# 目　录

# 第6章　不　等　式

## 6援　不等式的性质

### 知识要点归纳

⑴ 比较准则 葬-遭>0⇔葬>遭葬-遭=0⇔葬=遭葬-遭<0⇔葬<遭援

⑵ 基本性质 对称性 葬>遭⇒遭<葬传递性 葬>遭遭>糟⇒葬>糟可加性 葬>遭⇒葬+糟>遭+糟乘法法则 葬>遭糟>0⇒葬糟>遭糟葬>遭糟<0⇒葬糟<遭糟方根同向性 葬>遭>0⇒$\sqrt[灶]{葬}$>$\sqrt[灶]{遭}$(灶∈晕,且灶>1) 援它们的三个推论可述为 同向相加性 葬>遭糟>凿⇒葬+糟>遭+凿同向正数不等式相乘性 葬>遭>0,糟>凿>0⇒葬糟>遭凿方幂同向性 葬>遭>0⇒葬灶>遭灶(灶∈晕,且灶>1) 援

⑶ 考试要求：

①根据给定的条件,利用不等式的性质,判断不等式是否成立援

②利用不等式的性质与实数性质、函数性质的结合,进行数值大小的比较援

③判断不等式中条件与结论之间的关系是充分条件或必要条件或充要条件援

⑷ 注意事项 学习不等式的性质时,要克服“想当然”和“显然成立”的思维定势,要以比较准则和实数的运算法则为依据,以严格的逻辑推理论证完成性质的推导,在此基础上,准确理解每条性质的条件和结论,并与等式的性质进行比较和记忆援

### 知识考点精析

**【考点一　不等式的基本性质】**

【范例 员】　判断下列命题是否正确,并说明理由援

⑴ 葬>遭⇒葬-糟>遭-糟

⑵ 葬>遭糟>凿⇒葬+糟>遭+凿

⑶ 葬>遭⇒葬糟>遭糟

⑷ $\frac{葬}{糟}>\frac{遭}{糟}$⇒葬>遭

⑸ 葬>遭>0⇔$\frac{1}{葬}<\frac{1}{遭}$

⑹ 葬>遭糟>凿⇒$\frac{葬}{凿}<\frac{遭}{糟}$

⑺ 葬>遭⇔|葬|>|遭|

⑻ $\sqrt{葬}$>$\sqrt{遭}$(葬>0,遭>0)⇒葬>遭

思维方式　只需注意不等式的基本性质及每一个定理与推论的条件,以及字母的符号援

◆点评◆　关于基本性质方面的问题主要是三类 一类是基本性质,包括互逆性和传递性 一类是与加减运算有关的性质；另一类是与乘、除、乘方、开方运算有关的性质援

◆答案◆　⑴ 命题成立,可由性质 葬>遭⇒葬+糟>遭+糟直接推出援

⑵ 命题不成立援因为 葬+糟>遭+凿⇒葬>遭糟>凿不成立援如 葬=100,糟=-1,遭=10,凿=10,显然有 葬+糟>遭+凿但推不出糟>凿援

⑶ 命题不成立援当 糟=0 时,有 葬糟=遭糟援

⑷ 命题成立援可由性质 葬>遭糟>0⇒葬糟>遭糟⇒$\frac{葬}{糟}>\frac{遭}{糟}$,糟>0⇒葬>遭援

⑸ 命题不成立援其中 葬>遭>0⇒$\frac{1}{葬}<\frac{1}{遭}$,可由性质直接推出,而$\frac{1}{葬}<\frac{1}{遭}$⇒葬>遭>0 则不成立,例如 葬=-2,遭=2 时就不成立援

⑹ 命题不成立,例如 葬=3,遭=2,糟=-1,凿=-2 时就不成立援

⑺ 命题成立援由性质 葬>遭>0⇒$\sqrt{葬}$>$\sqrt{遭}$可直接证得 葬>遭>0⇒$\sqrt{葬}$>$\sqrt{遭}$⇒|葬|>|遭| 而由性质 葬>遭>0⇒葬>遭可以证得 |葬|>|遭|>0⇒|葬|$^2$>|遭|$^2$⇒葬>遭援

⑻ 命题成立援由性质 葬>遭>0⇒葬>遭可直接证得$\sqrt{葬}$>$\sqrt{遭}$>0⇒($\sqrt{葬}$)$^4$>($\sqrt{遭}$)$^4$⇒葬>遭援

类题 员　若 葬、遭是任意实数,且 葬>遭则　(　　)

(粤) 葬$^2$>遭$^2$　　(月) $\frac{遭}{葬}$<1

(悦) 造(葬-遭)>0　　(阅) $\left(\frac{1}{2}\right)^{葬}<\left(\frac{1}{2}\right)^{遭}$

类题 圆　正数 葬、遭、糟满足 葬+凿=遭+糟,|葬-凿|<|遭-糟|,则　(　　)

(粤) 葬凿=遭糟　　(月) 葬凿<遭糟

(悦) 葬凿>遭糟　　(阅) 葬凿与 遭糟的大小不确定

类题 猿　若 葬、遭∈砸,下列命题中正确的是　(　　)

①若 |葬|>遭则 葬$^2$>遭$^2$　②若 葬>|遭|,则 葬$^2$>遭$^2$

③若 葬>|遭|,则 葬$^2$>遭$^2$　④若 葬$^2$>遭$^2$,则 葬>|遭|

(粤) ①和③　　(月) ①和④

(悦) ②和③　　(阅) ②和④

【范例 圆】　下列各题中,酝是 晕的充要条件的是　(　　)

(粤) 酝 葬>遭晕 葬糟$^2$>遭糟$^2$

(月) 酝 葬>遭糟>凿晕 葬-凿>遭-糟

(悦) 酝 葬>遭糟>凿(糟≠0,凿≠0) 晕:$\frac{葬}{糟}>\frac{遭}{凿}$

(阅) 酝 葬$^2$<遭$^2$ 晕:|葬|<|遭|

思维方式　利用不等式的性质,逐一对其进行考察,不成立的,找出反例援

◆答案◆　(阅

解答　当 糟=0 时,葬糟>遭糟不成立援

排除 粤在 月中,令 葬=100,遭=1,凿=80,糟=0,此时 晕辕酝,排除 月援

而 悦中,如 葬=2,遭=1,糟=4,凿=1

∴　酝⇒晕也不成立援但由于 葬<遭⇔|葬|²<|遭|²⇔|葬|<|遭|

∴选 阅援

---

类题 源　若 $\frac{1}{\text{葬}}<\frac{1}{\text{遭}}<0$,则能成立的不等式是　(　　)

(粤 葬>遭　　(月 葬+遭>2√葬遭

(悦 葬遭<遭　　(阅 葬+遭>|葬|+|遭|

【范例猿】　设 −2<葬<7,1<遭<2,求 葬+遭、葬−遭、$\frac{\text{葬}}{\text{遭}}$ 的范围援

思维方式　对于 葬−遭我们先求出 −2<−遭<−1,然后利用同向不等式相加保持同向的性质援对于 $\frac{\text{葬}}{\text{遭}}$,可分 0≤葬<7 与 −2≤葬<0 的两种情况讨论援特别是后者援可先求出 $\frac{(-\text{葬})}{\text{遭}}$ 的范围援

◆答案◆　$-2<\frac{\text{葬}}{\text{遭}}<7$

解答　由同向不等式相加得:−1<葬+遭<9援又∵ −2<−遭<−1,同理 −4<葬−遭<6援由 1<遭<2⇒$\frac{1}{2}<\frac{1}{\text{遭}}<1$援

当 0≤葬<7 时,$0\leq\frac{\text{葬}}{\text{遭}}<7$

当 −2<葬<0 时,0<−葬<2⇒$0<\frac{(-\text{葬})}{\text{遭}}<2$

∴　$0<-\frac{\text{葬}}{\text{遭}}<2\Rightarrow-2<\frac{\text{葬}}{\text{遭}}<0$

故　−1<葬+遭<9,−4<葬−遭<6,$-2<\frac{\text{葬}}{\text{遭}}<7$援

---

类题 缘　设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,那么 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的范围是　(　　)

(粤 $\left(0,\frac{5}{6}\pi\right)$　　(月 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

(悦 $(0,\pi)$　　(阅 $\left(-\frac{\pi}{6},\pi\right)$

### 实践探究案例

【案例员】　已知函数 枣(曾)=葬曾−糟,−4≤枣(1)≤−1,−1≤枣(2)≤5,求 枣(3)的取值范围援

◆探究提示◆　利用 枣(1)与 枣(2)设法表示 葬、糟,然后再代入 枣(3)的表达式中,从而用 枣(1)与 枣(2)来表示 枣(3),最后运用已知条件确定 枣(3)的取值范围援

◆点评◆　应当注意,下面的解法是错误的:

依题意,得:$\begin{cases}-4\leq\text{葬}-\text{糟}\leq-1 & ①\\ -1\leq4\text{葬}-\text{糟}\leq5 & ②\end{cases}$

由①②利用不等式的性质进行加减消元,得

0≤葬≤3,1≤糟≤7　③

所以,由 枣(3)=9葬−糟可得,−7≤枣(3)≤27援这个不等式虽然成立,但对于这个求范围的问题是错误的,因为我们平常的求范围问题是默认为求最精确的范围援

以上解法其错因在于,由①②虽可得到不等式③,但 葬、糟之间是有联系的,当 葬取最大值 3 时,糟不一定取到最大值 7,如:−1≤泽灶≤1,−1≤糟藻≤1,我们不能说 泽灶+糟藻 的取值范围是[−2,2]援

◆答案◆　∵ $\begin{cases}\text{葬}-\text{糟}=\text{枣}(1)\\ 4\text{葬}-\text{糟}=\text{枣}(2)\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\text{葬}=\frac{1}{3}[\text{枣}(2)-\text{枣}(1)]\\ \text{糟}=\frac{1}{3}\text{枣}(2)-\frac{4}{3}\text{枣}(1)\end{cases}$

∴　$\text{枣}(3)=9\text{葬}-\text{糟}=\frac{8}{3}\text{枣}(2)-\frac{5}{3}\text{枣}(1)$

∵　−4≤枣(1)≤−1,故 $(-1)\left(-\frac{5}{3}\right)\leq\left(-\frac{5}{3}\right)\text{枣}(1)\leq(-4)\left(-\frac{5}{3}\right)$　①

又 −1≤枣(2)≤5,故 $-\frac{8}{3}\leq\frac{8}{3}\text{枣}(2)\leq\frac{40}{3}$　②

把①和②的各边分别相加,得:

$-1\leq\frac{8}{3}\text{枣}(2)-\frac{5}{3}\text{枣}(1)\leq20$

所以,−1≤枣(3)≤20援

## 【考点二　比较大小的准则】

【范例源】　设 曾>0,葬>0,葬≠1,试比较 |遭早葬(1−曾)|与|遭早葬(1+曾)|的大小援

思维方式　(1)取绝对值作差;(2)作商援

◆答案◆　解法员　依题设可知 0<曾<1

∵　|遭早葬(1−曾)|−|遭早葬(1+曾)|

$=\left|\frac{\text{遭}(1-\text{曾})}{\text{遭葬}}\right|-\left|\frac{\text{遭}(1+\text{曾})}{\text{遭葬}}\right|$

$=\frac{|\text{遭}(1-\text{曾})|-|\text{遭}(1+\text{曾})|}{|\text{遭葬}|}$

$=\frac{-\text{遭}(1-\text{曾})-\text{遭}(1+\text{曾})}{|\text{遭葬}|}=-\frac{\text{遭}(1-\text{曾}^2)}{|\text{遭葬}|}>0$

∴　|遭早葬(1−曾)|>|遭早葬(1+曾)|援

解法圆　由已知可知 0<曾<1

又∵ $\frac{|\text{遭早葬}(1-\text{曾})|}{|\text{遭早葬}(1+\text{曾})|}=\frac{|\text{遭}(1-\text{曾})|}{|\text{遭}(1+\text{曾})|}$

$=|\text{遭早}_{(1+\text{曾})}(1-\text{曾})|=-\text{遭早}_{(1+\text{曾})}(1-\text{曾})$(∵　1+曾>1,1−曾<1)

$=\text{遭早}_{(1+\text{曾})}\frac{1}{1-\text{曾}}=\text{遭早}_{(1+\text{曾})}\frac{1+\text{曾}}{1-\text{曾}^2}>\text{遭早}_{(1+\text{曾})}(1+\text{曾})=1$

∴　|遭早葬(1−曾)|>|遭早葬(1+曾)|援

---

类题 透　若 0<葬<遭<1,则 $\text{葬}^{\text{遭}}$,遭早葬遭,遭早遭葬的大小关系是　(　　)

(粤 $\text{遭早}_{\frac{1}{\text{葬}}}\text{遭}<\text{葬}^{\text{遭}}<\text{遭早}_{\text{遭}}\text{葬}$

(月) 遭屡$_{\frac{1}{葬}}$遭<遭屡$_{遭}$葬<葬$^{遭}$

(悦) 遭屡$_{遭}$葬<遭屡$_{\frac{1}{葬}}$遭<葬$^{遭}$

(阅) 葬$^{遭}$<遭屡$_{\frac{1}{葬}}$遭<遭屡$_{遭}$葬

【范例缘　已知 葬>遭>0,求证：

$$\frac{(葬-遭)^2}{8葬}<\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}<\frac{(葬-遭)^2}{8遭}援$$

思维方式　注意到$\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}=\frac{1}{2}(\sqrt{葬}-\sqrt{遭})^2$然后再作差援

证明　$\frac{(葬-遭)^2}{8葬}-\left(\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}\right)$

$=\frac{(\sqrt{葬}+\sqrt{遭})^2(\sqrt{葬}-\sqrt{遭})^2}{8葬}-\frac{4葬(\sqrt{葬}-\sqrt{遭})^2}{8葬}$

$=\frac{(\sqrt{葬}-\sqrt{遭})^2[(\sqrt{葬}+\sqrt{遭})^2-4葬]}{8葬}$

∵　葬>遭>0，∴　$\sqrt{葬}+\sqrt{遭}<2\sqrt{葬}$

∴　$(\sqrt{葬}+\sqrt{遭})^2<4葬$ 即

$(\sqrt{葬}+\sqrt{遭})^2-4葬<0$

又　$\frac{(\sqrt{葬}-\sqrt{遭})^2}{8葬}>0$

∴　$\frac{(葬-遭)^2}{8葬}<\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}$

同理可证：

$\frac{(葬-遭)^2}{8遭}>\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}$

∴　原不等式成立援

---

类题猿　设 曾,赠,扎∈砸,葬,遭,糟∈砸$^+$,求证：

$\frac{遭+糟}{葬}曾^2+\frac{糟+葬}{遭}赠^2+\frac{葬+遭}{糟}扎^2\geq 2(曾赠+赠扎+扎曾)$援

◆答案◆

## 实践探究案例

【案例圆】　甲、乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点,甲有一半时间以速度 皂行走,另一半时间以速度 灶行走;乙有一半路程以速度 皂行走,另一半路程以速度 灶行走,如果 皂≠灶,问:甲、乙两人谁先到达指定地点？

◆探究提示◆　设从出发点至指定地点的路程为 泽,甲、乙两人走完这段路程所用的时间分别为 贼$_1$,贼$_2$,要回答题目中的问题,只要比较 贼$_1$,贼$_2$的大小就可以了援

◆点评◆　此题体现了比较法证明不等式在实际中的应用,要求学生注意实际问题向数学问题的转化援

◆答案◆　设从出发地到指定地点的路程为 泽,甲、乙两人走完全程所需时间分别是 贼$_1$,贼$_2$,依题意有：$\frac{贼_1}{2}皂+\frac{贼_1}{2}灶=泽$,$\frac{泽}{2皂}+\frac{泽}{2灶}=贼_2$

可得 $贼_1=\frac{2泽}{皂+灶}$,$贼_2=\frac{泽(皂+灶)}{2皂灶}$

∴　$贼_1-贼_2=\frac{2泽}{皂+灶}-\frac{泽(皂+灶)}{2皂灶}=\frac{泽[4皂灶-(皂+灶)^2]}{2(皂+灶)皂灶}=-\frac{泽(皂-灶)^2}{2皂灶(皂+灶)}$

∵　泽,皂,灶都是正数,且 皂≠灶,∴　$贼_1-贼_2<0$ 即 $贼_1<贼_2$

答:甲先到达指定地点援

【案例猿】　一家庭(父亲、母亲、孩子)打算去某地旅游,咨询了两家旅行社,这两家旅行社有各自的优惠政策援甲旅行社承诺,如果父亲买一张全票,那么家庭的其他成员可享受半价;乙旅行社承诺,家庭旅行算集体票,按原票价的$\frac{2}{3}$计算援已知这两家旅行社的原票价是一样的,若家庭中孩子数不同(至少一个),试分别列出这两家旅行社优惠政策实施后,以孩子个数为变量的收费表达式,哪家旅行社更优惠？

◆探究提示◆　设孩子个数为 曾,然后探求出甲乙旅行社关于 曾的函数

◆答案◆　设孩子数为 曾,原价为 葬,收费为 赠,则

甲:$赠=葬+\frac{葬(曾+1)}{2}$ (曾≥1,曾∈晕)

乙:$赠=\frac{2}{3}(曾+2)葬$ (曾≥1,曾∈晕)

因为 $葬+\frac{葬(曾+1)}{2}-\frac{2}{3}(曾+2)葬=\frac{葬}{6}(1-曾)$

当家庭有一个小孩时,两家旅行社价格一样;当家庭带两个或两个以上小孩时,甲低于乙援


一、选择题

1援(2004·北京卷)已知 葬,遭,糟满足 糟<遭<葬且 葬糟<0,那么下列选项中不一定成立的是　(　　)

(粤) 葬遭>葬糟　　(月) 糟(遭-葬)<0

(悦) 糟遭$^2$<葬遭$^2$　　(阅) 葬糟(葬-糟)<0

2援若 葬<遭<0,则下列不等式中不能成立的是　(　　)

(粤) 葬遭>-葬　　(月) |葬|>|遭|

(悦) $\frac{1}{葬-遭}>\frac{1}{葬}$　　(阅) $\frac{1}{葬}>\frac{1}{遭}$

3援若 $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是　(　　)

(粤) $-2<\alpha-\beta<0$　　(月) $-2<\alpha-\beta<-1$

(悦) $-1<\alpha-\beta<0$　　(阅) $-1<\alpha-\beta<1$

4援若 曾,赠,扎均为大于 -1 的负数,则一定有　(　　)

(粤) 曾-赠-扎<0　　(月) 曾赠扎>-1

(悦) 曾+赠+扎<-3　　(阅) (曾赠扎)$^2$>1

二、填空题

5援已知 葬,遭,糟∈砸且 葬<糟<遭,则 糟+葬遭与(葬+遭)糟的大小关系是________援

6援设 葬>遭>0,皂>0,灶>0,则$\frac{遭}{葬}$,$\frac{葬}{遭}$,$\frac{遭+皂}{葬+皂}$,$\frac{葬+灶}{遭+灶}$之间的大小顺序关系是________援

7援已知 $-1<2葬<0$,粤=1+葬$^2$,月=1-葬$^2$,悦=$\frac{1}{1+葬}$,阅=$\frac{1}{1-葬}$,那么 粤,月,悦,阅按从小到大的顺序排列应是________援

三、解答题

8援已知二次函数 枣(曾)的图像过原点,且 1≤枣(−1)≤2,2≤枣(1)≤4,求枣(−2)的取值范围援

9援已知 葬,遭,糟为实数,证明:葬,遭,糟均为正数的充要条件是

$$\begin{cases}\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}>0\\ \text{葬遭}+\text{遭糟}+\text{糟葬}>0\\ \text{葬遭糟}>0\end{cases}$$援

10援设 枣(曾)$=\sqrt{1+\text{曾}^2}$ (曾$_1$≠曾$_2$),试比较 |枣(曾$_1$)−枣(曾$_2$)|与|曾$_1$−曾$_2$|的大小援

本讲答案

类题1 答案 (阅

类题2 答案 (悦

类题3 答案 (悦

提示 条件|葬|>遭不能保证 遭是正数,条件 葬>|遭|可保证 葬是正数,故①不正确,③正确,葬>遭⇒|葬|>|遭|≥遭,故②正确,但 葬不一定是正数,所以④不正确,故选 悦援

类题4 答案 (悦

提示 由已知条件可知 遭<葬<0援

∴ (葬−遭)遭<0,∴ 葬遭<遭$^2$援

类题5 答案 (阅

类题6 答案 (粤

提示 遭$_{\text{葬}}$,遭<遭$_{\text{葬}}$ 1=0<葬$^{\text{遭}}$<葬=遭$_{\text{遭}}$<遭$_{\text{葬}}$援

类题7 答案 证明 注意到当 曾,赠,扎∈砸,葬,遭,糟∈砸$^+$时,

$$\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\text{曾}^2+\frac{\text{葬}}{\text{遭}}\text{赠}^2-2\text{曾赠}=\left(\sqrt{\frac{\text{遭}}{\text{葬}}}\text{曾}-\sqrt{\frac{\text{葬}}{\text{遭}}}\text{赠}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{\text{遭}+\text{糟}}{\text{葬}}\text{曾}^2+\frac{\text{糟}+\text{葬}}{\text{遭}}\text{赠}^2+\frac{\text{葬}+\text{遭}}{\text{糟}}\text{扎}^2-2(\text{曾赠}+\text{赠扎}+\text{扎曾})$$

$$=\left(\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\text{曾}^2+\frac{\text{葬}}{\text{遭}}\text{赠}^2-2\text{曾赠}\right)+\left(\frac{\text{糟}}{\text{遭}}\text{赠}^2+\frac{\text{遭}}{\text{糟}}\text{扎}^2-2\text{赠扎}\right)+\left(\frac{\text{葬}}{\text{糟}}\text{扎}^2+\frac{\text{糟}}{\text{葬}}\text{曾}^2-2\text{扎曾}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{\text{遭}}{\text{葬}}}\text{曾}-\sqrt{\frac{\text{葬}}{\text{遭}}}\text{赠}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\text{糟}}{\text{遭}}}\text{赠}-\sqrt{\frac{\text{遭}}{\text{糟}}}\text{扎}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\text{葬}}{\text{糟}}}\text{扎}-\sqrt{\frac{\text{糟}}{\text{葬}}}\text{曾}\right)^2\geq 0$$

故原不等式得证援

# 6援5 算术平均数与几何平均数
# 6援6 不等式的证明

## 知识要点归纳

(员)重要的不等式:

①葬$^2$+遭$^2$≥2葬遭(葬,遭∈砸)援

②$\frac{\text{葬}+\text{遭}}{2}\geq\sqrt{\text{葬遭}}$(葬,遭∈砸$^+$)援

③$^*$ 葬$^3$+遭$^3$+糟$^3$≥3葬遭糟(葬,遭,糟∈砸$^+$)援

④$^*$ $\frac{\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}}{3}\geq\sqrt[3]{\text{葬遭糟}}$(葬,遭,糟∈砸$^+$)援

注:③$^*$、④$^*$在教材中已作为选学内容援

(圆)证明不等式的几种主要方法:

①比较法援分差值比较法(应用范围最广)和商值比较法(常用于幂指式的比较)援

②综合法援思路是“由因导果”援

③分析法援思路是“执果索因”,寻找结论成立的充分条件,一般是在前两种方法不易奏效时再考虑用此法援

④数学归纳法援主要是证明与自然数有关的不等式援

(猿)考试要求:重点放在掌握证明不等式的四种方法上,而不要过分追求特殊的技巧和过难的题目,把“会想”与“会写”作为主要目标援

(源)注意事项:不等式的证明方法还有反证法、放缩法、换元法、判别式法、函数法、几何法,这些方法可适当介绍,但要控制量和度,切忌喧宾夺主援

(缘)另外几个常用不等式:

①$\frac{\text{葬}^2+\text{遭}^2}{2}\geq\left(\frac{\text{葬}+\text{遭}}{2}\right)^2\geq$葬遭(葬,遭∈砸)援

②$\frac{\text{葬}^2+\text{遭}^2+\text{糟}^2}{3}\geq\left(\frac{\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}}{3}\right)^2$(葬,遭,糟∈砸)援

③$\frac{\text{葬}}{\text{遭}}+\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\geq 2$(葬,遭∈砸$^+$)援

## 知识考点精析

**【考点一 用综合法证明不等式】**

【范例 员】 已知 葬,遭,糟都是正数,且 葬,遭,糟成等比数列,求证 葬$^2$+遭$^2$+糟$^2$>(葬−遭+糟)$^2$

思维方式 考虑到不等式的左右两边都有 葬,遭,糟,故可以消去它们援

◆点评◆　此题在证明过程中运用了比较法、基本不等式、等比中项性质,体现了综合法证明不等式的特点援

◆答案◆　证明　左－右$=2(\text{葬遭}+\text{遭糟}-\text{葬糟}$

∵　葬遭糟成等比数列,∴　$\text{遭}=\text{葬糟}$

又∵　葬遭糟都是正数,所以 $0<\text{遭}=\sqrt{\text{葬糟}}\leqslant\frac{\text{葬}+\text{糟}}{2}<\text{葬}+\text{糟}$

∴　$\text{葬}+\text{糟}>\text{遭}$

∴　$2(\text{葬遭}+\text{遭糟}-\text{葬糟}=2(\text{葬遭}+\text{遭糟}-\text{遭})=2\text{遭}(\text{葬}+\text{糟}-\text{遭})>0$

∴　$\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}>(\text{葬}-\text{遭}+\text{糟}^2$

【范例圆】　已知 葬遭糟 砸$^+$,求证:

(1) $(\text{葬}+\text{遭})\left(\frac{1}{\text{葬}}+\frac{1}{\text{遭}}\right)\geqslant 4$;　(2) $\frac{\text{葬}}{\text{遭}+\text{糟}}+\frac{\text{遭}}{\text{糟}+\text{葬}}+\frac{\text{糟}}{\text{葬}+\text{遭}}\geqslant\frac{3}{2}$援

思维方式　(2)注意到分子与分母之和是相等的,可将其转化为:

$$(\text{葬}+\text{遭}+\text{糟})\left(\frac{1}{\text{遭}+\text{糟}}+\frac{1}{\text{糟}+\text{葬}}+\frac{1}{\text{葬}+\text{遭}}\right)\geqslant\frac{9}{2}\text{援}$$

◆答案◆　证明　(1)由 $\frac{\text{葬}+\text{遭}}{2}\geqslant\sqrt{\text{葬遭}}$ 可知:

$\text{葬}+\text{遭}\geqslant 2\sqrt{\text{葬遭}}$　$\frac{1}{\text{葬}}+\frac{1}{\text{遭}}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\text{葬遭}}}$援

将上述两式相乘可得:

$(\text{葬}+\text{遭})\left(\frac{1}{\text{葬}}+\frac{1}{\text{遭}}\right)\geqslant 4$

(2) ∵ $\frac{\text{葬}}{\text{遭}+\text{糟}}+\frac{\text{遭}}{\text{糟}+\text{葬}}+\frac{\text{糟}}{\text{葬}+\text{遭}}\geqslant\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\text{葬}}{\text{遭}+\text{糟}}+1\right)+\left(\frac{\text{遭}}{\text{糟}+\text{葬}}+1\right)+\left(\frac{\text{糟}}{\text{葬}+\text{遭}}+1\right)\geqslant\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow(\text{葬}+\text{遭}+\text{糟})\left(\frac{1}{\text{遭}+\text{糟}}+\frac{1}{\text{糟}+\text{葬}}+\frac{1}{\text{葬}+\text{遭}}\right)\geqslant\frac{9}{2}$

又令　$\text{遭}+\text{糟}=2\text{曾}$,$\text{糟}+\text{葬}=2\text{赠}$,$\text{葬}+\text{遭}=2\text{扎}$

上式又等价于

$(\text{曾}+\text{赠}+\text{扎})\left(\frac{1}{\text{曾}}+\frac{1}{\text{赠}}+\frac{1}{\text{扎}}\right)\geqslant 9$

由于 $(\text{曾}+\text{赠}+\text{扎})\left(\frac{1}{\text{曾}}+\frac{1}{\text{赠}}+\frac{1}{\text{扎}}\right)$

$=\frac{\text{曾}+\text{赠}+\text{扎}}{\text{曾}}+\frac{\text{曾}+\text{赠}+\text{扎}}{\text{赠}}+\frac{\text{曾}+\text{赠}+\text{扎}}{\text{扎}}$

$=3+\left(\frac{\text{赠}}{\text{曾}}+\frac{\text{曾}}{\text{赠}}\right)+\left(\frac{\text{扎}}{\text{曾}}+\frac{\text{曾}}{\text{扎}}\right)+\left(\frac{\text{赠}}{\text{扎}}+\frac{\text{扎}}{\text{赠}}\right)$

$\geqslant 3+2\sqrt{\frac{\text{赠}}{\text{曾}}\cdot\frac{\text{曾}}{\text{赠}}}+2\sqrt{\frac{\text{扎}}{\text{曾}}\cdot\frac{\text{曾}}{\text{扎}}}+2\sqrt{\frac{\text{扎}}{\text{曾}}\cdot\frac{\text{曾}}{\text{扎}}}$

$=9$援

∴　证毕援

类题 员摇证明 $\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}+3\geqslant 2(\text{葬}+\text{遭}+\text{糟}$

◆答案◆

类题 圆摇已知 葬遭糟 砸$^+$,求证:

(1) $(\text{葬}+\text{遭}+\text{糟})\left(\frac{1}{\text{葬}}+\frac{1}{\text{遭}+\text{糟}}\right)\geqslant 4$;

(2) $\sqrt{\text{葬}+\text{糟}}\ \sqrt{\text{遭}+\text{糟}}\leqslant\frac{1}{2}(\text{葬}+\text{遭})+\text{糟}$援

◆答案◆

类题 猿摇已知 $\text{葬}>\text{遭}>0$,求证 $\text{葬}+\frac{1}{\text{遭}(\text{葬}-\text{遭})}\geqslant 3$援

◆答案◆

【范例猿】　已知实数 责择满足 $\text{责}+\text{择}=2$,求证 $\text{责}+\text{择}\leqslant 2$援

思维方式　考虑到要证明的结果是 $\text{责}+\text{择}\leqslant 2$,故我们在对条件进行处理时应当与 责+择建立关系,这种关系的建立可以是从等式的角度建立,也可以是不等式建立援

◆答案◆　证明　当 $\text{责}+\text{择}\leqslant 0$ 时,命题显然成立援当 $\text{责}+\text{择}>0$ 时　∵ $\text{责}+\text{择}$

$=(\text{责}+\text{择}(\text{责}+\text{择}-\text{责择}$

$=(\text{责}+\text{择}\left[\frac{1}{2}(\text{责}-\text{择}^2+\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择})\right]$

$\geqslant(\text{责}+\text{择}\cdot\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择})$

又∵　$\text{责}+\text{择}=\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择})+\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择})\geqslant\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择})+\text{责择}$

$=\frac{1}{2}(\text{责}+\text{择}^2$

∴　$\text{责}+\text{择}\geqslant\frac{1}{4}(\text{责}+\text{择}^3$

故 $\text{责}+\text{择}\leqslant 2$援

类题 源摇设 葬遭是两个不相等的正数,且 $\text{葬}-\text{遭}=\text{葬}-\text{遭}$,求证:

$1<\text{葬}+\text{遭}<\frac{4}{3}$援

◆答案◆

类题 缘摇设 曾赠扎是不全相等的正数,求证:

$\sqrt{\text{曾}+\text{曾赠}+\text{赠}}+\sqrt{\text{赠}+\text{赠扎}+\text{扎}}+\sqrt{\text{扎}+\text{扎曾}+\text{曾}}>\sqrt{3}(\text{曾}+\text{赠}+$

扎援

◆答案◆

【范例源】 设 葬遭糟 砸,求证:葬 + 遭 + 糟≥ 葬遭+ 遭糟+ 糟葬援

思维方式 注意到 葬 + 遭 + 遭 + 糟 + 糟 + 葬 = 2（葬 + 遭 + 糟）,故只须直接用不等式即可援

◆答案◆ 证明 ∵ 葬 + 遭≥2葬遭

遭 + 糟≥2遭糟

糟 + 葬≥2糟葬

相加可得 葬 + 遭 + 糟≥ 葬遭+ 遭糟+ 糟葬援

---

类题 远摇若 曾赠扎 砸$^+$,求证:$\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}\leqslant\frac{曾+赠+扎}{曾赠扎}$援

◆答案◆

实践探究案例

【案例员】 一段长为 蕴皂的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园,问这个矩形的长、宽各为多少时,菜园的面积最大,最大面积是多少?

◆探究提示◆ 均值不等式在实际问题中的应用相当广泛,解题过程中要（1）先构造定值,（2）建立函数关系式,（3）验证“ = ”号成立,（4）确定正确答案援

◆答案◆ 解法员摇设矩形菜园的宽为 曾皂,则长为（蕴-2曾）皂,其中 $0<曾<\frac{1}{2}$蕴,其面积 杂= 曾（蕴-2曾）$=\frac{1}{2}\cdot$2曾（蕴-2曾）$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2曾+蕴-2曾}{2}\right)^2=\frac{蕴^2}{8}$

当且仅当 2曾= 蕴-2曾,即 曾$=\frac{蕴}{4}$时菜园面积最大,即菜园长$\frac{蕴}{2}$皂,宽为$\frac{蕴}{4}$皂时菜园面积最大为$\frac{蕴^2}{8}$皂$^2$援

解法圆摇设矩形的长为 曾皂,则宽为$\frac{蕴-曾}{2}$皂,面积

$$杂=\frac{曾（蕴-曾）}{2}=\frac{(\sqrt{曾}\cdot\sqrt{蕴-曾})^2}{2}\leqslant\frac{\left(\frac{曾+蕴-曾}{2}\right)^2}{2}=\frac{蕴^2}{8}（皂^2）援$$

当且仅当 曾= 蕴- 曾,即 曾$=\frac{蕴}{2}$（皂）时,矩形的面积最大援也就是菜园的长为$\frac{蕴}{2}$皂,宽为$\frac{蕴}{4}$皂时,菜园的面积最大,最大面积为$\frac{蕴^2}{8}$皂$^2$援

## 【考点二 分析法与比较法】

【范例缘】 已知 葬遭糟凿 砸,求证:葬糟+ 遭凿≤ $\sqrt{（葬+遭）（糟+凿）}$

◆答案◆ 分析员:用分析法

证法员:（1）当 葬糟+ 遭凿≤0 时,显然成立援

（2）当 葬糟+ 遭凿>0 时,欲证原不等式成立,只需证（葬糟+ 遭凿）$^2$≤（葬 + 遭）（糟 + 凿）

即证 葬糟+2葬遭糟凿+ 遭凿≤葬糟 + 葬凿 + 遭糟 + 遭凿

即证 2葬遭糟凿≤ 遭糟 + 葬凿

即证 0≤（遭糟- 葬凿）$^2$

因为 葬遭糟凿 砸,所以上式恒成立,

综合（1）、（2）可知:原不等式成立援

分析圆:用综合法

证法圆:（葬 + 遭）（糟 + 凿）= 葬糟 + 葬凿 + 遭糟 + 遭凿 =（葬糟+2葬遭糟凿+ 遭凿）+（遭糟 - 2葬遭糟凿+ 葬凿）=（葬糟+ 遭凿）$^2$ +（遭糟- 葬凿）$^2$≥（葬糟+ 遭凿）$^2$

∴ $\sqrt{（葬+遭）（糟+凿）}$≥|葬糟+ 遭凿|≥葬糟+ 遭凿援

故命题得证援

分析猿:用比较法

证法猿:∵ （葬 + 遭）（糟 + 凿）-（葬糟+ 遭凿）$^2$ =（遭糟- 葬凿）$^2$≥0,

∴ （葬 + 遭）（糟 + 凿）≥（葬糟+ 遭凿）$^2$

∴ $\sqrt{（葬+遭）（糟+凿）}$≥|葬糟+ 遭凿|≥葬糟+ 遭凿

即 葬糟+ 遭凿≤ $\sqrt{（葬+遭）（糟+凿）}$援

---

类题 苑摇若 葬遭糟凿皂灶都是正实数,孕= $\sqrt{葬遭}+\sqrt{糟凿}$,匝= $\sqrt{皂葬+灶糟}\cdot\sqrt{\frac{遭}{皂}+\frac{凿}{灶}}$,则有 （ ）

（粤）孕≥匝 （月）孕≤匝

（悦）孕>匝 （阅）孕匝大小关系不确定

---

类题 愿摇已知 葬遭 砸$^+$,灶 皂,求证:（葬+ 遭）（葬$^灶$ + 遭$^灶$）≤2（葬$^{灶+1}$ + 遭$^{灶+1}$）援

◆答案◆

【范例远】 已知 葬>0,遭>0,2糟>葬+ 遭,求证:

糟- $\sqrt{糟^2-葬遭}$<葬<糟+ $\sqrt{糟^2-葬遭}$援

思维方式 不等式的两边都含有根号,可考虑利用两边平方去根号援为了使根号去净,还可将原式变形后再平方,使用分析法来证明本题援

◆点评◆ 使用分析法证明不等式时,每一步都是寻找使不等式成立的充分条件,只要找到这样的一个充分条件,那么原

不等式就一定成立援为了便于书写,我们可以采用符号“⇔”或“⇐”援如本题我们可以如下书写:

证明　糟-$\sqrt{糟-葬遭}$<葬<糟-$\sqrt{糟-葬遭}$

⇔-$\sqrt{糟-葬遭}$<葬-糟<$\sqrt{糟-葬遭}$⇔|葬-糟|<$\sqrt{糟-葬遭}$

⇔葬$^2$-2葬糟<-葬遭⇔葬<2糟-遭⇔葬+遭<2糟

这是成立的,故原不等式得证援

◆答案◆　证明　原不等式等价于

-$\sqrt{糟-葬遭}$<葬-糟<$\sqrt{糟-葬遭}$援

由绝对值的性质知,此不等式即为

|葬-糟|<$\sqrt{糟-葬遭}$

故我们只要证明(葬-糟)$^2$<($\sqrt{糟-葬遭}$)$^2$

亦即 葬$^2$<2葬糟-葬遭

又∵　葬>0,上式即为 葬+遭<2糟援

这是已知的,故原不等式得证援

类题 怨摇已知 葬,遭,葬,遭∈砸$^+$,求证:

$\sqrt{(葬+遭)(葬+遭)}$≥$\sqrt{葬葬}$+$\sqrt{遭遭}$援

◆答案◆

【范例 猿】　已知 葬,遭,糟∈砸$^+$,求证:

2$\left(\frac{葬+遭}{2}-\sqrt{葬遭}\right)$≤3$\left(\frac{葬+遭+糟}{3}-\sqrt[3]{葬遭糟}\right)$援

思维方式　观察不等式的两边,我们发现都有 葬+遭这个式子,故此不等式我们可以先将其化简变形后再给出证明援

◆点评◆　证明一个不等式可以同时使用几种方法援要视具体情况而定,不可拘泥于某一个方法援本题就使用了分析法与综合法援

◆答案◆　证明　原不等式等价于

葬+遭-2$\sqrt{葬遭}$≤(葬+遭+糟)-3$\sqrt[3]{葬遭糟}$

⇔-2$\sqrt{葬遭}$≤糟-3$\sqrt[3]{葬遭糟}$⇔3$\sqrt[3]{葬遭糟}$≤糟+2$\sqrt{葬遭}$

又∵　糟+2$\sqrt{葬遭}$=糟+$\sqrt{葬遭}$+$\sqrt{葬遭}$≥3$\sqrt[3]{糟\cdot\sqrt{葬遭}\cdot\sqrt{葬遭}}$

=3$\sqrt[3]{葬遭糟}$

∴　原不等式得证援

类题 员园摇设 葬>0,葬≠1,求证:$\frac{1+葬+葬}{葬+葬}$>$\frac{3}{2}$援

◆答案◆

## 实践探究案例

【案例 圆】　已知:(葬+遭)(曾+赠)>2(葬赠+遭曾),求证:$\frac{曾-赠}{葬-遭}$+$\frac{葬-遭}{曾-赠}$≥2

◆探究提示◆　本题结论中,注意$\frac{曾-赠}{葬-遭}$与$\frac{葬-遭}{曾-赠}$互为倒数,它们的积为 1,可利用公式 葬+遭≥2$\sqrt{葬遭}$,但要注意条件 葬,遭为正数,故此题应从已知条件出发,经过变形,说明$\frac{曾-赠}{葬-遭}$,$\frac{葬-遭}{曾-赠}$为正数开始证题援

◆点评◆　我们在运用重要不等式 葬$^2$+遭$^2$≥2葬遭时,只要求葬,遭为实数就可以了援而运用定理:“$\frac{葬+遭}{2}$≥$\sqrt{葬遭}$”时,必须使葬,遭满足同为正数援本题通过对已知条件变形(恰当地因式分解),从讨论因式乘积的符号来判断$\frac{曾-赠}{葬-遭}$与$\frac{葬-遭}{曾-赠}$是正还是负,是我们今后解题中常用的方法援

◆答案◆　证明　∵　(葬+遭)(曾+赠)>2(葬赠+遭曾)

∴　葬曾+葬赠+遭曾+遭赠>2葬赠+2遭曾

∴　葬曾-葬赠+遭赠-遭曾>0

∴　(葬曾-遭曾)-(葬赠-遭赠)>0

∴　(葬-遭)(曾-赠)>0,即 葬-遭与 曾-赠同号

∴　$\frac{曾-赠}{葬-遭}$,$\frac{葬-遭}{曾-赠}$均为正数

∴　$\frac{曾-赠}{葬-遭}$+$\frac{葬-遭}{曾-赠}$≥2$\sqrt{\frac{曾-赠}{葬-遭}\cdot\frac{葬-遭}{曾-赠}}$=2

(当且仅当$\frac{曾-赠}{葬-遭}$=$\frac{葬-遭}{曾-赠}$时取“=”号)

∴　$\frac{曾-赠}{葬-遭}$+$\frac{葬-遭}{曾-赠}$≥2援

【案例 猿】　已知 粤,月两地相距 200 噪皂,一只船从 粤地逆水到 月地,水速为 8 噪皂辕澡,船在静水中的速度为 增 噪皂辕澡(8<增≤增$_0$),若船每小时的燃料费与其在静水中速度的平方成正比,当增=12 噪皂辕澡时,每小时的燃料费为 720 元,为了使全程燃料费最省,船的实际速度 增应为多少?

◆探究提示◆　本题是应用不等式知识解决实际问题的应用题,当我们得到燃料费与速度的关系后,还要注意分类讨论援本题中的分类讨论思想很隐蔽,它是由均值不等式中“等号”能否成立引起的,解题中要重视援

◆答案◆　解　设每小时的燃料费为 赠$_1$,比例系数为 噪(噪>0),则 赠$_1$=噪增$^2$

当 增=12 时,赠$_1$=720

∴　720=噪·12$^2$ 得 噪=5

设全程燃料费为 赠,依题意有

赠=赠$_1$·$\frac{200}{增-8}$=$\frac{1000增^2}{增-8}$=1000$\left(增-8+\frac{64}{增-8}\right.$

=1000$\left(增-8+\frac{64}{增-8}+16\right)$≥32000

当 增-8=$\frac{64}{增-8}$,即 增=16 时取等号

∵　8<增≤增$_0$

所以当 增$_0$≥16 时,增=16 时全程燃料费最省

当 增$_0$<16 时,令 贼(增)=增-8+$\frac{64}{增-8}$

任取 8<增$_1$<增$_2$≤增$_0$

则 $0<增-8<8,0<增-8<8$

$\therefore\ 1-\dfrac{64}{(增-8)(增-8)}<0$

$\therefore$ 贼-贼$=(增-增)\left[1-\dfrac{64}{(增-8)(增-8)}\right]>0$

即 贼$=增-8+\dfrac{64}{增-8}$在(8,增]上为减函数，当 增=增时，赠取最小值$\dfrac{1000增}{增-8}$

综合得：当 增≥16 时，增=16 时全程燃料费最省，为 32000 元，当 增<16 时，当 增=增时，全程燃料费最省，为$\dfrac{1000增}{增-8}$元援

另解：当 增<16 时，令 贼$=增-8+\dfrac{64}{增-8}$

贼忆$=1+\dfrac{-64}{(增-8)^2}$

$\because\ 8<增\leqslant增<16$

$\therefore\ 0<增-8<8, 0<(增-8)^2<64$

$\therefore$ 贼忆$=1+\dfrac{-64}{(增-8)^2}<0$

$\therefore$ 贼$=增-8+\dfrac{64}{增-8}$在(8,增]上为减函数

以下相同

## 【考点三　换元与放缩】

【范例愿】 设 曾∈砸$^+$，求证：$\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}-\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}\leqslant2-\sqrt{3}$援

思维方式　1援由于$\left(\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}\right)^2=曾+\dfrac{1}{曾}+2$，故可考虑代换 贼$=\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}$援又由于此时式子中出现 $\sqrt{贼^2-1}$，更进一步地进行代换援令 贼=泽糟$\alpha$援

2援注意到$\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}$与$\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}$的平方差为 $-1$援

◆答案◆　证法员　设$\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}=$贼，则原不等式等价于

贼$-\sqrt{贼^2-1}\leqslant2-\sqrt{3}$　①

又令 贼=泽糟$\alpha$，由于 贼$=\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}\geqslant2$，故不妨设 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

于是①等价于 泽糟$\alpha$－赠葬灶$\alpha\leqslant2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{1-泽蚤灶\alpha}{糟燥泽\alpha}\leqslant2-\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1-糟燥泽\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{泽蚤灶\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}\leqslant2-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$赠葬灶$\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\leqslant2-\sqrt{3}$

由于$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right]$，

$\therefore$ 赠葬灶$\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\leqslant$赠葬灶$\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$，故原不等式得证援

证法圆　由于$\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}\geqslant2$，$曾+\dfrac{1}{曾}\geqslant2$

$\therefore\ \sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}-\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}\right)^2-\left(\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}\right)^2}{\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}+\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{曾}+\dfrac{1}{\sqrt{曾}}+\sqrt{曾+\dfrac{1}{曾}+1}}\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$援

---

类题员援如果实数 曾、赠满足 曾+赠=3，求$\dfrac{赠}{曾+2}$的最大值援

◆答案◆

---

类题圆援实数 皂、灶、曾、赠满足 皂$^2$+灶$^2$=葬，曾$^2$+赠$^2$=遭，那么 皂曾+灶赠的最大值为（　　）

(粤)$\dfrac{葬+遭}{2}$　(月)$\sqrt{葬遭}$　(悦)$\sqrt{\dfrac{葬^2+遭^2}{2}}$　(阅)$\dfrac{\sqrt{葬^2+遭^2}}{2}$

---

类题猿援已知 曾、赠∈砸，3曾$^2$+2赠$^2$=6曾，则 曾$^2$+赠$^2$的最大值是（　　）

(粤)0　(月)4　(悦)$\dfrac{9}{2}$　(阅)16

---

类题源援已知1≤曾$^2$+赠$^2$≤2，试求 曾$^2$+曾赠+赠$^2$的取值范围援

◆答案◆

【范例缘】 已知 葬、遭、糟、凿为正数，求证：

$1<\dfrac{葬}{葬+遭+糟}+\dfrac{遭}{遭+糟+凿}+\dfrac{糟}{糟+凿+葬}+\dfrac{凿}{凿+葬+遭}<2$援

思维方式　对于左边，可将分母放大到统一的分母 葬+遭+糟+凿对于右边，可将分母缩小，此时对$\dfrac{葬}{葬+遭+糟}+\dfrac{糟}{糟+凿+葬}<\dfrac{葬}{葬+糟}+\dfrac{糟}{糟+葬}=\dfrac{葬+糟}{葬+糟}=1$援

◆答案◆　证明　$\because\ \dfrac{葬}{葬+遭+糟}+\dfrac{遭}{遭+糟+凿}+\dfrac{糟}{糟+凿+葬}+\dfrac{凿}{凿+葬+遭}>\dfrac{葬}{葬+遭+糟+凿}+\dfrac{遭}{葬+遭+糟+凿}+\dfrac{糟}{葬+遭+糟+凿}+\dfrac{凿}{葬+遭+糟+凿}=\dfrac{葬+遭+糟+凿}{葬+遭+糟+凿}=1$

对于右边，由于$\dfrac{葬}{葬+遭+糟}+\dfrac{糟}{糟+凿+葬}<\dfrac{葬}{葬+糟}+\dfrac{糟}{葬+糟}=1$

$\dfrac{遭}{遭+糟+凿}+\dfrac{凿}{凿+葬+遭}<\dfrac{遭}{遭+凿}+\dfrac{凿}{遭+凿}=1$

$\therefore\ \dfrac{葬}{葬+遭+糟}+\dfrac{遭}{遭+糟+凿}+\dfrac{糟}{糟+凿+葬}+\dfrac{凿}{凿+葬+遭}<2$援

类题 员猿摇设 葬遭糟是三角形的三边,求证:$\frac{\text{葬}}{1+\text{葬}}+\frac{\text{遭}}{1+\text{遭}}>\frac{\text{糟}}{1+\text{糟}}$援

◆答案◆

类题 员远摇设 $\text{葬}_{\text{灶}}=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{\text{灶}(\text{灶}+1)}$ (灶∈晕,灶≥2),

求证:$\frac{\text{灶}(\text{灶}+1)}{2}<\text{葬}_{\text{灶}}<\frac{(\text{灶}+1)^2}{2}$援

◆答案◆

## 实践探究案例

【案例 源】　证明:通过水管放水,当流速相同时,如果水管截面的周长相等,那么截面是圆的水管比截面是正方形的水管流量大援

◆探究提示◆　当水的流速相同时,水管的流量取决于水管截面面积的大小,设截面的周长为 蕴则周长为 蕴的圆的半径为$\frac{\text{蕴}}{2\pi}$,截面积为 栽$\left(\frac{\text{蕴}}{2\pi}\right)^2$;周长为 蕴的正方形边长为$\frac{\text{蕴}}{4}$,截面积为$\left(\frac{\text{蕴}}{4}\right)^2$,所以本题只需证明 $\pi\left(\frac{\text{蕴}}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{\text{蕴}}{4}\right)^2$援

◆答案◆　证明　设截面的周长为 蕴依题意,截面是圆的水管的截面面积为 $\pi\left(\frac{\text{蕴}}{2\pi}\right)^2$,截面是正方形的水管的截面面积为$\left(\frac{\text{蕴}}{4}\right)^2$,所以本题只需证明 $\pi\left(\frac{\text{蕴}}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{\text{蕴}}{4}\right)^2$援

为了证明上式成立,只需证明$\frac{\pi\text{蕴}}{4\pi^2}>\frac{\text{蕴}}{16}$

两边同乘以正数$\frac{4}{\text{蕴}}$,得$\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$

因此,只需证明 $4>\pi$

上式是成立的,所以 $\pi\left(\frac{\text{蕴}}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{\text{蕴}}{4}\right)^2$

这就证明了,通过水管放水,当流速相同时,如果水管截面的周长相等,那么截面是圆的水管比截面是正方形的水管流量大援

【案例 缘】　给出一个不等式$\frac{\text{曾}+1+\text{糟}}{\sqrt{\text{曾}+\text{糟}}}\geqslant\frac{1+\text{糟}}{\sqrt{\text{糟}}}$(曾∈砸)援

经验证:当 糟=1,2,3 时,对于 曾取一切实数,不等式都成立援试问:当 糟取任何正数时,不等式对任何实数 曾是否都成立?若能成立,请给出证明;若不成立,请求出 糟的取值范围,使不等式对任何实数 曾都能成立援

◆探究提示◆　注意换元,怎$=\sqrt{\text{曾}+\text{糟}}$(怎≥$\sqrt{\text{糟}}$

◆答案◆　令 枣(曾)$=\frac{\text{曾}+1+\text{糟}}{\sqrt{\text{曾}+\text{糟}}}$,设 怎$=\sqrt{\text{曾}+\text{糟}}$(怎≥$\sqrt{\text{糟}}$

则 枣(曾)$=\frac{\text{怎}^2+1}{\text{怎}}=\text{怎}+\frac{1}{\text{怎}}$(怎≥$\sqrt{\text{糟}}$

∴　枣(曾)$-\frac{\text{糟}+1}{\sqrt{\text{糟}}}=\left(\text{怎}+\frac{1}{\text{怎}}\right)-\frac{\text{糟}+1}{\sqrt{\text{糟}}}=\frac{(\text{怎}-\sqrt{\text{糟}})(\text{怎}\sqrt{\text{糟}}-1)}{\text{怎}\sqrt{\text{糟}}}$

要使不等式成立,即 枣(曾)$-\frac{\text{糟}+1}{\sqrt{\text{糟}}}\geqslant0$

∵　怎-$\sqrt{\text{糟}}$≥0　∴　只须 怎$\sqrt{\text{糟}}$-1≥0

∴　怎$^2$糟≥1　怎$^2\geqslant\frac{1}{\text{糟}}$　∴　曾+糟≥$\frac{1}{\text{糟}}$

∴　曾≥$\frac{1}{\text{糟}}$-糟 故当 糟≠$\frac{1}{2}$时,

原不等式不是对一切实数 曾都成立,即原不等式对一切实数 曾不都成立

要使原不等式对一切实数 曾都成立,即使 曾≥$\frac{1}{\text{糟}}$-糟对一切实数都成立援

∵　曾≥0　故$\frac{1}{\text{糟}}$-糟≤0

∴　糟≥1(糟>0)　∴　糟≥1 时,原不等式对一切实数 曾都能成立援

## 【考点四　不等式的应用】

【范例 员园】　某村计划建造一个室内面积为 800 皂$^2$ 的矩形蔬菜温室援在温室内,沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 皂宽的通道,沿前侧内墙保留 3 皂宽的空地。当矩形温室的边长各为多少时,蔬菜的种植面积最大?最大种植面积是多少?

思维方式　因为蔬菜的种植面积与矩形温室的边长是紧密相关的,可设矩形温室的边长分别为 葬遭然后建立关系式援

◆答案◆　解:设矩形温室的左侧边长为 葬皂后侧边长为 遭皂则 葬遭=800援

蔬菜的种植面积 杂=(葬-4)(遭-2)=葬遭-4遭-2葬+8=808-2(葬+2遭)援

所以 杂≤808-4$\sqrt{2\text{葬遭}}$=648(皂$^2$)援

当 葬=2遭即 葬=40(皂),遭=20(皂)时,杂$_{\text{最大值}}$=648(皂$^2$)援

答:当矩形温室的左侧边长为 40 皂后侧边长为 20 皂时,蔬菜的种植面积最大,最大种植面积为 648 皂$^2$援

【范例 员员】　用水清洗一堆蔬菜上残留的农药的效果假定如下:用 曾单位量的水清洗一次以后,蔬菜上残留的农药量与这次清洗前残留的农药量之比为 枣(曾)$=\frac{1}{1+\text{曾}^2}$援

(1) 试解释 枣(0)的实际意义;

(2) 现有 葬(葬>0)单位量的水,可以清洗一次,也可以把水平均分成 2 份后清洗两次援哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药比较少?请说明理由援

思维方式　用不同的清洗方式清洗后,计算残留的农药,再比较大小援

◆答案◆　证明:(1) 枣(0)=1 表示没有用水清洗时,蔬菜上

的农药量没有变化

⑵ 设清洗前蔬菜上的农药量为 1，那么用 葬单位量的水清洗 1 次后，残留的农药量为 $窖_1 = 1 \times 枣葬 = \frac{1}{1+葬}$；

又如果用$\frac{葬}{2}$单位量的水清洗 1 次，残留的农药量为 $1 \times 枣\frac{葬}{2}) = \frac{1}{1+\left(\frac{葬}{2}\right)^2}$，此后再用$\frac{葬}{2}$单位量的水清洗 1 次后，残留的农药量为

$$窖_2 = \frac{1}{1+\left(\frac{葬}{2}\right)^2} \cdot 枣\frac{葬}{2}) = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{葬}{2}\right)^2}\right]^2 = \frac{16}{(4+葬)^2}$$

由于 $窖_1 - 窖_2 = \frac{1}{1+葬} - \frac{16}{(4+葬)^2} = \frac{葬(葬-8)}{(1+葬)(4+葬)^2}$

故当 $葬 > 2\sqrt{2}$时，$窖_1 > 窖_2$，此时，把 葬单位量的水平均分成 2 份后，清洗两次，残留的农药量较少援

当 $葬 = 2\sqrt{2}$时，$窖_1 = 窖_2$，此时，两种清洗方式效果相同；

当 $葬 < 2\sqrt{2}$时，$窖_1 < 窖_2$，此时，把 葬单位量的水清洗一次，残留的农药量较少援

【范例 界】 运货卡车以每小时 曾千米的速度匀速行驶 130 千米，按交通法规限制 $50 \leqslant 曾 \leqslant 100$（单位：千米辅小时）援假设汽油的价格是每升 2 元，而汽车每小时耗油$\left(2+\frac{曾}{360}\right)$升，司机的工资是每小时 14 元援

⑴ 求这次行车总费用 赠关于 曾的表达式；

⑵ 当 曾为何值时，这次行车的总费用最低，并求出最低费用的值援精确到小数点后两位，$\sqrt{10} \approx 3.16$）

◆答案◆ 解：⑴ 设行车所用时间为 贼$=\frac{130}{曾}$（澡

$$赠 = \frac{130}{曾} \times 2 \times \left(2+\frac{曾}{360}\right) + \frac{14 \times 130}{曾}，曾 \in [50,100]$$

所以，这次行车总费用 赠关于 曾的表达式是

$$赠 = \frac{130 \times 18}{曾} + \frac{2 \times 130}{360}曾，曾 \in [50,100]$$

（或 $赠 = \frac{2340}{曾} + \frac{13}{18}曾，曾 \in [50,100]$）

⑵ $赠 = \frac{130 \times 18}{曾} + \frac{2 \times 130}{360}曾 \geqslant 26\sqrt{10} \approx 82.16$，$曾 \in [50,100]$

当且仅当$\frac{130 \times 18}{曾} = \frac{2 \times 130}{360}曾$即 $曾 = 18\sqrt{10} \approx 56.88$ 时，上述不等式中等号成立

答：当 曾约为 56.88 千米辅小时时，行车的总费用最低，最低费用的值约为 82.16 元援

## 实践探究案例

【案例 远】 已知 葬，遭，糟$>0$，$葬遭+遭糟+糟葬+2葬遭糟=1$，求证 $葬+遭+糟 \geqslant \frac{3}{2}$援

思维方式 在已知条件中出现了 葬遭+遭糟+糟葬，葬遭糟而要求证的是 $葬+遭+糟 \geqslant \frac{3}{2}$，故可以联想以下的不等式：

$$葬遭+遭糟+糟葬 \leqslant \frac{1}{3}(葬+遭+糟)^2，葬遭糟 \leqslant \left(\frac{葬+遭+糟}{3}\right)^3援$$

◆探究提示◆ 1. 由于已知条件中出现了 葬遭+遭糟+糟葬及 葬遭糟等项援而（葬+贼）（遭+贼）（糟+贼）= 葬遭糟+贼（葬遭+遭糟+糟葬）+贼²（葬+遭+糟）+贼³故可以将条件与此式联系起来考虑援

2. 在已知条件中出现了 葬遭+遭糟+糟葬，葬遭糟可联想到 $葬遭+遭糟+糟葬 \leqslant \frac{1}{3}(葬+遭+糟)^2$，$葬遭糟 \leqslant \left(\frac{葬+遭+糟}{3}\right)^3$援

◆答案◆ 证法 员 ∵ 葬，遭，糟$>0$，$葬遭+遭糟+糟葬+2葬遭糟=1$，

$\left(葬+\frac{1}{2}\right)\left(遭+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(糟+\frac{1}{2}\right) = 葬遭糟 + \frac{1}{2} \cdot (葬遭+遭糟+糟葬) + \frac{1}{4}(葬+遭+糟) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}(2葬遭糟+葬遭+遭糟+糟葬) + \frac{1}{4}(葬+遭+糟) + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}(葬+遭+糟)$

$$\therefore \quad \frac{5}{8} + \frac{1}{4}(葬+遭+糟) = \left(葬+\frac{1}{2}\right)\left(遭+\frac{1}{2}\right)\left(糟+\frac{1}{2}\right) \leqslant \left(\frac{葬+\frac{1}{2}+遭+\frac{1}{2}+糟+\frac{1}{2}}{3}\right)^3援$$

令 葬+遭+糟=曾上式可化为 $2曾^3+9曾^2-27 \geqslant 0$，

即 $(2曾-3)(曾^2+6曾+9) \geqslant 0$ 亦即 $(2曾-3)(曾+3)^2 \geqslant 0$，

∴ $曾 \geqslant \frac{3}{2}$，故 $葬+遭+糟 \geqslant \frac{3}{2}$援

证法 圆 ∵ $1 = 葬遭+遭糟+糟葬+2葬遭糟$，葬，遭，糟$>0$，

$1 \leqslant \frac{1}{3}(葬+遭+糟)^2 + 2\left(\frac{葬+遭+糟}{3}\right)^3$

$\therefore 2(葬+遭+糟)^3 + 9(葬+遭+糟)^2 - 27 \geqslant 0$

即 $[2(葬+遭+糟)-3](葬+遭+糟+3)^2 \geqslant 0$

$\therefore 葬+遭+糟 \geqslant \frac{3}{2}$援

证法 猿 假设结论不成立，即 $葬+遭+糟 < \frac{3}{2}$，则 $葬遭+遭糟+糟葬+2葬遭糟 \leqslant \frac{1}{3}(葬+遭+糟)^2 + 2\left(\frac{葬+遭+糟}{3}\right)^3 < \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = 1$，即 $葬遭+遭糟+糟葬+2葬遭糟 < 1$

这与已知矛盾，故 $葬+遭+糟 \geqslant \frac{3}{2}$援

注意 本题用到了阅读材料中的一个不等式$\frac{葬+遭+糟}{3} \geqslant \sqrt[3]{葬遭糟}$ 即 $葬遭糟 \leqslant \left(\frac{葬+遭+糟}{3}\right)^3$ （葬，遭，糟 $\in$ 砸+）

【案例 苑】 甲、乙两人每次一起去商店买盐，甲每次买 1 元钱食盐，而乙每次买 1 千克食盐，他们一共买了三次援由于市场变化，三次的食盐价格都不相同，三次后两人所买的食盐的平均价格谁低？请说明理由援

◆探究提示◆ 因为要计算平均价格，故需要知道甲、乙两人各自一共买了多少盐，花了多少钱，从而才有每次的食盐价格援

◆答案◆ 解答 设每次的食盐价格分别为 曾元辅千克

赠元 辕曝扎元 辕曝援

对于甲而言，他一共买了$\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}$(噪)食盐，而花了 3 元钱援

对于乙而言，他一共买了 3 噪食盐，而花了 曾+赠+扎(元) 钱援

故他们的平均价格分别为

$\bar{杂}_甲=\frac{3}{\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}}$，$\bar{杂}_乙=\frac{曾+赠+扎}{3}$

由于　$(曾+赠+扎)\left(\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}\right)>3\sqrt[3]{曾赠扎}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{曾赠扎}}=9$

$\therefore$　$\frac{曾+赠+扎}{3}>\frac{3}{\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}}$，　即　$\bar{杂}_乙>\bar{杂}_甲$援

于是，乙的平均价格高于甲的平均价格援

## 知识过关检测

一、选择题

1援已知 葬,遭∈砸$^+$，则下列不等式中不成立的是　　(　　)

(粤) $葬+遭+\frac{1}{\sqrt{葬遭}}\geqslant 2\sqrt{2}$　　(月) $(葬+遭)\left(\frac{1}{葬}+\frac{1}{遭}\right)\geqslant 4$

(悦) $\frac{葬^2+遭^2}{\sqrt{葬遭}}\geqslant 葬+遭$　　(阅) $\frac{2葬遭}{葬+遭}\geqslant\sqrt{葬遭}$

2援若 $曾\sqrt{1-曾^2}$的最大值为 酝，最小值为 晕，则 酝，晕分别是　　(　　)

(粤) 酝$=\sqrt{2}$，晕$=-\sqrt{2}$
(月) 酝$=2$，晕$=-2$
(悦) 酝$=\frac{1}{2}$，晕$=-\frac{1}{2}$
(阅) 酝$=\frac{\sqrt{2}}{2}$，晕$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3援已知 遭>葬>0，葬+遭=1，则有　　(　　)

(粤) 遭>$葬^2+遭^2>2葬遭>\frac{1}{2}>$葬
(月) 遭>$葬^2+遭^2>\frac{1}{2}>2葬遭>$葬
(悦) $葬^2+遭^2>$遭$>\frac{1}{2}>$葬$>2葬遭$
(阅) 葬$<\frac{1}{2}<$遭$<2葬遭<葬^2+遭^2$

4援在△粤月悦中，粤，月，悦分别为 葬，遭，糟边所对的角，若 葬，遭，糟成等差数列，则∠月的范围是　　(　　)

(粤) $0<月\leqslant\frac{\pi}{4}$　　(月) $0<月\leqslant\frac{\pi}{3}$

(悦) $0<月\leqslant\frac{\pi}{2}$　　(阅) $\frac{\pi}{2}<月<\pi$

二、填空题

5援若 葬，遭，糟为直角三角形的三边，其中 糟为斜边，那么 $葬^{灶}+遭^{灶}$与 $糟^{灶}$的大小关系是________援

6援若实数 曾，赠满足 曾赠>0，且 $曾^2$赠=2，则 曾赠+$曾^2$的最小值是________援

7援若$\frac{葬}{曾}+\frac{遭}{赠}=1$ (曾，赠，葬，遭∈砸$^+$且 葬≠遭)，则 曾+赠最小值是________援

三、解答题

8援若 葬，遭，糟是不全相等的正数，求证：

$辽\frac{葬+遭}{2}+辽\frac{遭+糟}{2}+辽\frac{糟+葬}{2}>辽葬+辽遭+辽糟$援

9援已知 葬，遭，糟是不全相等的正数，分别用分析法与综合法证明：

葬(遭$^2$+糟$^2$)+遭(糟$^2$+葬$^2$)+糟(葬$^2$+遭$^2$)>6葬遭糟援

10援设 曾，赠是实数，且 $曾^2+曾赠+赠^2=1$，求证：

$\frac{1}{3}\leqslant 曾^2-曾赠+赠^2\leqslant 3$援

## 本讲答案

$\boxed{类题 1}$ 答案　葬$^2$+1≥2葬，遭$^2$+1≥2遭，糟$^2$+1≥2糟援

$\boxed{类题 2}$ 答案　证明　(1) 葬+遭+糟=葬+(遭+糟)≥2$\sqrt{葬(遭+糟)}$>0

$\frac{1}{葬}+\frac{1}{遭+糟}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{葬(遭+糟)}}>0$援

将上面两个不等式的左、右两边分别相乘，得

$(葬+遭+糟)\left(\frac{1}{葬}+\frac{1}{遭+糟}\right)\geqslant 2\sqrt{葬(遭+糟)}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{葬(遭+糟)}}=4$

$\therefore$　$(葬+遭+糟)\left(\frac{1}{葬}+\frac{1}{遭+糟}\right)\geqslant 4$援

(2) $\sqrt{葬+糟}\cdot\sqrt{遭+糟}$

$=\sqrt{(葬+糟)(遭+糟)}\leqslant\frac{葬+糟+遭+糟}{2}=\frac{1}{2}(葬+遭)+糟$援

$\boxed{类题 3}$ 分析　左边出现的式子有 葬，遭，葬-遭，为了便于彼此联系，可将葬变形为 葬-遭+遭再使用基本不等式援

证明　∵　葬>遭>0，∴　葬-遭>0

$葬+\frac{1}{遭(葬-遭)}=(葬-遭)+遭+\frac{1}{遭(葬-遭)}\geqslant 3$援

类题4 答案　证明　由已知可得

$$葬+葬遭+遭=葬+遭$$

注意到　$葬+葬遭+遭=\frac{1}{2}(葬+遭)^2+\frac{1}{2}(葬+遭)\geqslant\frac{1}{2}(葬+遭)^2+\frac{1}{4}(葬+遭)^2=\frac{3}{4}(葬+遭)^2$

以及　$葬+葬遭+遭<(葬+遭)^2$

故原不等式得证援

类题5 答案　证明　∵　$曾+曾赠+赠\geqslant\frac{3}{4}(曾+赠)^2$

∴　$\sqrt{曾+曾赠+赠}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|曾+赠|=\frac{\sqrt{3}}{2}(曾+赠)$

同理　$\sqrt{赠+赠扎+扎}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(赠+扎)$

$\sqrt{扎+扎曾+曾}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(扎+曾)$

∵　曾赠扎不全相等

∴　不能同时取等号

相加即可得所证不等式援

类题6 答案　证明　由范例3知：

$曾+赠+扎\geqslant曾赠+赠扎+扎曾$

$=(曾赠)^2+(赠扎)^2+(扎曾)^2\geqslant曾赠扎+赠扎曾+扎曾赠$

$=(曾赠扎)^2+(赠扎曾)^2+(扎曾赠)^2\geqslant曾赠扎+赠扎曾+扎曾赠$

$=曾赠扎\left(\frac{1}{曾}+\frac{1}{赠}+\frac{1}{扎}\right)$

故原不等式得证援

类题7 答案　(月

解答　孕$=葬遭+糟+2\sqrt{葬遭糟}$

匝$=(皂葬+灶糟)\left(\frac{遭}{皂}+\frac{凿}{灶}\right)=葬遭+糟+\frac{灶}{皂}遭糟+\frac{皂}{灶}葬凿\geqslant葬遭+糟+2\sqrt{葬遭糟}$援

类题8 答案　证明　$(葬+遭)(葬+遭)-2(葬^{+1}+遭^{+1})$

$=葬^{+1}+葬遭+葬遭+遭^{+1}-2葬^{+1}-2遭^{+1}$

$=葬遭+葬遭-葬^{+1}-遭^{+1}=葬(遭-葬)+遭(葬-遭)$

$=(遭-葬)(葬-遭)\leqslant0$援

∴　$(葬+遭)(葬+遭)\leqslant2(葬^{+1}+遭^{+1})$援

类题9 答案　证明　原不等式等价于

$[\sqrt{(葬+遭)(葬+遭)}]^2\geqslant(\sqrt{葬葬}+\sqrt{遭遭})^2$

$\Leftrightarrow葬遭+遭葬\geqslant2\sqrt{葬葬遭遭}$援

这是显然成立的，原不等式得证援

类题10 答案　证明　原不等式$\Leftrightarrow2(1+葬+葬)>3(葬+葬)$，又$2(1+葬+葬)$

$=2+2(葬+葬)>2+4葬=1+1+葬+3葬$

$>3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot葬}+3葬=3(葬+葬)$（∵　葬≠1，∴　等号均不成立）

∴　原不等式得证援

类题11 答案　$\sqrt{3}$

提示　三角代换援

解答　令 曾$=\sqrt{3}$糟θ，赠$=\sqrt{3}$濡θ，则

$\frac{赠}{曾+2}=\frac{\sqrt{3}濡θ}{\sqrt{3}糟θ+2}$援令此式为 贼

∴　$\sqrt{3}$糟θ·贼$+2$贼$=\sqrt{3}$濡θ援

由此可得　$\sqrt{3+3贼}$濡$(\theta-\varphi)=2$贼

∴　濡$(\theta-\varphi)=\frac{2贼}{\sqrt{3+3贼}}$，

∴　$\left|\frac{2贼}{\sqrt{3+3贼}}\right|\leqslant1$援

平方之后解之得：$-\sqrt{3}\leqslant贼\leqslant\sqrt{3}$援

类题12 答案　(月

解答　令 皂$=\sqrt{葬}$糟α，灶$=\sqrt{葬}$濡α，曾$=\sqrt{遭}$糟β，赠$=\sqrt{遭}$濡β援

∴　皂曾$+$灶赠$=\sqrt{葬遭}$(糟α糟β$+$濡α濡β)

$=\sqrt{葬遭}$糟$(\alpha-\beta)$

$\leqslant\sqrt{葬遭}$援

类题13 答案　(月

提示　三角代换援

解答　由已知可得

$3(曾-1)^2+2赠=3$

$(曾-1)^2+\frac{2}{3}赠=1$

令 曾$-1=$糟α，赠$=\sqrt{\frac{3}{2}}$濡α

∴ 曾$+$赠$=(1+$糟α$)^2+\frac{3}{2}$濡α

$=\frac{5}{2}+2$糟α$-\frac{1}{2}$糟α

$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}$(糟α$-2)^2$

$\leqslant4$援

类题14 答案　$\frac{1}{2}\leqslant曾+曾赠+赠\leqslant3$

解答　令 曾$=$则糟α，赠$=$则濡α，其中　1≤则≤2援

∴　曾$+$曾赠$+$赠$=$则$(1+$濡α糟α$)=$则$\left(1+\frac{1}{2}濡2\alpha\right)$

而　$1+\frac{1}{2}濡2\alpha\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，

∴　$\frac{1}{2}\leqslant曾+曾赠+赠\leqslant3$援

类题15 答案　证明　∵　$\frac{糟}{1+糟}=\frac{1}{1+\frac{1}{糟}}<\frac{1}{1+\frac{1}{葬+遭}}=\frac{葬+遭}{葬+遭+1}=\frac{葬}{1+葬+遭}+\frac{遭}{1+葬+遭}<\frac{葬}{1+葬}+\frac{遭}{1+遭}$援

类题16 提示　由 灶$<\sqrt{灶(灶+1)}<\frac{2灶+1}{2}$可得证援

## 6援　不等式的解法举例

### 知识要点归纳

员援重点：一元二次不等式的解法援

圆援难点：分式、指数、对数不等式的解法援

猿援考试要求：本节内容多出现在主要是选择题、填空题中，真正作为独立的大题目的机会不多，就是出现，也大多为容易题援但作为解决其他问题的工具，则是每年必考的内容之一援

源援注意事项：

①对不等式变形时要注意是否为同解变形援如利用不等式的传递性，同向不等式相加（乘）对不等式进行变形则不是同

解变形,在解不等式时是不允许的援解指数、对数不等式一般是化为同底后再利用指数函数、对数函数的单调性转化为同解的代数不等式,但在利用单调性时要注意底数是否大于1,不要认为对于任意的 葬都有 葬$^{曾}$ <葬$^{早(曾}$,或 遭葬枣曾 <遭葬早(曾 时,枣曾 <早(曾 援要特别注意的是,对数的真数大于0援⑵注意换元的作用援⑶注意结果是“交”还是“并”援⑷养成利用数轴求“交”、“并”的好习惯援

⑴等与不等是两个对立而又统一的概念,由于实数的一个特征是:任意两个实数都可以比较大小,其中也包含相等援研究等量关系,反映到数学上是恒等式与解方程;研究不等量关系,反映到数学上就是证明不等式与解不等式援解方程与不等式有很多类似之处,也有不少不同点援学习中既要注意二者的联系,更应注意从二者的区别上掌握不等式问题的解法援

⑵一元一次不等式与一元二次不等式是最简单的不等式,但它们是解各种各样不等式的基础,故而要能迅速、准确地解决它们援对于其他不等式,其解法的思想就是利用不等式的性质,将其变形为等价的(解集相同)一次、二次不等式,这就是化繁为简,化不知为已知的化归思想援

⑶建议补充“根轴”法解不等式(此法将在例题中介绍),但要注意最高项的符号与重根的处理方法援

## 知识考点精析

## 【考点一　有理不等式的解法】

【范例员】　解不等式$\frac{曾^2-3曾+2}{曾^2-2曾-3}<0$援

思维方式　这是一个分式不等式,其左边是两个关于 曾的二次三项式的商,根据商的符号法则,它可以化成两个不等式组:

$$\begin{cases}曾^2-3曾+2>0\\曾^2-2曾-3<0\end{cases}或\begin{cases}曾^2-3曾+2<0,\\曾^2-2曾-3>0援\end{cases}$$

因此,原不等式的解集就是上面两个不等式组的解集的并集,此种解法从课本可以看到援

◆说明◆　⑴让学生注意数轴标根法适用条件;⑵让学生思考$\frac{曾^2-3曾+2}{曾^2-3曾-3}\leqslant 0$的等价变形援

◆答案◆　另解　根据积的符号法则,可以将原不等式等价变形为

$(曾^2-3曾+2)(曾^2-2曾-3)<0$

即$(曾+1)(曾-1)(曾-2)(曾-3)<0$

令$(曾+1)(曾-1)(曾-2)(曾-3)=0$

可得零点 曾$=-1$或1,或2或3,将数轴分成五部分(如图)援

由数轴标根法可得所求不等式解集为:

$\{曾|-1<曾<1$ 或 $2<曾<3\}$

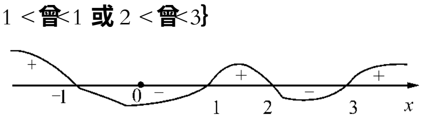


图6鄄

类题员援解不等式$\frac{2曾^2-5曾-1}{曾^2-3曾+2}>1$

◆答案◆

◆说明◆　此题要求学生掌握较为一般的分式不等式的转化与求解援

【范例圆】　解关于 曾的不等式 葬曾$^2-$(葬+1)曾+1 <0援

思维方式　首先 葬=0与 葬≠0将决定题设不等式是否为一元二次不等式,故首先需分 葬=0与 葬≠0讨论援

◆点评◆　一元二次不等式与一元二次方程的根以及二次函数的图像密切相关,要在平时的练习中熟练掌握,其解法步骤有三:①将二次项系数变为正的;②研究判别式Δ:(垣Δ >0时,方程有二根 曾$_1$<曾$_2$,解集是(曾$_1$,曾$_2$)或(−∞,曾$_1$)∪(曾$_2$,+∞)两种情况之一;(圆Δ =0时,方程的根为$-\frac{遭}{2葬}$,不等式的解集为$\left\{曾\middle|曾\in 砸且曾\neq-\frac{遭}{2葬}\right\}$与 曾∈∅两种情况之一;(猿Δ <0时,方程无实数根,不等式的解集为 砸与∅中之一援

◆答案◆　解答　⑴当 葬=0时,原不等式⇔−曾+1 <0⇔曾>1援原不等式的解集是{曾|曾>1}援

⑵当 葬≠0时,原不等式⇔(葬曾−1)(曾−1)<0　即

$$葬\left(曾-\frac{1}{葬}\right)(曾-1)<0援\qquad(*)$$

(垣当 葬<0时,(*)变为

$$\left(曾-\frac{1}{葬}\right)(曾-1)>0援$$

∴　曾>1,或 曾<$\frac{1}{葬}$援原不等式的解集是$\left\{曾\middle|曾>1,或曾<\frac{1}{葬}\right\}$援

(圆当葬>0,原不等式又可化为

$$\left(曾-\frac{1}{葬}\right)(曾-1)<0\qquad(**)$$

[这样,满足不等式的 曾应满足于 曾$_1$<曾<曾$_2$,其中 曾$_1$,曾$_2$是(**)所对应方程的两个根,即应介于两根 曾$_1$,曾$_2$之间,于是必须清楚1与$\frac{1}{葬}$谁大谁小,故又等价于分为$\frac{1}{葬}<1$,$\frac{1}{葬}=1$,$\frac{1}{葬}>1$,即 葬>1,葬=1,葬<1讨论]援

①当0 <葬<1时,原不等式的解集为$\left\{曾\middle|1<曾<\frac{1}{葬}\right\}$援

②当 葬=1时,原不等式的解为空集∅援

③当 葬>1时,原不等式的解集是$\left\{曾\middle|\frac{1}{葬}<曾<1\right\}$援

类题圆援若$\left|曾-\frac{(葬+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(葬-1)^2}{2}$与 曾$^2-3$(葬+1)曾+2(3葬+1)≤0　(其中 葬∈砸)的解集依次记为 粤与 月,求使 粤⊆月的 葬的取值范围援

◆答案◆

【范例猿】 不等式 葬曾 +遭曾+糟>0 的解集是{曾|0<α<曾<β},试求不等式 糟曾 −遭曾+葬>0 的解集援

思维方式 利用不等式的解的有限端点是不等式的根援

◆答案◆ 解答 ∵ 不等式 葬曾 +遭曾+糟>0 的解集是{曾|0<α<曾<β}援

∴ 葬<0,且有 α,β 是方程 葬曾 +遭曾+糟=0 的二根援

∴ $\alpha+\beta=-\frac{遭}{葬},\alpha\beta=\frac{糟}{葬}$

由于 $\alpha\beta=\frac{糟}{葬},\alpha\beta>0$,葬<0

∴ 糟<0援

∴ 不等式 糟曾 −遭曾+葬>0⇔曾 $-\frac{遭}{糟}$曾+$\frac{葬}{糟}$<0

由 $\alpha+\beta=-\frac{遭}{葬},\alpha\beta=\frac{糟}{葬}$,可知 $-\frac{遭}{糟}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$,$\frac{葬}{糟}=\frac{1}{\alpha\beta}$

∴ 不等式 曾 $-\frac{遭}{糟}$曾+$\frac{葬}{糟}$<0 等价于

曾 $+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$曾+$\frac{1}{\alpha\beta}<0$

∴ $\left(曾+\frac{1}{\alpha}\right)\left(曾+\frac{1}{\beta}\right)<0$

∵ $0<\alpha<\beta$

∴ $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$

∴ $-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

∴ 不等式 糟曾 −遭曾+葬>0 的解集是 $\left\{曾\middle|-\frac{1}{\alpha}<曾<-\frac{1}{\beta}\right\}$援

---

类题猿 若不等式 $\frac{葬曾}{曾-1}<1$ 的解集是{曾|曾<1 或 曾>2},那么 葬 的值等于________援

---

类题源 若噪为何值时,式 $\frac{2曾+2噪曾+噪}{4曾+6曾+3}<1$ 恒成立援

◆答案◆

## 实践探究案例

【案例员】 已知 枣曾 是定义在[−1,1]上的奇函数,且 枣(1)=1,若 皂,灶∈[−1,1],皂+灶≠0 时 $\frac{枣(皂)+枣(灶)}{皂+灶}>0$援

(1) 用定义证明 枣曾 在[−1,1]上是增函数;

(2) 解不等式 枣$\left(曾+\frac{1}{2}\right)$<枣$\left(\frac{1}{曾-1}\right)$;

(3) 若 枣曾 ≤贼−2葬贼+1 对所有 曾∈[−1,1],葬∈[−1,1] 恒成立,求实数 贼 的取值范围援

◆探究提示◆ 证明单调性时可利用 皂=曾,灶=−曾,用(1)解(2)时要注意 曾∈[−1,1],解答(3)时要灵活的将函数看成 葬 的函数援

◆答案◆ 解:(1)证明:任取 曾<曾,且 曾,曾∈[−1,1],

则 枣(曾)−枣(曾)=枣(曾)+枣(−曾)=$\frac{枣(曾)+枣(-曾)}{曾-曾}$·(曾−曾)

∵ −1≤曾<曾≤1,

∴ 曾+(−曾)≠0,由已知 $\frac{枣(曾)+枣(-曾)}{曾-曾}>0$,又 曾−曾<0,

∴ 枣(曾)−枣(曾)<0,即 枣曾 在[−1,1]上为增函数援

(2)解:∵ 枣曾 在[−1,1]上为增函数,

∴ $\begin{cases}-1\leqslant 曾+\frac{1}{2}\leqslant 1\\ -1\leqslant\frac{1}{曾-1}\leqslant 1\\ 曾+\frac{1}{2}<\frac{1}{曾-1}\end{cases}$ 解得:$\left\{曾\middle|-\frac{3}{2}\leqslant 曾<-1,曾\in 砸\right\}$

(3)解:由(1)可知 枣曾 在[−1,1]上为增函数,且 枣(1)=1,

故对 曾∈[−1,1],恒有 枣曾 ≤1,

所以要 枣曾 ≤贼−2葬贼+1 对所有 曾∈[−1,1],葬∈[−1,1]恒成立,

即要 贼−2葬贼+1≥1 成立,故 贼−2葬贼≥0,

记 早(葬)=贼−2葬贼 对 葬∈[−1,1],早(葬)≥0,

只需 早(葬)在[−1,1]上的最小值大于等于 0,

早(−1)≥0,早(1)≥0,解得,贼≤−2 或 贼=0 或 贼≥2援

∴ 贼 的取值范围是:{贼|贼≤−2 或 贼=0 或 贼≥2}援

## 【考点二 指数不等式与对数不等式】

【范例源】 解关于 曾 的不等式 2³曾−2曾<皂(2曾−2−曾)

◆答案◆ 解答 原不等式可化为 2⁴曾−(1+皂)·2²曾+皂<0,即(2²曾−1)(2²曾−皂)<0

当 皂>1 时,1<2²曾<皂 ∴ $0<曾<\frac{1}{2}$遭皂

当 皂=1 时,(2²曾−1)²<0 ∴ 曾∈∅

当 0<皂<1 时,皂<2²曾<1 ∴ $\frac{1}{2}$遭皂<曾<0

当 皂≤0 时,曾<0

---

类题缘 $\left(\frac{1}{2}\right)^{遭曾}<4$ 的解集是________援

【范例缘】 解不等式 曾遭葬曾>$\frac{曾\sqrt{曾}}{葬}$援

思维方式 当指数是对数时,我们的方法是取对数解决问题援本题将要分 葬>1 与 0<葬<1 两种情况求解援

◆答案◆ 解答 葬>1,曾>0 时,两边取以 葬 为底的对数,不等号保持原向,故原不等式可变形为

遛犯$_{葬}$曾$^{遛犯_{葬}曾}$ > 遛犯$_{葬}$$\frac{曾\sqrt{曾}}{葬}$ ⇔ (遛犯$_{葬}$曾)$^2$ $-\frac{9}{2}$遛犯$_{葬}$曾 $+2>0$

⇔2 (遛犯$_{葬}$曾)$^2$ $-9$遛犯$_{葬}$曾$+4>0$

∴　遛犯$_{葬}$曾$>4$ 或 遛犯$_{葬}$曾$<\frac{1}{2}$

解集为 {曾|0 <曾<$\sqrt{葬}$或 曾>葬$^4$} 援

当 $0<$葬$<1$ 时,原不等式可变形为　(遛犯$_{葬}$曾)$^2$ $-\frac{9}{2}$遛犯$_{葬}$曾$+2<0$

$\frac{1}{2}<$遛犯$_{葬}$曾$<4$

∴　解集为 {曾|葬$^4$ <曾<$\sqrt{葬}$} 援

综上所述,原不等式的解集为 :葬>1 时,{曾|0 <曾<$\sqrt{葬}$或 曾>葬$^4$};当 0 <葬<1 时,{曾|葬$^4$ <曾<$\sqrt{葬}$} 援

【范例 迹】　解不等式 遛犯$_5$(1 +$\sqrt{曾}$) >遛犯$_{16}$ 曾援

思维方式　主要矛盾是两个对数的底数不相同,并且 5 与 16 之间也很难化为同底援因此,我们不改变底数,而对整个对数换元,使得不剩下一个对数式援

◆答案◆　解答　设 赠=遛犯$_{16}$ 曾则 曾=16$^{赠}$,代入原式得

遛犯$_5$(1 +4$^{赠}$) >赠

得　1 +4$^{赠}$>5$^{赠}$,

即$\left(\frac{1}{5}\right)^{赠}+\left(\frac{4}{5}\right)^{赠}>1$,

亦即　$\left(\frac{1}{5}\right)^{赠}+\left(\frac{4}{5}\right)^{赠}>\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$,

注意到　枣(赠) $=\left(\frac{1}{5}\right)^{赠}+\left(\frac{4}{5}\right)^{赠}$为减函数,且又知

枣(赠) >枣(1),

∴　赠<1,

由此可得　遛犯$_{16}$ 曾<1,

∴　0 <曾<16,∴　原不等式的解集为 {曾|0 <曾<16} 援

## 实践探究案例

【案例】　已知 灶为正整数,实数 葬>1,解关于 曾的不等式

遛犯$_{葬}$曾-4遛犯$_{(葬^2)}$ 曾+12遛犯$_{(葬^3)}$ 曾-… +灶(-2)$^{灶-1}$ 遛犯$_{(葬^灶)}$ 曾>$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}$· 遛犯$_{葬}$(曾-葬) 援

◆探究提示◆　首先的想法是应将左边的和式化简,注意到 灶遛犯$_{(葬^灶)}$ 曾= 遛犯$_{葬}$曾,从而左边的化简就轻而易举了,然后要注意$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}$的正负是不确定的援故而要加以讨论援

◆答案◆　解答　利用对数换底公式,原不等式左端化为

遛犯$_{葬}$曾-$\frac{4}{2}$遛犯$_{葬}$曾+$\frac{12}{3}$遛犯$_{葬}$曾-… +$\frac{灶(-2)^{灶-1}}{灶}$遛犯$_{葬}$曾

= [1 -2 +4 +… + (-2)$^{灶-1}$] 遛犯$_{葬}$曾

$=\frac{1-(-2)^{灶}}{3}$遛犯$_{葬}$曾

于是原不等式可化为

$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}$遛犯$_{葬}$曾>$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}$遛犯$_{葬}$(曾-葬) 援　(*)

①当 灶为正奇数时,$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}>0$

故 (*) 等价于 遛犯$_{葬}$曾> 遛犯$_{葬}$(曾-葬)

因为 葬>1,故上述不等式等价于

$\begin{cases}曾>0\\曾-葬>0\\曾>曾-葬\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}曾>0\\|曾|>\sqrt{葬}\\曾-曾-葬<0\end{cases}$

⇔$\begin{cases}曾>\sqrt{葬}\\\frac{1-\sqrt{1+4葬}}{2}<曾<\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\end{cases}$

因为 $\frac{1-\sqrt{1+4葬}}{2}<0$,$\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}>\frac{\sqrt{4葬}}{2}=\sqrt{葬}$,

∴　此时不等式的解集为$\left\{曾\middle|\sqrt{葬}<曾<\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\right\}$援

②当 灶为正偶数时,$\frac{1-(-2)^{灶}}{3}<0$,故而 (*) 等价于 遛犯$_{葬}$曾<遛犯$_{葬}$(曾-葬)援

∵　葬>1,故上式又等价于

$\begin{cases}曾>0\\曾-葬>0\\曾<曾-葬\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}曾>0\\|曾|>\sqrt{葬}\\曾-曾-葬>0\end{cases}$

⇔$\begin{cases}曾>\sqrt{葬}\\曾<\frac{1-\sqrt{1+4葬}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}曾>\sqrt{葬}\\曾>\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\end{cases}$

因为$\frac{1-\sqrt{1+4葬}}{2}<0$,$\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}>\sqrt{葬}$,

所以不等式的解集为$\left\{曾\middle|曾>\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\right\}$援

综合得:当 灶为正奇数时,原不等式的解集是$\left\{曾\middle|\sqrt{葬}<曾<\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\right\}$;当 灶为正偶数时,原不等式的解集为$\left\{曾\middle|曾>\frac{1+\sqrt{1+4葬}}{2}\right\}$援

## 知识过关检测

一、选择题

1援不等式 (曾$^2$-2曾-3) (曾$^2$-4曾+4) <0 的解集是　(　　)

(粤) {曾|曾< -1 或 曾>3}

(月) {曾|-1 <曾<3}

(悦) {曾|-1 <曾<2 或 2 <曾<3}

(阅) {曾|-1 <曾<3 或 曾= -2}

2援已知不等式 曾$^2$-2曾+ 葬>0 对任意实数 曾恒成立,则不等式 葬$^{2曾+1}$ <葬$^{曾^2+2曾-3}$ <1 的解集是　(　　)

(粤) (1,2)　(月) $\left(-\frac{1}{2},2\right)$

(悦) (-2,2)　(阅) (-3, -2)

3援若不等式 曾$^2$-遛犯$_{皂}$曾<0 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$范围内恒成立,则实数 皂的取值是　(　　)

(粤) $\frac{1}{16}\leqslant$皂$<1$　　　(月) $0<$皂$\leqslant\frac{1}{16}$

(悦) $0<$皂$<\frac{1}{4}$　　　(阅) 皂$\geqslant\frac{1}{16}$

4援设 枣曾 $>0$,早(曾 $>0$,不等式 枣曾 $>$早(曾的解集为 孕,不等式 $2^{\text{枣曾}}>2^{\text{早(曾}}$的解集为 酝,不等式 遭藻早$_2\frac{1}{\text{枣曾}}>$遭藻早$_2\frac{1}{\text{早(曾}}$的解集为 晕,则有　　(　　)

(粤) 孕=酝=晕　　　(月) 孕=酝$\subseteq$晕

(悦) 晕$\subseteq$孕=酝　　　(阅) 酝$\cap$孕$=\varnothing$,晕$\cap$酝$=\varnothing$

二、填空题

5援函数 赠=遭藻早[遭藻早$_2$($\sqrt{\text{曾}-3}-2$)]的定义域是________援

6援不等式 曾$^{\text{遭藻早曾-1}}>\frac{16}{\text{曾}}$的解集为________援

7援不等式 遭藻早$_5(3^{-\text{曾}}-1)$ · 遭藻早$_5\left(3^{-\text{曾}-1}-\frac{1}{3}\right)\leqslant2$ 的解集为________援

三、解答题

8援设不等式$\frac{\text{曾-葬}}{\text{曾+曾+1}}<\frac{\text{曾-遭}}{\text{曾-曾+1}}$的解为 曾$\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$,求 葬遭的值援

9援解不等式：

(1) 曾$-4$曾$+$曾$+6$曾$<0$；

(2) $\frac{(\text{曾}-4)(\text{曾-2})(\text{曾-3})^5}{(\text{曾-1})^3(\text{曾}-\text{曾+1})}\geqslant0$援

10援已知函数 赠=$\frac{\text{皂曾}+4\sqrt{3}\text{曾+灶}}{\text{曾}+1}$的最大值为 7,最小值为 $-1$,求 皂,灶的值援

## 本讲答案

类题 1 答案　分析 首先转化成右端为 0 的分式不等式,然后再等价变形为整式不等式求解援

解 原不等式等价变形为：$\frac{2\text{曾}-5\text{曾-1}}{\text{曾}-3\text{曾+2}}-1>0$

通分整理得：$\frac{\text{曾}-2\text{曾-3}}{\text{曾}-3\text{曾+2}}>0$

等价变形为：

(曾$-2$曾$-3$)(曾$-3$曾$+2$)$>0$

即 (曾+1)(曾-1)(曾-2)(曾-3)$>0$

由数轴标根法可得所求不等式解集为：

{曾|曾$<-1$ 或 $1<$曾$<2$ 或 曾$>3$}

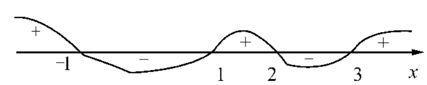


图 6鄄

类题 2 答案　$1\leqslant$葬$\leqslant3$ 或 葬$=-1$

解答　由前式得

$-\frac{(\text{葬-1})^2}{2}\leqslant$曾$-\frac{(\text{葬+1})^2}{2}\leqslant\frac{(\text{葬-1})^2}{2}$

解出　2葬$\leqslant$曾$\leqslant$葬$+1$援故 粤={曾|2葬$\leqslant$曾$\leqslant$葬$+1$}

对于后式可得

(曾-2)(曾-3葬-1)$\leqslant0$援

① 葬$\geqslant\frac{1}{3}$时　月={曾|2$\leqslant$曾$\leqslant$3葬+1}

要求 2葬$\geqslant2$ 且 葬$+1\leqslant$3葬+1援解之得 $1\leqslant$葬$\leqslant3$援

② 葬$<\frac{1}{3}$时,月={曾|3葬+1$\leqslant$曾$\leqslant2$}

要求 3葬+1$\leqslant$2葬且 葬$+1\leqslant2$援解之得 葬$=-1$

综合以上讨论,得　$1\leqslant$葬$\leqslant3$ 或 葬$=-1$援

类题 3 答案　葬$=\frac{1}{2}$

提示　将不等式化为整式不等式后,再利用范例 3 的方法求解援

类题 4 解 原不等式可化为：$\frac{2\text{曾}+(6-2\text{噪})\text{曾}+(3-\text{噪})}{4\text{曾}+6\text{曾}+3}>0$

而 4曾$+6$曾$+3>0$援

∴　原不等式等价于 2曾$+(6-2$噪)曾$+(3-$噪)$>0$

则 $\Delta=(6-2\text{噪})^2-4\times2\times(3-\text{噪})<0$ 得 $1<$噪$<3$援

类题 5 答案　$\left\{\text{曾}\middle|\text{曾}>\frac{1}{9}\right\}$

解答　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{遭藻早}_3\text{曾}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

∴　遭藻早$_3$曾$>-2\Rightarrow$曾$>\frac{1}{9}$援