作差. 有的可直接作差，有的需转化才可作差. ②变形. 变形的目的是判断差的符号，为了便于判断符号，进行分解因式、配方等变化，有时还需要根据字母取值范围进行讨论以判断差的符号. ③判断差的符号.

★第二课时

学习要求

理解不等式的性质定理 1～定理 4 及其证明.

要点扫描

1. 定理 1：如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$. 可写成 $a>b$ ______ $b<a$.

2. 定理 2：如果 $a>b$，且 $b>c$，那么，$a>c$. 可写成 $\left.\begin{matrix}a>b\\b>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a>c$.

如果 $c<b$，且 $b<a$，那么 $c<a$. 可写成____________.

3. $a>b$ 是 $a+c>b+c$ 的充要条件. 因此，$a>b$ ______ $a+c>b+c$. 不等式中任何一项改变符号后，可以________________________.

4. 如果 $a>b$，且______，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，且______，那么 $ac<bc$，应特别注意，这个定理与 c 的符号有关，与 a、b 的符号____.

5. 定理 3 推论：如果 $a>b$ 且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$；用文字叙述为：__________具有可加性. 定理 4 推论 1：如果 $a>b>0$ 且 $c>d>0$，那么，$ac>bd$；用文字叙述为：____________相乘后不等号的方向不变.

典例剖析

[例1]求证：$a>b>0$，$c<d<0\Rightarrow ac<bd$

证明：

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a>b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc\\\left.\begin{matrix}c<d\\b>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow bc<bd\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bd$$

说明：欲证 $ac<bd$，关键是构造出 ac 与 bd，学会综合使用不等式性质进行解题.

[例2]已知 a、b、c 均为正，且 $b<c$，比较 ab 与 $ac+bc$ 的大小.

选题意图：本题考查不等式性质的灵活运用，一题多解，培养学生分析问题解决问题的能力.

解法一：∵ $a>0$ 且 $b<c$，∴ $ab<ac$.

∵ $c>0$、$b>0$，∴ $bc>0$.

∴ $ab<ac+bc$

解法二：∵ $a>0$，$b>0$，$c>0$，

∴ $0<a<a+b$.

∵ $0<b<c$，

∴ $ab<c(a+b)=ac+bc$.

即 $ab<ac+bc$.

解法三：$ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc$.

∵ $b<c$，∴ $b-c<0$.

∵ $a>0$，∴ $a(b-c)<0$.

又∵ $b>0$，$c>0$，

∴ $-bc<0$. ∴ $a(b-c)-bc<0$.

即 $ab-(ac+bc)<0$.

∴ $ab<ac+bc$.

说明：解法一，先用定理 4 推论 1 再用定理 3 推论，解法二则反过来用之，解法三则从比较法入手，然后再用定理及推论.

[例3]设 $2<a\leqslant 5$，$3\leqslant b<10$，求 $a+b$，$a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

解：∵ $2<a\leqslant 5$，$3\leqslant b<10$

∴ $2+3<a+b<5+10$ 即 $5<a+b<15$

又∵ $3\leqslant b<0$　∴ $-3\geqslant -b>-10$

即 $-10<-b\leqslant -3$　∴ $2-10<a-b\leqslant 5-3$

即：$-8<a-b\leqslant 2$

要点扫描

1. 若 $a_1>b_1>0$，$a_2>b_2>0\cdots a_n>b_n>0$，那么，$a_1\cdot a_2\cdots a_n>b_1\cdot b_2\cdots b_n$. 当 $a=a_1=a_2=\cdots=a_n>0$，$b=b_1=b_2=\cdots=b_n>0$ 时，则有__________.

2. 定理 5：如果__________，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$）. 定理 5 与定理 4 推论 2 结合起来，可以推广到正有理指数幂，即如果 $a>b>0$，S 为正有理数，那么 $a^S>b^S$.

典例剖析

[例1]已知 a、b、c、d 是互不相等的正数，且满足 $0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$，$a+b=c+d$，则下列不等式正确的是 ………（　　）

A. $ab>cd$，$a>c>d>b$

B. $ab>cd$，$c>a>b>d$

C. $ab<cd$，$a>c>d>b$

D. $ab<cd$，$a>b>c>d$

解析：$\because 0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$

$\therefore a>b$，$c>d$ 且 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$，

即 $a+b-2\sqrt{ab}<c+d-2\sqrt{cd}$.

又 $\because a+b=c+d$，

$\therefore ab>cd$，排除 C、D.

令 $a=3$，$b=2$，$c=4$，$d=1$，

满足 $a+b=c+d$ 和 $0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$，

排除 A，选 B(注意：排除 A 后选 B)

答案：B

说明：“由已知想性质”是转化已知的思想方法，条件中根式应转化为有理式，因此需平方. 另外解选择题常常利用特值淘汰.

[例2]判断下列命题

(1) $a>b\Rightarrow a^2>b^2$

(2) $a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$

(3) $a^2>b^2\Leftrightarrow |a|>|b|$

(4) $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a-c>b-c$

(5) $a>b\Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(6) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$

其中正确的个数为 ……………………………………（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：易证得(2)、(3)、(6)正确.

答案：A

说明：运用不等式性质解题一定要注意使用范围.

[例3]已知 $1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，求 $3a-2b$ 的取值范围.

错解：$\because 1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$

$\therefore 0\leqslant (a+b)+(a-b)\leqslant 8$　$\therefore 0\leqslant a\leqslant 4$

同理 $-1\leqslant b\leqslant 3$

$\therefore 0\leqslant 3a\leqslant 12$，$-6\leqslant -2b\leqslant 2$

$\therefore -6\leqslant 3a-2b\leqslant 14$

解：设 $a+b=\mu$，$a-b=v$，则 $a=\frac{\mu+v}{2}$，$b=\frac{\mu-v}{2}$ 且 $1\leqslant \mu\leqslant 5$，$-1\leqslant v\leqslant 3$

$\therefore 3a-2b=\frac{1}{2}\mu+\frac{5}{2}v$

$\because \frac{1}{2}\leqslant\frac{\mu}{2}\leqslant\frac{5}{2}$，$-\frac{5}{2}\leqslant\frac{5v}{2}\leqslant\frac{15}{2}$

$\therefore -2\leqslant\frac{\mu}{2}+\frac{5v}{2}\leqslant 10$　即 $-2\leqslant 3a-2b\leqslant 10$

说明：错解的原因是，在求解过程中用的是推出关系而不是等价关系. 在正确解法中，实质是用 $a+b$ 及 $a-b$ 表示 $3a-2b$，这样就可由 $a+b$ 及 $a-b$ 的范围构出 $3a-2b$ 的范围.

随堂训练

▶1. 已知：$a<b<0$，那么下列不等式成立的是 …………（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $ab>b^2$

C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{a+b}{b}<1$

▶2. 判断下列命题是否正确，正确的在题后括号内打“√”，错误的打“×”.

① $a>b\Rightarrow\frac{a}{b}>1$（　　）

② $a>b\Rightarrow a^2>b^2$（　　）

③ $a^3>b^3\Leftrightarrow a>b$（　　）

④ $a>b\Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）（　　）

⑤ $|a|>b\Rightarrow a^2>b^2$（　　）

⑥ $a>|b|\Rightarrow a^2>b^2$（　　）

⑦ $|a|>|b|\Leftrightarrow a^2>b^2$（　　）

⑧ $a>b\Rightarrow |a|>b$（　　）

▶3. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，那么 $2\alpha-\frac{\beta}{2}$ 的范围是 …（　　）

A. $(0,\frac{5\pi}{6})$　　B. $(-\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{6})$

C. $(0,\pi)$　　D. $(-\frac{\pi}{4},\pi)$

▶4. 下列推导不正确的是 ……………………………（　　）

A. $c-a<c-b\Rightarrow a>b$

B. $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$，$c>0\Rightarrow a>b$

C. $a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b}}>\sqrt{\frac{d}{c}}$

D. $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，$n\in\mathbf{N}^*\Rightarrow a<b$

强化训练

▶1. 命题①：$c-a<c-b\Rightarrow a>b$

命题②：$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$

命题③：$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$ 且 $c>0\Rightarrow a>b$

命题④：$a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$（$n\in\mathbf{N}^*$）$\Rightarrow a<b$，这些命题中真命题的个数是 ……………………………………………（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

▶2. 下列命题正确的是 ………………………………（　　）

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $a-b<0,c>1\Rightarrow\frac{c-1}{b}<\frac{c-1}{a}$

C. $a>b,c>d\Rightarrow(a-b)^2>(d-c)^2$

D. $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

▶3. 已知 $a>b>c>1$，设 $M=a-\sqrt{c}$，$N=a-\sqrt{b}$，$P=2(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})$，比较 M、N、P 的大小.

▶4. 如果 $\log_a 3>\log_b 3>0$，那么 a、b 间的关系为……… （　　）

A. $0<a<b<1$

B. $1<a<b$

C. $0<b<a<1$

D. $1<b<a$　　　　（1996 年上海高考题）

▶5. 判断下列命题是否正确，正确的在题后括号内打"√"，错误的打"×".

①$a>b,c>d\Rightarrow a-d>b-c$　（　　）

②$a>b>c>0\Rightarrow\frac{a-c}{c}>\frac{b-c}{b}$　（　　）

③$a^2+b^2\geqslant 2ab$　（　　）

④$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　（　　）

⑤$x^2-x+1<0$　（　　）

⑥$a>b\Rightarrow(\frac{1}{2})^a>(\frac{1}{2})^b$　（　　）

⑦$a>b\Rightarrow 2^a>2^b$　（　　）

⑧$a>b>0$，n 为负有理数，则有 $a^n<b^n$　（　　）

▶6. 已知：$-\frac{\pi}{2}\leqslant x<y\leqslant\frac{\pi}{2}$，求$\frac{x-y}{3}$的取值范围.

▶7. 设 $a>0,a\neq 1$ 比较$\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$的大小.

▶8. 适当增加条件，使下列各命题成立.

(1)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$.

(2)若 $a>b$，则 $ac\leqslant bc$.

(3)若 $a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(4)若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$.

(5)若 $a>b,c>d$，则有$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

▶9. 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$的最大值和最小值.

学 后 反 思

1. 等式两边同乘以同一个数仍为等式，但不等式两边同乘以同一个数 a（或代数式），结果有三种，1°当 $a>0$ 时，得同向不等式. 2°当 $a=0$ 时，得等式. 3°当 $a<0$ 时得异向不等式.

2. 不等式性质定理，有同向不等式相加，得同向不等式；并无相减. 若 $a>b,c>d\Rightarrow a-d>b-c$或 $c-b>d-a$. 这个结论常用，不妨记为："大数减小数大于小数减大数."

3. 不等式性质定理，有均为正数的同向不等式相乘，得同向不等式，并无相除. 若 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$或$\frac{c}{b}>\frac{d}{a}$，这个结论也常用. 不妨记为："大数除以小数大于小数除以大数."

4. 由代数式的范围讨论代数式的范围，应考虑不等式性质的可逆性.

5. 指数函数、对数函数的性质，在证不等式时经常用，如 $b=\log_a(x^2+1)$，当 $0<a<1$ 时，$b<0$，当 $a>1$ 时，则 $b>0$.

§6.2　算术平均数与几何平均数

★第一课时

学 习 要 求

掌握公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和两个正数的算术平均数与几何平均数的定理及证明，并会应用它们解决数学问题.

要 点 扫 描

1. 公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 要求条件________，当且仅当______时取等号.

2. 如果 a,b 是____，那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）. $\frac{a+b}{2}$称 a,b 的________；$\sqrt{ab}$称 a、b 的__________. 这一定理又可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 如果 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$xy=P$（定值），当 $x=y$ 时，$x+y$ 有______.（简记为：积定、和有最小值）

4. 如果 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$x+y=S$（定值），当 $x=y$ 时，xy 有______.（简记为：和定、积有最大值）

5. 如果__________，则 $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$，当且仅当________时取等号.

典 例 剖 析

［例 1］若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg(\frac{a+b}{2})$，则下列不等式成立的是 ………………… （　　）

A. $R<P<Q$　　　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

解析：∵ $a>b>1$　∴ $\lg a>\lg b>0$

∴ $\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)>\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，即 $Q>P$

又 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　∴ $\lg(\frac{a+b}{2})>\lg\sqrt{ab}$

即 $R>\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=Q$

从而 $P<Q<R$.

答案：B

说明：解答本题前应弄清各种符号的意义及运算关系、运算性质.

[例2]已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$

证明：∵ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$

∴ $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2)=\frac{1}{2}[(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)]\geqslant\frac{1}{2}(2ab+2ac+2bc)=ab+ac+bc$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

说明：对于与“三项和”有关的不等式证明问题常常将“三项和”拆成“六项和”.

[例3]若 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域.

解：当 $x>0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$（当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时取等号）

∴当 $x>0$ 时，$y\in[2,+\infty)$

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$-\frac{1}{x}>0$

$y=x+\frac{1}{x}=-(-x-\frac{1}{x})$

∴ $-x-\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot(-\frac{1}{x})}\geqslant 2$（当且仅当 $-x=-\frac{1}{x}$，即 $x=-1$ 时取等号）

∴ $-(-x-\frac{1}{x})\leqslant -2$

即 $y\leqslant -2$

也就是当 $x<0$ 时 $y\in(-\infty,-2]$.

综上述，函数值域 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

说明：用不等式求最值，用到两个结论：简述为“和定积最大”与“积定和最小”（称为极值定理），运用这个定理求最值时，要做到“一正、二定、三相等”；“一正”指式子的各项为正，“二定”指含变数的两项的和（积）为定值，“三相等”指含变数的两项相等时，才能达到最大（小）值.

随 堂 训 练

▶1. 若 $x>0$，则 $1-2x-\frac{1}{2x}$ 的最__________值是__________，若 $x<0$，则 $1-2x-\frac{1}{2x}$ 的最__________值是__________.

▶2. 若实数 a、b 满足 $a+b=2$，则 3^a+3^b 的最小值是…………（　　）

A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

▶3. 下列不等式的证明过程正确的是…………（　　）

A. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

B. 若 $x>0$，则 $\cos x+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}=2$

C. 若 $x<0$，则 $x+\frac{4}{x}\leqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

D. 若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab<0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-[(-\frac{a}{b})+(-\frac{b}{a})]\leqslant -2\sqrt{(-\frac{a}{b})(-\frac{b}{a})}=-2$

▶4. 若 $a\in\mathbf{R}$，下列不等式恒成立的是…………（　　）

A. $a^2+1>a$　　B. $\frac{1}{a^2+1}<1$

C. $a^2+9>6a$　　D. $\lg(a^2+1)\geqslant\lg|2a|$

▶5. 在下列结论中，错用算术平均数与几何平均数不等式作依据的是…………（　　）

A. x，y 均为正数，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$

B. a 为正数，则 $(1+a)(a+\frac{1}{a})\geqslant 4$

C. $\lg x+\log_x 10\geqslant 2$，其中 $x>1$

D. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$

▶6. 不等式 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ 成立的充要条件是__________.

强 化 训 练

▶1. $x>0$ 且 $y>0$，则下列不等式中等号**不成立**的是…………（　　）

A. $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\geqslant 2$

B. $(x+\frac{1}{x})\cdot(y+\frac{1}{y})\geqslant 4$

C. $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geqslant 4$

D. $(\frac{\lg x+\lg y}{2})^2\leqslant\frac{\lg^2x+\lg^2y}{2}$

▶2. 在下列函数中，最小值是 2 的是…………（　　）

A. $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}(x\in\mathbf{R},x\neq 0)$

B. $y=\lg x+\frac{1}{\lg x}(1<x<10)$

C. $y=3^x+3^{-x}(x\in\mathbf{R})$

D. $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}(0<x<\frac{\pi}{2})$

▶3. 已知函数 $y=2+3x^2+\frac{27}{x^2}$，当 $x=$______时，函数有最______值是______.

▶4. 若 $x>3$，函数 $y=x+\frac{1}{x-3}$，当 $x=$______时，函数有最______值是 5.

▶5. 若 $x>4$，函数 $y=-x+\frac{1}{4-x}$，当 $x=$______时，函数有最______值是______.

▶6. 若 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=1$，当 $x=$______，$y=$______时，xy

错解:设 $\sqrt{x^2+4}=z$

$\therefore x^2+4=z^2$

把 $x^2=z^2-4$ 代入

$y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{z^2+1}{z}$

$=z+\dfrac{1}{z}\geqslant 2$

∴函数 y 的最小值为 2.

错误原因:$z+\dfrac{1}{z}\geqslant 2$,要求 $z=1$ 时等号成立. 但是,$z=\sqrt{x^2+4}\geqslant 2$,这是不可能的. 也就是说使等号成立的 z 不存在,上式解法是错误的.

正确解法一:

设 $\sqrt{x^2+4}=z\geqslant 2$

下面证明 $y=z+\dfrac{1}{z}$ 在 $z\in[2,+\infty)$ 上是增函数.

设 $z_2>z_1\geqslant 2$,

$y_2-y_1=z_2+\dfrac{1}{z_2}-(z_1+\dfrac{1}{z_1})$

$=(z_2-z_1)+(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_1})$

$=\dfrac{1}{z_2\cdot z_1}(z_2-z_1)(z_2z_1-1)$.

$\because z_2-z_1>0,z_2z_1-1>0$,

$\therefore y_2-y_1>0$.

$\therefore y=z+\dfrac{1}{z}$ 在 $z\in[2,+\infty)$ 是增函数.

当 $z=2$ 即 $x=0$ 时,y 有最小值. 最小值是 $y_{\min}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

正确解法二:

由 $y=z+\dfrac{1}{z}\quad(z\geqslant 2)$

得 $z^2-yz+1=0\qquad(z\geqslant 2)$

因两根之积为 1,显然方程只有一个不小于 2 的实数根.

令 $f(z)=z^2-yz+1$

则有 $f(2)=4-2y+1\leqslant 0$

$\therefore y\geqslant\dfrac{5}{2}$

∴y 的最小值为 $\dfrac{5}{2}$(此时 $z=2,x=0$)

说明:当不能满足使用均值不等式条件“能等”时,应考虑应用函数的单调性或其他方法求最值. 为此还应记住下面结论:求函数 $y=\dfrac{a}{x}+bx(a>0,b>0,x\in[c,+\infty),c>0)$ 的最小值. ①若 $c\leqslant\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,这时 $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\in[c,+\infty)$,那么,$y_{\min}=2\sqrt{ab}$. ②若 $c>\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,这时,因 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\notin[c,+\infty)$,$x$ 不可能取 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,只有根据函数单调性解之. 先证明 $x\in[c,+\infty)$ 时 $y=\dfrac{a}{x}+bx$ 是递增函数,当 $x=c$ 时,$y_{\min}=\dfrac{a}{c}+bc$.

[例3]甲、乙两地相距 s 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米/时,已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比,比例系数为 b;固定部分为 a 元.

(1)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶.

解:(1)依题意,汽车从甲地匀速行驶到乙地所用的时间为 $\dfrac{s}{v}$,全程运输成本为

$y=a\cdot\dfrac{s}{v}+bv^2\cdot\dfrac{s}{v}=s(\dfrac{a}{v}+bv)$ 故所求函数及其定义域为

$y=s(\dfrac{a}{v}+bv),v\in(0,c]$

(2)依题意,知 s、a、b、v 都为正数,故有 $s(\dfrac{a}{v}+bv)\geqslant 2s\sqrt{ab}$,

当且仅当 $\dfrac{a}{v}=bv$

即 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时,上式中等号成立.

若 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时,全程运输成本 y 最小;

若 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$ 时,有

$s(\dfrac{a}{v}+bv)-s(\dfrac{a}{c}+bc)=s\cdot[a(\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c})+b(v-c)]$

$=\dfrac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$

因为 $c-v\geqslant 0$,且 $a>bc^2$,故 $a-bcv>a-bc^2>0$,

所以 $s(\dfrac{a}{v}+bv)\geqslant s(\dfrac{a}{c}+bc)$,当且仅当 $v=c$ 时等号成立,也即 $v=c$ 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,当 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$ 时,行驶速度应为 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;当 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$ 时,行驶速度应为 $v=c$.

说明:抓住基本关系:全程成本=每小时成本 x 时间,成本=可变成本+固定成本,求最值时要注意变量的定义域.

随 堂 训 练

▶1. 设 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $x+y=5$,则 3^x+3^y 的最小值是 …( )

A. 10　B. $6\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $18\sqrt{3}$

▶2. 已知:$x>1,y>1$,且 $\lg x+\lg y=4$,那么 $\lg x\cdot\lg y$ 的最大值是 ……………………………………………………( )

A. 2　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{4}$　D. 4

▶3. 函数 $f(x)=2x^2+\dfrac{8}{x^2}+3$,当 $x=$______时,函数 $f(x)$ 有最______值是______.

▶4. 已知:x、$y\in(0,+\infty)$,且 $\log_2x+\log_2y=2$,则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最____值是____.

▶5. 求函数 $y=\dfrac{(x+5)(x+2)}{x+1}(x>-1)$ 的最值.

强化训练

▶1. 已知函数的解析式 $y=\frac{4}{x}+9x$，

(1)若 $x>0$，当 $x=$______时，函数有最______值______.

(2)若 $x\in(0,\frac{2}{5}]$，函数在这个区间上单调______，当 $x=$______时，函数有最______值______.

(3)若 $x\in[4,+\infty)$，函数在这个区间上单调______，当 $x=$______时，函数有最______值______.

▶2. 函数 $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{4}]$，当 $x=$______时，函数有最______值______.

▶3. 如果圆柱轴截面的周长为定值 l，那么圆柱体积的最大值是__________.

▶4. 函数 $y=\tan x+\frac{1}{\tan x}$，$x\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，当 $x=$______时，函数有最小值______.

▶5. 在$\triangle ABC$ 中，A、B、C 分别是 a、b、c 边所对的角，若 a、b、c 成等差数列，求 B 的范围.

▶6. 已知：$a>b>0$，求$\frac{a^3b-a^2b^2+196}{ab-b^2}$的最小值.

▶7. 如图 6—1，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2 米的长方体无盖沉淀箱. 污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出，设箱体长度为 a 米，高为 b 米，已知流出的水中该杂质的质量分数与 a、b 乘积 ab 成反比. 现有制箱材料 60 平方米，问当 a、b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.（A、B 孔的面积忽略不计） （1998 年・全国）

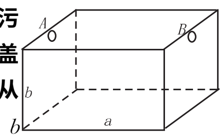

图 6—1

学后反思

1. 可化归为应用均值不等式求最值的问题. 化归方法：分离系数、变量替换（注意替换后变量的取值范围）.

2. 连续两次使用均值不等式求最值时，应注意两次“能等”必须一致，否则不可.

3. 函数 $y=\frac{a}{x}+bx(x>0,a>0,b>0)$在 $x\in(0,\sqrt{\frac{a}{b}}]$上单调递减，在 $x\in[\sqrt{\frac{a}{b}},+\infty)$上单调递增.

不等式的性质、算术平均数与几何平均数习题课

双基再现

1. 实数的运算性质与大小之间的顺序关系

$a-b>0\Leftrightarrow$______

$a-b=0\Leftrightarrow$______

$a-b<0\Leftrightarrow$______

运用它可以比较两个数的大小. 步骤是：①作差，②变形，③判断差的符号.

2. 不等式的性质有：

定理 1：$a>b\Leftrightarrow$______

定理 2：$a>b,b>c\Rightarrow$______或 $c<b,b<a\Rightarrow$______

定理 3：$a>b\Leftrightarrow$__________

推论：$a>b,c>d\Rightarrow$__________

常用结论：$a>b,c>d\Rightarrow a-d>b-c$ 或$c-b>d-a$.

定理 4：$a>b,c>0\Rightarrow$________

$a>b,c<0\Rightarrow$________

推论 1：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow$________

常用结论：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$或$\frac{c}{b}>\frac{d}{a}$

推论 2 与定理 5：$a>b>0$，

S 正有理数$\Rightarrow$________

常用结论：$a\cdot b>0,a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

3. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及变形$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

4. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（条件：$a>0,b>0$，当且仅当 $a=b$ 时取等号），其中________为 a、b 算术平均数，________为 a、b 的几何平均数.

5. 利用$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$求最值时，需满足三条，__________________

__________________.

6. 熟记 $y=\frac{a}{x}+bx(a>0,b>0,x>0)$ 的单调性. ①$x\in(0,\sqrt{\frac{a}{b}}]$时函数________,②当 $x\in[\sqrt{\frac{a}{b}},+\infty)$ 时,函数________. 会利用它的单调性求最值.

7. 应用两个正数的算术平均数与几何平均数的定理解决这类应用题时注意:(1)理解题意、设变量、定函数.(2)建立函数关系式.(3)在定义域内求最值.(4)写出正确答案.

典例剖析

[例1]求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

证明:∵$a^2+b^2\geqslant 2ab$

∴$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab$

∴ $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

同理:$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$

$\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$

三式相加,得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$

说明:$a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$也是常用不等式,请记住此不等式的结构特点及导出办法.

[例2]已知实数 a、b、c、d 满足 $a+b=7,c+d=5$,求$(a+c)^2+(b+d)^2$ 的最小值.

错解:$(a+c)^2+(b+d)^2$

$=a^2+b^2+2ac+b^2+d^2+2bd$

$=(a^2+d^2)+(b^2+c^2)+2ac+2bd$

$\geqslant 2ad+2bc+2ac+2bd$

$=2(a+b)(c+d)=70$

当且仅当 $a=d$ 且 $b=c$ 时取等号.

错因:两次用不等式求最值时,等号要同时取到,若 $a=d$ 且 $b=c$,则 $a+b=c+d$,与已知 $a+b=7,c+d=5$ 矛盾. 不可能同时有 $a=d$ 且 $b=c$.

正确解法:令 $a+c=m,b+d=n$,

则 $m+n=a+c+b+d=12$

$(a+c)^2+(b+d)^2=m^2+n^2\geqslant\frac{(m+n)^2}{2}$

$=\frac{12^2}{2}=72$

(当且仅当 $m=n$,即 $a+c=b+d=6$ 时取等号)

∴$(a+c)^2+(b+d)^2$ 的最小值是 72.

说明:使用不等式求最值要注意其条件,特别是"能否相等",尽量减少确定"等号"成立的次数.

[例3]设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$

证明:$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}$

$=\frac{b^2c^2+c^2a^2+b^2c^2+a^2b^2+c^2a^2+a^2b^2}{2(a+b+c)}\geqslant$

$\frac{2abc^2+2acb^2+2bca^2}{2(a+b+c)}=abc$

说明:(1)由$\begin{cases}x\geqslant z(z>0)\\ y\geqslant z\end{cases}$并不能得到$\frac{x}{y}\geqslant 1$

(2)对于 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$ 的证明,可联想到 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$ 的证明.

能力提高

▶1. 求函数 $y=\frac{\sin^2\alpha-5\sin\alpha+7}{3-\sin\alpha}$的值域.

有人给出下列解法,请判断正、误. 若不正确,应指出原因,并给出正确解法.

▶2. 三个负数 a、b、c 成等差数列,又 a、d、c 成等比数列,且 $a\neq c$,试比较 b 与 d 的大小.

判断下列解法,是否有错误,若有错误,指出原因,并给出正确解法.

▶3. 求函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos^2x(0<x<\frac{\pi}{2})$的最大值.

▶4. 当 $0<x<1$,a、b 为正常数时,求:$y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$的最小值.

▶5. 设 x、y、z 均为正实数,且 $x+y+z=1$

求证:$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geqslant 36$

▶6. 设 a、$b\in\mathbf{R}^+$,a,b 为常数,x,y 为正变数,且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,求:$x+y$ 的最小值.

▶7. 证明 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 下面的几种变形(并记住任何一个公式的等价变形也很重要)

(1)$a^2+b^2\geqslant 2|ab|\geqslant\pm 2ab$

(2)$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$

(3)$(a+b)^2\geqslant 4ab$

(4)$\frac{a-b}{b}\geqslant\frac{a-b}{a}(ab>0)$

(5)$\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b(b>0)$

(6)$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$

▶8. 若 $x,y\in \mathbf{R}$,求证 $2x^4+2y^4\geqslant xy(x+y)^2$

▶9. 求函数 $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}+3$ 的最值.

§6.3 不等式的证明

★第一课时

学 习 要 求

比较法是证明不等式的一种最重要、最基本的方法,要求学生熟练掌握.

要 点 扫 描

作差比较法证明不等式的步骤是:____________.作差是依据,变形是手段,判断差的符号才是目的.常用的变形方法有:配方法、通分法、因式分解法等.有时把差变形为常数、或变形为常数与几何数的平方和的形式,或变形为几个因式积的形式等.总之,变形到____________即可.

典 例 剖 析

[例1]求证:(1) $x^2+3>2x$

(2) $a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$

(3)若 $a>b>c$,则 $bc^2+ca^2+ab^2<b^2c+c^2a+a^2b$.

证明:(1) $x^2+3-2x=(x-1)^2+2>0$

$\therefore x^2+3>2x$

(2) $a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$

$\therefore a^2+b^2>2(a-b-1)$

(3) $bc^2+ca^2+ab^2-(b^2c+c^2a+a^2b)$

$=(bc^2-c^2a)+(ca^2-b^2c)+(ab^2-a^2b)$

$=c^2(b-a)+c(a-b)(a+b)+ab(b-a)$

$=(b-a)(c^2-ac-bc+ab)$

$=(b-a)(c-a)(c-b)$

$\because a>b>c$,

$\therefore b-a<0,c-a<0,c-b<0$.

$\therefore (b-a)(c-a)(c-b)<0$

$\therefore bc^2+ca^2+ab^2<b^2c+c^2a+a^2b$

说明:用比较法证明不等式,取差后,要注意因式分解或配方,以判断差的符号.

[例2]已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$,求证 $a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

证明:$\dfrac{a^a\cdot b^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}\cdot b^{\frac{b-a}{2}}=(\dfrac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}$

若 $a>b>0$ 则 $\dfrac{b}{a}>1$,$\dfrac{a-b}{2}>0$ 故 $(\dfrac{b}{a})^{\frac{a-b}{2}}>1$

若 $b>a>0$,则 $0<\dfrac{a}{b}<1$,$\dfrac{a-b}{2}<0$,故 $(\dfrac{b}{a})^{\frac{a-b}{2}}>1$

若 $b=a>0$,则 $(\dfrac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}=1$

综上 $a^a\cdot b^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

说明:①当欲证不等式两端是乘积形式或幂指数不等式时,常用取商比较法.②作商比较法证明不等式的步骤是:判断符号、作商、变形、判断与1的大小.

[例3]某商品计划两次提价,有甲、乙两种方案,其中 $p>q>0$.

方案\次	第一次提价	第二次提价
甲	$p\%$	$q\%$
乙	$\frac{1}{2}(p+q)\%$	$\frac{1}{2}(p+q)\%$

经过两次提价后,哪种方案提价幅度大?

解:设商品原价为 a,按甲、乙方案两次提价后价格分别为 $N_甲$、$N_乙$,则 $N_甲=a(1+p\%)(1+q\%)$

$N_乙=a[1+\frac{1}{2}(p+q)\%][1+\frac{1}{2}(p+q)\%]$

$=a(1+\dfrac{p+q}{200})^2$

$N_甲-N_乙=a(1+p\%)(1+q\%)-a(1+\dfrac{p+q}{200})^2$

$=a[1+\dfrac{p}{100}+\dfrac{q}{100}+\dfrac{pq}{100^2}-1-\dfrac{p+q}{100}-\dfrac{(p+q)^2}{200^2}]$

$=\dfrac{a}{200^2}(2pq-p^2-q^2)$

$=-\dfrac{a}{200^2}(p-q)^2<0$

答:乙方案提价比甲方案提价幅度大.

说明:提价幅度应为 $N_甲-a$ 或 $N_乙-a$,但 $(N_甲-a)-(N_乙-a)=N_甲-N_乙$.

[例4]求证:$2x^4+1\geqslant x^2(2x+1)$.

证明:$2x^4+1-x^2(2x+1)=2x^4-2x^3+1-x^2$

$=(x-1)(2x^3-x-1)=(x-1)^2(2x^2+2x+1)$

$=(x-1)^2[2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}]\geqslant 0$

$\therefore 2x^4+1\geqslant x^2(2x+1)$.

说明:利用作差法以及因式分解因式得"$(x-1)(2x^3-x-1)$"后尚不能判断,因此应继续进行变形;对于 $2x^2+2x+1$ 除上解法外,还可:$2x^2+2x+1=x^2+(x+1)^2\geqslant 0$.

随 堂 训 练

▶1. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$,那么,下列命题正确的是…………(　　)

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}\Rightarrow a>b$

★第二课时

学习要求

理解综合法证明不等式的逻辑关系.学会用综合法证明不等式.

要点扫描

1. 利用某些________和______,推导出所要证明的不等式成立,这种证明方法叫做综合法.其逻辑关系是:
$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow B_3\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_{n-1}\Rightarrow B_n\Rightarrow B$
(已知)(逐步推演不等式成立的必要条件)(结论)
其思路是"由因导果".即从"已知",推出已知的"性质",从而逐步推向"未知".
2. 常用已证过的不等式:
$1°\quad a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$
$2°\quad |a|\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$
$3°\quad a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$它的变形有:
$a^2+b^2\geqslant 2|ab|\geqslant\pm 2ab$
$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2\quad (a+b)^2\geqslant 4ab$
$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$
当 $ab>0$ 时,$\frac{a-b}{b}\geqslant\frac{a-b}{a}$
当 $b>0$ 时,$\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$
$4°\quad \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$及其变形$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\geqslant\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$
$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\quad (ab>0)\quad \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2\quad (ab<0)$
说明:不必死记公式变形,但应敢于对公式进行等价变形,善于应用变形证明不等式.

典例剖析

[例1]已知 $a、b、c、d\in\mathbf{R}^+$,
求证:$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.
选题意图:考查公式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}(a>0,b>0)$的变式应用及连续几个应用的条件.
证明:∵a,b,c,d 均大于零
$\therefore\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{abcd}>0$ ①
$\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{acbd}>0$ ②
$\therefore\frac{1}{4}(ab+cd)(ac+bd)\geqslant abcd$ ③
①中要求当且仅当 $ab=cd$ 时取等号
②中要求当且仅当 $ac=bd$ 时取等号
③中要求①②中等号同时成立即 $a=d$ 且 $c=b$ 时取等号
$\therefore(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$
说明:此题用作差法证明较困难.

[例2]求证:$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$
证明:∵$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$
$=\sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}$
$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+(a^2d^2+b^2c^2)}$
$\geqslant\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+2abcd}$
$=\sqrt{(ac+bd)^2}=|ac+bd|$
$\geqslant ac+bd$
$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$
说明:从不等式两边运算结构看,右边应先乘开再利用不等式进行缩小.

[例3]已知 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b+c=1$.求证:
(1)$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant 8$
(2)$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\geqslant 18$
证明:(1)$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)$
$=\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}$
$\geqslant\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=\frac{8abc}{abc}=8$
∴不等式成立.
(2)$\because 1=a+b+c$
$\therefore\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$
$=1\cdot(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c})$
$=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c})$
$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{8}{abc}}=18$
∴不等式成立
说明:(1)用综合法证明不等式时,要注意公式应用的条件及等号成立的条件,这是一种由因索果的证明.(2)当 $a+b+c=1$ 时,常常使用 $1=a+b+c$ 的代换.

随堂训练

▶1. 设 $0<a<b,a+b=1$,下列不等式正确的是 ……… (　　)
A. $b<2ab<\sqrt{a^2+b^2}<a^2+b^2$
B. $2ab<b<a^2+b^2<\sqrt{a^2+b^2}$
C. $2ab<a^2+b^2<b<\sqrt{a^2+b^2}$
D. $2ab<a^2+b^2<\sqrt{a^2+b^2}<b$

▶2. 函数 $y=3-8x-\frac{1}{8x}(x>0)$的最大值是 ………… (　　)
A. 3　　B. 2　　C. 5　　D. 1

▶3. 在横线上填写恰当的符号($>,<,\geqslant,\leqslant$)
(1)若 $a、b、c$ 是不全相等的正数,那么,$(a+b)(b+c)(c+a)$ ______ $8abc$;$a+b+c$ ______ $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$;
(2)当 $x>0$ 时,$3-3x-\frac{4}{x}$ ______ $3-4\sqrt{3}$;当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}$ ______ 2.

▶4. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$；

求证：$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant abc(a+b+c)$.

强 化 训 练

▶1. 下列函数中最小值是 2 的是 …………………………（　　）

A. $y=x+\frac{1}{x}$

B. $y=\tan\theta+\cot\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

C. $y=\sin\theta+\csc\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

D. $y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

▶2. 若 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 有最小值 ……………………………………………………（　　）

A. 6　　B. 9　　C. 4　　D. 3

▶3. 某市用 37 辆汽车往灾区运送一批救灾物资，假设以 v 公里/小时的速度直达灾区. 已知某市到灾区公路线长 400 公里，为安全需要两汽车间距不得小于 $(\frac{v}{20})^2$ 公里. 那么，这批物资全部到达灾区的最短时间是 ………………（　　）

A. $\frac{200}{3}$小时　　B. 18 小时

C. 6 小时　　D. 24 小时

▶4. 已知 $a>b>c>0$，则下列不等式成立的是 ………（　　）

A. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{2}{a-c}$

B. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}<\frac{2}{a-c}$

C. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{2}{a-c}$（可取等号）

D. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\leqslant\frac{2}{a-c}$（可取等号）

▶5. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$

▶6. "已知 a，b 为正常数，且 $a\neq b$，x、y 为正变数，且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值". 下面的解法对吗？若不对，说出原因，并给出正确解法.

▶7. 已知：a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}$.

▶8. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 且 $abc=2$，

求证：$(1+a)(1+b)(1+c)>8\sqrt{2}$.

▶9. 已知：$a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

▶10. 设 a、b、c 均为正数，求证：$(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c})\geqslant 4$.

学 后 反 思

①综合法是指从已证不等式和问题的已知条件出发，借助不等式的性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后达到特征结论或需求问题，其特点以"已知"看"可知"，逐步推向"未知". ②在应用已证过的不等式时，应注意变形使用和变式使用.

★第三课时

学 习 要 求

理解分析法证明不等式的逻辑关系，学会用分析法解决数学问题.

要 点 扫 描

1. 从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些________是否具备的问题，如果能肯定这些________都已具备，那么就可以判定原不等式成立，这种证明方法叫做分析法.
2. 使用分析法证明不等式，在分析推理时，要学会正确使用连接有关步骤的关键词，如："为了证明"、"只需证明"等.
3. 若条件为 A，要证明的结论为 B，用分析法证明的逻辑关系是：$B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow\cdots\Leftarrow B_n\Leftarrow A$

（结论）（步步寻求不等式成立的充分条件）（已知）

典 例 剖 析

[例1]求证：$\sqrt{3}+2\sqrt{2}<2+\sqrt{7}$.

证法一：为了证明 $\sqrt{3}+2\sqrt{2}<2+\sqrt{7}$

$\because \sqrt{3}+2\sqrt{2}>0,2+\sqrt{7}>0$

$\therefore$ 只需证明 $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2<(2+\sqrt{7})^2$

展开得 $11+4\sqrt{6}<11+4\sqrt{7}$

只需证 $4\sqrt{6}<4\sqrt{7}$

只需证 $6<7$