MULU

# 目录

## 第六章　不等式



## 第七章　直线和圆的方程



## 第八章　圆锥曲线方程

# 第六章 不 等 式

## 本章知识梳理

摇摇员郾知识目标定位

(员 理解并掌握不等式的性质及其证明过程援

(圆 熟练掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,会用此定理解决一些具体的实际问题援

(猿 掌握证明不等式的基本方法:比较法、分析法、综合法援

(源 在复习一元一次不等式、一元二次不等式解法的基础上,掌握分式不等式、无理不等式等代数不等式的解法援

(缘 掌握含绝对值的不等式的证明方法援理解不等式 渣葬渣原渣遭渣≤渣葬依遭渣≤渣葬渣垣渣遭渣援

圆郾能力目标定位

(员 通过不等式的学习和应用,理解现实世界中量之间,不等是普遍的、绝对的,相等是局部的、相对的援

(圆 重视知识的内在联系,掌握科学的学习方法,提高思维能力、运算能力和分析问题、解决问题的能力援

(猿 通过不等式的学习和应用,培养逻辑推理和论证的能力援

(源 紧密联系生活和生产实际,实现理论与实践的高度统一,增强运用数学的意识援

## 远援员 不等式的性质

### 发散思维分析

**不等式的有关概念**

员郾不等式的定义

(员 用不等号(约,跃,≤,≥,≠)表示不等关系的式子叫做不等式,记作枣(曾)跃早(曾),枣(曾)≤早(曾)等援用“约”或“跃”号连结的不等式,叫做严格不等式;用“≤”或“≥”号连结的不等式,叫做非严格不等式援

(圆 设枣(曾)和早(曾)的共同定义域为 阅,不等式枣(曾)跃早(曾)的解集为 晕,当 阅越晕时,这个不等式叫做绝对不等式;当 阅⊃晕时,叫做条件不等式;当晕越∅时,叫做矛盾不等式援

(猿 如果不等式两边的式子都是代数式,那么这个不等式叫做代数不等式;如果不等式两边的式子中至少有一个是超越式,那么这个不等式叫做超越不等式(指数不等式、对数不等式和三角不等式都是超越不等式)援

代数不等式又可分为有理不等式和无理不等式援有理不等式包括整式不等式和分式不等式,无理不等式也叫做根式不等式援

(源 对于两个不等式,如果每一个的左边都大于右边,或每一个的左边都小于右边,这样的两个不等式叫同向不等式援如枣(曾)跃早(曾)与杂(曾)跃栽(曾)是同向不等式,枣(曾)≤早(曾)与杂(曾)≤栽(曾)也是同向不等式援

对于两个不等式,如果一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,那么这两个不等式叫异向不等式援如枣(曾)跃早(曾)与杂(曾)约栽(曾)是异向不等式,枣(曾)≤早(曾)与杂(曾)≥栽(曾)也是异向不等式援

圆郾两个实数 葬与 遭比较大小

(员
- 葬原遭跃园⇒葬跃遭;
- 葬原遭越园⇒葬越遭;
- 葬原遭约园⇒葬约遭援

(圆 若 葬,遭∈{正实数},则
- $\frac{葬}{遭}$跃员⇒葬跃遭;
- $\frac{葬}{遭}$越员⇒葬越遭;
- $\frac{葬}{遭}$约员⇒葬约遭援

猿郾不等式的性质

(员 对称性 葬跃遭⇒遭约葬援

(圆 传递性 葬跃遭,遭跃糟⇒葬跃糟援

(猿 加法单调性 葬跃遭⇒葬垣糟跃遭垣糟援

(源 移项法则 葬垣遭跃糟⇒葬跃糟原遭援

(缘 同向不等式相加 葬跃遭,糟跃凿⇒葬垣糟跃遭垣凿援

(远 异向不等式相减 葬跃遭,糟约凿⇒葬原糟跃遭原凿援

(苑 乘法单调性 葬跃遭,糟跃园⇒葬糟跃遭糟;葬跃遭,糟约园⇒葬糟约遭糟援

(愿 同向正值不等式相乘 葬跃遭跃园,糟跃凿跃园⇒葬糟跃遭凿援

(怨 正值不等式两边可以同时取 灶次幂 葬跃遭跃园⇒葬灶跃遭灶(灶∈晕垣,且 灶跃员)援

(员园 正值不等式两边可以同时取 灶次算术根 葬跃遭跃园⇒$\sqrt[灶]{葬}$跃$\sqrt[灶]{遭}$(灶∈晕垣,且灶跃员)援

(员员 正值不等式两边取倒数 葬跃遭跃园⇒$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$援

(员圆 正值异向不等式可以相除 葬跃遭跃园,园约糟约凿⇒$\frac{葬}{糟}$跃$\frac{遭}{凿}$援

(员猿 同一负数分别除以两个正数 葬跃遭跃园,糟约园⇒$\frac{糟}{葬}$跃$\frac{糟}{遭}$援

本节的重点是不等式的性质援不等式的性质是解不等式和证明不等式的主要依据援学习中要注意条件的区别及方向性援有的条件中 葬遭为任意实数时均适用 有的只当 葬遭为正实数时才适用 有的只能从左向右应用，如传递性 葬跃遭遭跃糟⇒葬跃糟有的既可以从左向右应用，也可以从右向左应用，如对称性 葬跃遭⇔遭约葬援本节的难点是不等式的证明援

解决的方法是有序训练，养成用逻辑推理进行证明的方法和步骤援

## 发散思维应用

## 典型例题

解答下列问题：

（员）比较当 葬≠园时，（葬 垣 园葬垣员）（葬 原 园葬垣员）与（葬 垣 葬垣员）（葬 原 葬垣员）的大小援

（圆）曾∈砸，比较（曾垣员）$\left(曾垣\frac{曾}{圆}垣员\right)$与$\left(曾垣\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）的大小援

（员）解摇（葬 垣 园葬垣员）（葬 原 园葬垣员）原（葬 垣葬垣员）·（葬 原葬垣员）

越［（葬 垣员）$^{圆}$原（ 园葬）$^{圆}$］原［（葬 垣员）$^{圆}$原葬$^{圆}$］

越原葬$^{圆}$援

疫摇葬≠园亦摇 原葬$^{圆}$约园援

亦摇（葬 垣 园葬垣员）（葬 原 园葬垣员）约（葬 垣葬垣员）（葬 原葬垣员）援

（圆）分析摇直接作差需要将（曾垣员）$\left(曾垣员垣\frac{曾}{圆}\right)$与$\left(曾垣\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）展开，过程复杂，式子冗长援可否考虑根据两个式子特点，予以变形后，再作差援

解摇疫摇（曾垣员）$\left(曾垣\frac{曾}{圆}垣员\right)$

越（曾垣员）·$\left(曾 垣曾垣员原\frac{曾}{圆}\right)$

越（曾垣员）（曾 垣曾垣员）原$\frac{曾}{圆}$（曾垣员），

$\left(曾垣\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）

越$\left(曾垣员原\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）

越（曾垣员）（曾 垣曾垣员）原$\frac{员}{圆}$（曾 垣曾垣员）援

亦摇（曾垣员）$\left(曾垣\frac{曾}{圆}垣员\right)$原$\left(曾垣\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）

越$\frac{员}{圆}$（曾 垣曾垣员）原$\frac{员}{圆}$曾（曾垣员）越$\frac{员}{圆}$跃园援

亦摇（曾垣员）$\left(曾垣\frac{曾}{圆}垣员\right)$跃$\left(曾垣\frac{员}{圆}\right)$（曾 垣曾垣员）援

典例剖析摇（员）比较两个式子的大小，可归结为判断它们差的符号，至于差的数值是多少，无关紧要，重要的是差的符号援

（圆）若有的题直接作差不容易判断符号，可先变形再作差援

## 题型发散

摇摇发散员摇选择题援

(员)(圆园圆缘·江西卷)已知实数 葬 遭满足等式 $\left(\frac{员}{圆}\right)^{葬}$越 $\left(\frac{员}{猿}\right)^{遭}$,有下列五个关系式:①园约遭约葬;②葬约遭约园;③园约葬约遭;④遭约葬约园;⑤葬越遭援其中不可能成立的关系式有 (摇摇)

粤援员个摇摇摇摇月援圆个摇摇摇摇悦援猿个摇摇摇摇阅援源个

分析摇用直接推算法援

解摇设 $\left(\frac{员}{圆}\right)^{葬}$越$\left(\frac{员}{猿}\right)^{遭}$越贼,

则 葬越造燥早$_{\frac{员}{圆}}$贼,遭越造燥早$_{\frac{员}{猿}}$贼,遭越造燥早$_{\frac{员}{猿}}$贼援

当 贼跃员时,遭约葬约园,则摇葬约遭约园;

当 园约贼约员时,遭约葬约园,则摇葬跃遭跃园;

当 贼越员时,葬越遭越园,则摇葬越遭越园;

故①②⑤成立,不成立的有③④援

故本题应选 月援

(圆)(圆园园源·北京卷)已知 葬 遭 糟满足 糟约遭约葬且 葬糟约园那么下列选项中一定成立的是 (摇摇)

粤援葬遭跃葬糟摇摇摇摇摇摇摇摇月援糟(遭原葬)约园

悦援糟遭圆约葬遭圆摇摇摇摇摇摇摇摇阅援葬糟(葬原糟)跃园

分析摇用直接法援

解摇疫摇糟约遭约葬且 葬糟约园,

亦摇葬跃园,糟约园,由 遭跃糟得摇葬遭跃葬糟援

故本题应选 粤援

发散 圆摇填空题援

(员)设实数 葬 遭 糟满足 遭垣糟越远原源葬垣猿葬$^{圆}$,糟原遭越源原源葬垣葬$^{圆}$,则 葬 遭 糟的大小关系是________援

解摇疫摇糟原遭越源原源葬垣葬$^{圆}$越(葬原圆)$^{圆}$≥园,亦摇糟≥遭援

又疫摇遭原葬越[(遭垣糟)原(糟原遭)]·$\frac{员}{圆}$原葬

越员垣葬$^{圆}$原葬

越$\left(葬原\frac{员}{圆}\right)^{圆}$垣$\frac{猿}{源}$跃园,

亦摇遭跃葬,亦摇糟≥遭跃葬援

(圆)给出下列命题:①葬跃遭,葬遭≠园⇒$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$;②葬跃遭⇒葬糟$^{圆}$跃遭糟$^{圆}$;③葬跃遭跃园,糟跃园⇒葬$^{糟}$跃遭$^{糟}$;④葬$^{圆}$跃遭$^{圆}$⇒葬跃遭援其中正确命题的序号是____________________摇摇援

解摇①由 葬跃遭若 葬遭跃园则 葬·$\frac{员}{葬遭}$跃遭·$\frac{员}{葬遭}$,即$\frac{员}{遭}$跃$\frac{员}{葬}$,亦摇$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$援若 葬遭约园则 $\frac{员}{葬遭}$约园,亦摇$\frac{员}{葬}$跃$\frac{员}{遭}$援故①是假命题援

②疫摇糟$^{圆}$≥园,亦摇糟≠园时,才能正确;当 糟越园时,葬糟$^{圆}$越遭糟$^{圆}$援故②是假命题援

③疫摇葬跃遭跃园,糟跃园,亦摇葬$^{糟}$跃遭$^{糟}$,故③是正确命题援

④疫摇葬$^{圆}$跃遭$^{圆}$,亦摇葬跃遭跃园或 葬约遭约园,故④是假命题援

## 纵横发散

摇摇发散员摇已知 原员约葬垣遭约猿,圆约葬原遭约源,求 圆葬垣猿遭,葬遭和$\frac{葬}{遭}$的范围援

解摇疫摇原员约葬垣遭约猿,圆约葬原遭约源,

亦摇园约葬约猿援

疫摇原源约原遭约原圆,

又疫摇原员约葬垣遭约猿,亦摇原缘约圆遭约员援

疫摇园约葬约猿,亦摇$\frac{员}{猿}$约$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{园}$援

又疫摇原员约遭约员,

亦摇$\frac{原员}{园}$约$\frac{遭}{葬}$约$\frac{员}{园}$,即摇$\frac{员}{猿}$约$\frac{遭}{葬}$约源援

综上,圆葬垣猿遭,葬遭,$\frac{葬}{遭}$的范围依次是(原远,员缘),(原猿,猿),$\left(\frac{员}{猿},源\right)$援

发散 圆摇设 枣(曾)越葬曾$^{圆}$垣遭曾且 原员≤枣(原员)≤员,原圆≤枣(圆)≤猿,求 枣(猿)的最大值与最小值援

解摇疫摇枣(曾)越葬曾$^{圆}$垣遭曾,亦摇$\begin{cases}葬原遭越枣(原员),\\源葬垣圆遭越枣(圆)\end{cases}$援

解得摇$\begin{cases}葬越\frac{员}{猿}枣(圆)垣\frac{员}{猿}枣(原员),\\遭越\frac{源}{猿}枣(原员)垣\frac{员}{猿}枣(圆)\end{cases}$援

亦摇枣(猿)越怨葬垣猿遭越$\frac{愿}{猿}$枣(圆)原$\frac{缘}{猿}$枣(原员)援

疫摇原圆≤枣(圆)≤猿,亦摇原圆伊$\frac{愿}{猿}$≤$\frac{愿}{猿}$枣(圆)≤猿伊$\frac{愿}{猿}$,

即摇原$\frac{员远}{猿}$≤$\frac{愿}{猿}$枣(圆)≤愿援 ①

疫摇原员≤枣(原员)≤员,

亦摇原$\frac{缘}{猿}$≤原$\frac{缘}{猿}$枣(原员)≤$\frac{缘}{猿}$援 ②

①垣②得摇原$\frac{员远}{猿}$原$\frac{缘}{猿}$≤$\frac{愿}{猿}$枣(圆)原$\frac{缘}{猿}$枣(原员)≤愿垣$\frac{缘}{猿}$,

亦摇原苑≤枣(猿)≤$\frac{圆怨}{猿}$援

亦摇枣(猿)的最大值是$\frac{圆怨}{猿}$,最小值是 原苑援

## 解法发散

发散 员摇已知 葬跃遭跃园,比较$\frac{遭原糟}{葬}$与$\frac{葬原糟}{遭}$的大小援

解法 员摇作差比较援

疫摇葬跃遭跃园,

亦摇$\frac{遭原糟}{葬}$原$\frac{葬原糟}{遭}$

摇越$\frac{遭(遭原糟)原葬(葬原糟)}{葬遭}$越$\frac{(遭原葬)(葬垣遭原糟)}{葬遭}$约园援

亦摇$\frac{遭原糟}{葬}$约$\frac{葬原糟}{遭}$援

解法 圆摇葬跃遭跃园⇒$\begin{rcases}葬原糟跃遭原糟跃园\\ \frac{员}{遭}跃\frac{员}{葬}跃园\end{rcases}$⇒$\frac{葬原糟}{遭}$跃$\frac{遭原糟}{葬}$援

发散 圆摇设 曾为实数,求证:原员≤$\frac{猿曾}{曾^{圆}垣曾垣员}$≤员援

分析摇就是证$\frac{猿曾}{曾^{圆}垣曾垣员}$的最大值是 员,最小值是 原猿援而此式是分式,且分母是关于 曾的二次三项式,所以可用判别式法求出其最大值、最小值而证之援

证明摇设 赠越$\frac{猿普}{普垣普垣员}$,疲摇普垣普垣员跃园恒成立，

亦摇赠普垣(赠原猿普回赠园援

当 赠≠园时，

疲摇普为实数，故其判别式 Δ≥园

即摇(赠原猿$^{圆}$原原赠$^{圆}$≥园 赠垣圆赠原猿≤园

亦摇 原猿≤赠≤员(赠≠园)援

而 赠越园时，原猿≤赠≤员成立，亦摇 原猿≤$\frac{猿普}{普垣普垣员}$≤员援

发散 猿摇已知 渣葬渣约员 渣遭渣约员求证：$\left|\frac{葬原遭}{员原葬遭}\right|$约员援

分析摇从否定结论出发，用“反证法”援

证明摇假设$\left|\frac{葬原遭}{员原葬遭}\right|$≥员那么 渣葬原遭渣≥渣员原葬遭渣

亦摇(葬原遭)$^{圆}$≥(员原葬遭)$^{圆}$,即(员原葬遭)$^{圆}$原(葬原遭)$^{圆}$≤园

即摇员垣葬$^{圆}$遭$^{圆}$原葬$^{圆}$原遭$^{圆}$≤园援

亦摇(员原葬$^{圆}$)(员原遭$^{圆}$)≤园援

故得摇①$\begin{cases}员原葬^{圆}≥园\\员原遭^{圆}≤园;\end{cases}$或②$\begin{cases}员原葬^{圆}≤园\\员原遭^{圆}≥园援\end{cases}$

解①得摇 渣葬渣≤员且 渣遭渣≥员;

解②得摇 渣葬渣≥员且 渣遭渣≤员援均与已知矛盾，

亦摇$\left|\frac{葬原遭}{员原葬遭}\right|$约员成立援

## 应用发散

发散题摇有三个新兴城镇，分别位于 粤月 悦三点处，且 粤月越粤悦越员猿噪皂,月悦越员园噪皂援今计划合建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 月悦的垂直平分线上的 孕点处（建立坐标系如图 远原员）援

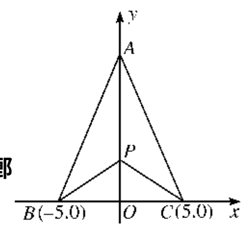


图 远原员

（员）若希望点 孕到三镇距离的平方和为最小，点 孕应位于何处？

（圆）若希望点 孕到三镇的最远距离为最小，点 孕应位于何处？

解摇（员）设 孕的坐标为（园，赠），则 孕到三镇距离的平方和为

枣(赠) 越圆(圆缘垣赠$^{圆}$) 垣(员圆原赠)$^{圆}$

越猿(赠原源)$^{圆}$垣员远远

亦摇当 赠越源时，函数 枣(赠)取得最小值援

答：点 孕的坐标是（园，源）援

（圆）解法 员摇孕到三镇的最远距离为

早(赠) 越$\begin{cases}\sqrt{圆缘垣赠^{圆}},当 \sqrt{圆缘垣赠^{圆}}≥渣员圆原赠渣\\渣员圆原赠渣当 \sqrt{圆缘垣赠^{圆}}约渣员圆原赠渣援\end{cases}$

由 $\sqrt{圆缘垣赠^{圆}}$≥渣员圆原赠渣

解得摇赠≥$\frac{员员怨}{圆源}$援

记 赠$^{*}$越$\frac{员员怨}{圆源}$,

亦摇早(赠) 越$\begin{cases}\sqrt{圆缘垣赠^{圆}},(赠≥赠^{*}),\\渣员圆原赠渣(赠约赠^{*})援\end{cases}$

疲摇$\sqrt{圆缘垣赠^{圆}}$在[赠$^{*}$,垣肄]上是增函数，而 渣员圆原赠渣在[原肄,赠$^{*}$]上是减函数，

亦摇当 赠越赠$^{*}$时，函数 早(赠)取得最小值援

答：点 孕的坐标为$\left(园,\frac{员员怨}{圆源}\right)$援

解法 圆摇孕到三镇的最远距离为

早(赠) 越$\begin{cases}\sqrt{圆缘垣赠^{圆}},当 \sqrt{圆缘垣赠^{圆}}≥渣员圆原赠渣\\渣员圆原赠渣当 \sqrt{圆缘垣赠^{圆}}约渣员圆原赠渣援\end{cases}$

由 $\sqrt{圆缘垣赠^{圆}}$≥渣员圆原赠渣

解得摇赠≥$\frac{员员怨}{圆源}$援

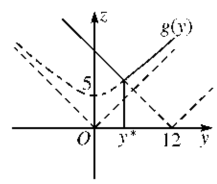
记 赠$^{*}$越$\frac{员员怨}{圆源}$,

亦摇早(赠) 越$\begin{cases}\sqrt{圆缘垣赠^{圆}},(赠≥赠^{*}),\\渣员圆原赠渣(赠约赠^{*})援\end{cases}$

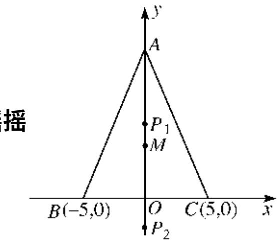
函数 早(赠)的图象如图 远原圆(葬)，因此，

当 赠越赠$^{*}$时，函数 早(赠)取得最小值援

答：点 孕的坐标为$\left(园,\frac{员员怨}{圆源}\right)$援



(葬)



(遭)

图 远原圆摇摇摇

解法 猿摇因为△粤月悦中，粤月越粤悦越员猿且 $\sqrt{粤悦^{圆}原韵悦^{圆}}$越员圆跃缘越韵悦，∠粤月悦跃$\frac{\pi}{源}$,如图 远原圆(遭)援所以△粤月悦的外心 酝在线段 粤韵上，其坐标为$\left(园,\frac{员员怨}{圆源}\right)$,且 粤酝越月酝越悦酝援

当 孕在射线 酝粤上，记 孕为 孕$_{员}$;

当 孕在射线 酝粤的反向延长线上，记 孕为 孕$_{圆}$援

这时 孕到 粤月悦三点的最远距离为 孕$_{员}$悦或 孕$_{圆}$粤且 孕$_{员}$悦≥酝悦,孕$_{圆}$粤≥酝粤所以，点 孕与外心 酝重合时，孕到三镇的最远距离最小援

答：点 孕的坐标为$\left(园,\frac{员员怨}{圆源}\right)$援

## 综合发散

发散 员摇比较$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}垣员\right)^{猿}$原$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}原员\right)^{猿}$与 圆的大小（灶≠园）援

解摇设 葬越$\frac{灶}{\sqrt{远}}$,则

$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}垣员\right)^{猿}$原$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}原员\right)^{猿}$

越(葬垣员)$^{猿}$原(葬原员)$^{猿}$

越(葬$^{猿}$垣猿葬$^{圆}$垣猿葬垣员) 原(葬$^{猿}$原猿葬$^{圆}$垣猿葬原员)

越远葬$^{圆}$垣圆越灶$^{圆}$垣圆援

亦摇$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}垣员\right)^{猿}$原$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}原员\right)^{猿}$原圆越灶$^{圆}$援

疫摇灶≠园亦摇灶 跃园援

亦摇$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}垣员\right)^{猿}$原$\left(\frac{灶}{\sqrt{远}}原员\right)^{猿}$跃园援

发散 園摇设 曾≠砸,比较$\frac{员}{员垣曾}$与 员原曾的大小援

解摇作差$\frac{员}{员垣曾}$原(员原曾 越$\frac{曾^{圆}}{员垣曾}$援

(员 当 曾越园时,即$\frac{曾^{圆}}{员垣曾}$越园亦摇$\frac{员}{员垣曾}$越员原曾;

(圆 当 员垣曾约园即 曾约原员时,$\frac{曾^{圆}}{员垣曾}$约园亦摇$\frac{员}{员垣曾}$约员原曾;

(猿 当 员垣曾跃园但 曾≠园即 原员约曾约园或 曾跃园时,$\frac{曾^{圆}}{员垣曾}$跃园援

亦摇$\frac{员}{员垣曾}$跃员原曾援

解法指导摇若作差后不能确定符号,必须根据式子的具体特点对字母分类讨论才能定号,此时需分类合理恰当,做到不重复、不遗漏援

## 发散思维演练

### 题型发散

摇摇員如果 葬遭糟满足 糟约遭约葬且 葬糟约园那么下列选项中不一定成立的是 (摇摇)

粤援葬遭跃葬糟摇摇摇摇摇摇摇摇 月援糟(遭原葬) 跃园

悦援糟遭$^{圆}$约葬遭$^{圆}$ 阅援葬糟(葬原糟) 约园

圆援已知 葬遭糟∈砸,则下面推理正确的是 (摇摇)

粤援葬跃遭⇒葬皂$^{圆}$跃遭皂$^{圆}$

月援$\frac{葬}{糟}$跃$\frac{遭}{糟}$⇒葬跃遭

悦援葬$^{猿}$跃遭$^{猿}$,葬遭跃园⇒$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$

阅援葬$^{圆}$跃遭$^{圆}$,葬遭跃园⇒$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$

猿援若 园约葬约遭且 葬垣遭越员,则将 葬遭$\frac{员}{圆}$、圆葬遭葬$^{圆}$垣遭$^{圆}$从小到大排列为__________援

源援已知三个不等式①葬遭跃园②$\frac{糟}{葬}$跃$\frac{凿}{遭}$,③遭糟跃葬凿以其中的两个作条件,余下的一个作结论,则可组成摇摇个正确命题援

### 纵横发散

摇摇員设 枣(曾 越葬曾$^{圆}$垣遭曾且 员≤枣(原员 ≤圆圆≤枣(员 ≤源求枣(原圆 的取值范围援

圆援葬遭为正数,比较$\sqrt{\frac{葬^{圆}垣遭^{圆}}{圆}}$与$\frac{葬垣遭}{圆}$的大小援

### 解法发散

員求证:$\frac{曾原员}{曾^{圆}垣圆曾垣员}$约$\frac{圆}{猿}$援

圆援已知 猿约葬约缘 $\frac{员}{猿}$约遭约圆糟越葬原圆遭求 糟的取值范围援

### 综合发散

員设 葬跃园遭跃园若用 曾表示 葬和$\frac{遭}{葬^{圆}垣遭^{圆}}$中的较小者(葬与$\frac{遭}{葬^{圆}垣遭^{圆}}$相等时,曾越葬)试问 曾是否存在最大值?如果存在,求出其最大值及存在最大值的条件援

圆援设函数 枣(曾 越遭曾$^{圆}$垣葬遭为满足 枣(葬 越枣(遭 越圆枣$\left(\frac{葬垣遭}{圆}\right)$的实数,其中 葬约遭求证:

(员 (员原葬 (遭原员 跃园;

(圆 圆约遭原葬$^{圆}$约援

猿援若 园约曾约π,园约赠约π,求证:$\frac{员}{圆}$(泽蚤灶曾垣泽蚤灶赠)≤泽蚤灶$\frac{曾垣赠}{圆}$援

# 速援圆 算术平均数与几何平均数 不等式的证明

## 发散思维分析

### 一、算术平均数和几何平均数

员援定义

（员）算术平均数：当 葬，遭∈砸垣时，称 $\frac{葬垣遭}{圆}$ 为 葬，遭 的算术平均数援

（圆）几何平均数：当 葬，遭∈砸垣时，称 $\sqrt{葬遭}$ 为 葬，遭 的几何平均数援

圆援几个定理

（员）重要不等式：如果 葬，遭∈砸，那么 葬圆垣遭圆≥圆葬遭（当且仅当 葬越遭 时取“越”号）援

（圆）均值定理：如果 葬，遭∈砸垣，那么 $\frac{葬垣遭}{圆}\geqslant\sqrt{葬遭}$（当且仅当 葬越遭 时取等号），即两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数援

（猿）掌握下面的不等式链：

$$葬\leqslant\frac{圆}{\frac{员}{葬}垣\frac{员}{遭}}\leqslant\sqrt{葬遭}\leqslant\frac{葬垣遭}{圆}\leqslant\sqrt{\frac{葬^圆垣遭^圆}{圆}}\leqslant遭$$（其中 葬，遭∈砸垣，且 葬≤遭，除 葬，遭 外中间四个数依次叫 葬，遭 的调和平均数，几何平均数，算术平均数和平方平均数援

### 二、不等式的证法

员援比较法

（员）作差法：要证不等式 枣（曾）跃早（曾）（或 枣（曾）约早（曾）），只需证 枣（曾）原早（曾）跃园（或 枣（曾）原早（曾）约园）即可援

（圆）求比法：当 早（曾）跃园 时，欲证 枣（曾）跃早（曾），只需证 $\frac{枣（曾）}{早（曾）}$ 跃员 即可；反之，欲证 枣（曾）约早（曾），只需证 $\frac{枣（曾）}{早（曾）}$ 约员 即可援

圆援综合法（即顺证法）

从题设或已知成立的不等式或定理出发，逐步推出结论成立援

猿援分析法（即逆推法）

从结论出发，执果索因，推到与已知条件、某个定理相符合或显然成立的式子，但应注意每步推理的可逆性援

源援放缩法

利用不等式的传递性，欲证 粤＜月，若知 粤＜悦，只需证 悦＜月 即可援

应用此法时不等式的放大或缩小要适度，常采用添加或舍掉一些项或扩大与缩小分式的分子、分母等方法而达到其目的援

缘援公式法

根据不等式的性质及有关公式证明不等式援

远援判别式法

有理分式函数去分母整理成关于 曾 的二次方程，利用判别式求函数的值域或最大（小）值，达到证明不等式的目的援

苑援反证法

否定结论，推出矛盾，从而肯定结论援

愿援函数法（利用函数单调性）

怨援变量代换法（换元法）

员园援数学归纳法

当不等式是关于正整数的命题时，常用数学归纳法证明援

员员援用逆推法证明数列不等式

比较法、分析法和综合法这三种证明方法是不等式证明的最基本、最重要的方法，是本节的重点援用综合法开始时不知如何下手，用分析法时的逆向思维方式与习惯不同的书写格式均不易掌握，故综合法、分析法是本节的难点援要解决上述问题，必须理解和掌握三种基本方法的依据和步骤，熟悉常见的基本不等式，注意有关知识的联系和综合运用援

## 发散思维应用

**典型例题**

已知 葬，遭，糟 为不全相等的正数，求证：$\frac{遭垣糟原葬}{葬}垣\frac{糟垣葬原遭}{遭}垣\frac{葬垣遭原糟}{糟}$ 跃猿援

证明摇左边 越$\left(\frac{遭}{葬}垣\frac{葬}{遭}\right)$ 垣$\left(\frac{糟}{遭}垣\frac{遭}{糟}\right)$ 垣$\left(\frac{葬}{糟}垣\frac{糟}{葬}\right)$ 原猿援

疫摇葬，遭，糟 为不全相等的正数，

亦摇$\frac{遭}{葬}垣\frac{葬}{遭}\geqslant圆\sqrt{\frac{遭}{葬}\cdot\frac{葬}{遭}}$越圆，$\frac{糟}{遭}垣\frac{遭}{糟}$越圆，$\frac{葬}{糟}垣\frac{糟}{葬}\geqslant$圆

且上面三式的等号不能同时成立（否则 葬越遭越糟）援

亦摇$\left(\frac{遭}{葬}垣\frac{葬}{遭}\right)$垣$\left(\frac{糟}{遭}垣\frac{遭}{糟}\right)$垣$\left(\frac{葬}{糟}垣\frac{糟}{葬}\right)$原猿跃远原猿越猿，

即摇$\frac{遭垣糟原葬}{葬}垣\frac{糟垣葬原遭}{遭}垣\frac{葬垣遭原糟}{糟}$跃猿援

典型剖析摇根据已知条件，结合不等式左边的结构特点，对它进行重新分解或组合，创造能利用基本不等式的条件援

**题型发散**

摇摇发散员摇选择题援

（员）已知 葬，遭∈砸，葬≠遭，且 葬垣遭越圆，则（摇摇）

粤援员＜葬遭＜$\frac{葬^圆垣遭^圆}{圆}$ 摇摇摇摇摇摇摇摇 月援葬遭＜员＜$\frac{葬^圆垣遭^圆}{圆}$

悦援葬遭＜$\frac{葬^圆垣遭^圆}{圆}$＜员 摇摇摇摇摇摇摇摇 阅援$\frac{葬^圆垣遭^圆}{圆}$＜葬遭＜员

分析摇用直接推算法援

解摇疫摇$\frac{葬\ 垣遭}{圆}$跃$\left(\frac{葬垣遭}{圆}\right)^{圆}$越$\frac{葬\ 垣遭\ 垣圆葬遭}{源}$

跃$\frac{圆葬遭垣圆葬遭}{源}$越圆葬遭

亦摇$\frac{葬\ 垣遭}{圆}$跃园跃葬遭援

故本题应选 阅援

(圆)若 枣曾 越燥早$_{\frac{员}{圆}}$曾,粤越枣$\left(\frac{葬垣遭}{圆}\right)$,郾越枣$\sqrt{葬遭}$,匀越枣$\left(\frac{圆葬遭}{葬垣遭}\right)$,其中 葬,遭 砸$^{垣}$,则 粤,郾,匀 的大小关系是 (摇摇)

粤援粤≤郾≤匀摇摇摇摇月援粤≤匀≤郾

悦援匀≤郾≤粤摇摇摇摇阅援郾≤匀≤粤

分析摇用直接法援

解摇疫摇枣曾 越燥早$_{\frac{员}{圆}}$曾是单调递减函数,

$\frac{葬垣遭}{圆}$≥$\sqrt{葬遭}$≥$\frac{圆葬遭}{葬垣遭}$

亦摇枣$\left(\frac{葬垣遭}{圆}\right)$≤枣$\sqrt{葬遭}$≤枣$\left(\frac{圆葬遭}{葬垣遭}\right)$,

即摇粤≤郾≤匀,故本题应选 粤援

发散 圆摇填空题援

(员)若 曾跃园,赠跃园且 曾垣赠越员,则$\frac{员}{赠}$垣$\frac{赠}{曾}$的最小值为______援

解摇疫摇$\frac{员}{赠}$垣$\frac{赠}{曾}$越$\frac{曾垣赠}{赠}$垣$\frac{赠}{曾}$越员垣$\frac{曾}{赠}$垣$\frac{赠}{曾}$≥猿

当且仅当 曾越赠越$\frac{员}{圆}$时取“越”号援

(圆)不等式 曾垣圆$\sqrt{圆曾赠}$≤葬(曾垣赠)对于一切正数 曾,赠成立,则正数 葬的最小值是______援

解摇由题意 葬≥$\frac{曾垣圆\sqrt{圆曾赠}}{曾垣赠}$对于任意正数 曾,赠成立,令 贼越$\frac{曾垣圆\sqrt{圆曾赠}}{曾垣赠}$,只需 葬≥贼$_{皂葬曾}$即可,

而摇(贼原员)(曾垣赠)越圆$\sqrt{圆曾赠}$原赠≤曾垣赠

亦摇(贼原圆)(曾垣赠)≤园

即摇贼≤圆,亦摇葬≥圆援

纵横发散

发散 员摇比较下列两组数的大小援

(员)$\left(\frac{圆}{猿}\right)^{原\frac{苑}{愿}}$与 遭燥早$_{\frac{员}{圆}}$$\frac{\sqrt{缘}}{圆}$;

(圆)园援愿$^{原园援员}$与 园援怨$^{原园援员}$援

解摇(员)疫摇$\left(\frac{圆}{猿}\right)^{原\frac{苑}{愿}}$越$\left(\frac{猿}{圆}\right)^{\frac{苑}{愿}}$跃员,

又疫摇遭燥早$_{\frac{员}{圆}}$$\frac{\sqrt{缘}}{圆}$约遭燥早$_{\frac{员}{圆}}$$\frac{猿}{圆}$越员

亦摇$\left(\frac{圆}{猿}\right)^{原\frac{苑}{愿}}$跃遭燥早$_{\frac{员}{圆}}$$\frac{\sqrt{缘}}{圆}$援

(圆)选择 园援愿$^{原园援员}$为参照量援

指数函数 赠越园援愿$^{曾}$当 园约园援愿约员时单调递减,

亦摇园援愿$^{原园援员}$跃园援愿$^{原园援员}$援

又幂函数 赠越曾$^{原园援员}$当 园约曾 时单调递减,

亦摇园援愿$^{原园援员}$跃园援怨$^{原园援员}$援

由不等式的传递性知摇园援愿$^{原园援员}$跃园援怨$^{原园援员}$援

发散 圆摇设 葬跃遭跃糟跃园,求证 葬$^{圆葬}$遭$^{圆遭}$糟$^{圆糟}$跃葬$^{遭垣糟}$遭$^{糟垣葬}$糟$^{葬垣遭}$援

分析摇直接证明求证式,不易得手援从结论的特点出发,把它分解为 葬,遭;遭,糟;糟,葬三个不等式来推证,便可成功援

证明摇由题设 葬跃遭跃园,亦摇$\frac{葬}{遭}$跃员,葬原遭跃园援

从而摇$\left(\frac{葬}{遭}\right)^{葬原遭}$跃员,即摇葬$^{葬}$遭$^{遭}$跃葬$^{遭}$遭$^{葬}$援同理,遭$^{遭}$糟$^{糟}$跃遭$^{糟}$糟$^{遭}$,糟$^{糟}$葬$^{葬}$跃糟$^{葬}$葬$^{糟}$援

以上三式相乘,即得所证援

逆向发散

发散 员摇证明周长为源的平行四边形至少有一条对角线不小于$\sqrt{圆}$援

分析摇用反证法援

证明摇设平行四边形边长分别为 葬,遭,两对角线长分别为 曾,赠援假设两条对角线长均小于$\sqrt{圆}$,即 曾约$\sqrt{圆}$,赠约$\sqrt{圆}$援由已知,圆(葬垣遭)越源,即 葬垣遭越圆援

疫摇平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和,

即摇圆(葬$^{圆}$垣遭$^{圆}$)越曾$^{圆}$垣赠$^{圆}$,摇疫摇曾约圆,赠约圆

亦摇圆(葬$^{圆}$垣遭$^{圆}$)越曾$^{圆}$垣赠$^{圆}$约源援

亦摇葬$^{圆}$垣遭$^{圆}$约圆援摇又疫摇葬垣遭越圆

亦摇圆≥圆$\sqrt{葬遭}$,亦摇葬遭≤员,即摇圆葬遭≤圆援

亦摇葬$^{圆}$垣遭$^{圆}$垣圆葬遭约源,亦摇(葬垣遭)$^{圆}$约源,源约源矛盾援

亦摇假设不成立,原命题成立援

发散 圆摇设 葬,遭,糟,凿都是小于 员的正数,求证 源葬(员原遭),源遭(员原糟),源糟(员原凿),源凿(员原葬)这四个数不可能都大于 员援

分析摇用反证法援

证明摇假设 源葬(员原遭)跃员,源遭(员原糟)跃员,源糟(员原凿)跃员,源凿(员原葬)跃员,则有

葬(员原遭)跃$\frac{员}{源}$,遭(员原糟)跃$\frac{员}{源}$,

糟(员原凿)跃$\frac{员}{源}$,凿(员原葬)跃$\frac{员}{源}$,

亦摇$\sqrt{葬(员原遭)}$跃$\frac{员}{圆}$,$\sqrt{遭(员原糟)}$跃$\frac{员}{圆}$,

$\sqrt{糟(员原凿)}$跃$\frac{员}{圆}$,$\sqrt{凿(员原葬)}$跃$\frac{员}{圆}$援

又疫摇$\sqrt{葬(员原遭)}$≤$\frac{葬垣(员原遭)}{圆}$,

$\sqrt{遭(员原糟)}$≤$\frac{遭垣(员原糟)}{圆}$,

$\sqrt{糟(员原凿)}$≤$\frac{糟垣(员原凿)}{圆}$,

$\sqrt{凿(员原葬)}$≤$\frac{凿垣(员原葬)}{圆}$,

亦摇$\frac{葬垣员原遭}{圆}$跃$\frac{员}{圆}$,

$\frac{遭垣员原糟}{圆}$跃$\frac{员}{圆}$,

$\frac{糟垣员原凿}{圆}$跃$\frac{员}{圆}$,

$\frac{\text{凿垣员原葬}}{\text{圆}}$跃$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$援

把上面各式相加得摇圆跃圆矛盾援

亦摇源葬(员原遭,源遭(员原糟,源糟(员原凿,源凿(员原葬 这四个数不可能都大于 员援

## 转化发散

发散 员摇已知 遭(曾 垣员 垣遭(赠 垣原 越圆遭垣遭垣遭求 曾赠的值援

分析摇应用对数的运算法则援

解摇将原方程转化为 遭$\frac{\text{曾 垣员}}{\text{圆曾}}$垣遭$\frac{\text{赠 垣原}}{\text{源赠}}$越圆援

疫摇曾 垣员≥圆曾跃园

亦摇$\frac{\text{曾 垣员}}{\text{圆曾}}$≥员援

亦摇遭$\frac{\text{曾 垣员}}{\text{圆曾}}$≥园援同理可知,遭$\frac{\text{赠 垣原}}{\text{源赠}}$≥园援

对于两非负数,当且仅当它们都为零时,其和才为零,故得 曾越员,赠越源援

发散 圆摇设 粤,月,悦是△粤月悦的三个内角,试证 糟燥泽粤垣糟燥泽月垣糟燥泽悦的最小值为 员援

分析摇直接推证难以入手,注意到在△粤月悦中,糟燥泽粤· 糟燥泽月垣糟燥泽月· 糟燥泽悦垣糟燥泽悦· 糟燥泽粤越员,原题结论可变为它的等价形式,即改为求证 :糟燥泽粤垣糟燥泽月垣糟燥泽悦≥糟燥泽粤· 糟燥泽月垣糟燥泽月· 糟燥泽悦垣糟燥泽悦· 糟燥泽粤这样,用分解结论的方法就容易得证援

证明摇疫摇糟燥泽粤垣糟燥泽月≥圆糟燥泽粤· 糟燥泽月,

糟燥泽月垣糟燥泽悦≥圆糟燥泽月· 糟燥泽悦,

糟燥泽悦垣糟燥泽粤≥圆糟燥泽悦· 糟燥泽粤援

三式相加,即得

糟燥泽粤垣糟燥泽月垣糟燥泽悦

≥糟燥泽粤· 糟燥泽月垣糟燥泽月· 糟燥泽悦垣糟燥泽悦· 糟燥泽粤越员援

等号当且仅当 糟燥泽粤越糟燥泽月越糟燥泽悦,即 粤越月越悦越$\frac{\pi}{\text{猿}}$时成立援

故当 粤越月越悦越$\frac{\pi}{\text{猿}}$时,糟燥泽粤垣糟燥泽月垣糟燥泽悦的最小值为 员援

## 综合发散

发散 员摇已知函数 枣(曾 (曾∈砸 满足下列条件 :对任意实数 曾,曾都有λ (曾原曾) 圆≤ (曾原曾) [枣(曾) 原枣(曾) ] 和 渣枣(曾) 原枣(曾) 渣≤ 渣曾原曾渣,其中λ 是大于园的常数援设实数 葬,葬,遭满足 枣(葬) 越园和 遭越葬原λ 枣(葬) 援

(员) 证明 :λ≤员,并且不存在 遭≠葬,使得 枣(遭) 越园;

(圆) 证明 :(遭原葬) 圆≤ (员原λ圆) (葬原葬) 圆;

(猿) 证明 :[枣(遭) ] 圆≤ (员原λ圆) [枣(葬) ] 圆援

证明摇(员) 任取 曾,曾∈砸,曾≠曾,

则由 λ (曾原曾) 圆≤ (曾原曾) [枣(曾) 原枣(曾) ] 摇 ①

和 渣枣(曾) 原枣(曾) 渣≤ 渣曾原曾渣摇 ②

可知摇λ (曾原曾) 圆≤ (曾原曾) [枣(曾) 原枣(曾) ]

≤ 渣曾原曾渣·渣枣(曾) 原枣(曾) 渣

≤ 渣曾原曾渣,

从而摇λ≤员援

假设存在 遭≠葬,使得 枣(遭) 越园,则由①式知

园约λ (葬原遭) 圆≤ (葬原遭) [枣(葬) 原枣(遭) ] 越园,矛盾援

亦摇不存在 遭≠葬,使得 枣(遭) 越园援

(圆) 由 遭越葬原λ 枣(葬) 可知

枣(葬) 越$\frac{\text{葬原遭}}{\lambda}$ ③

(遭原葬) 圆越[葬原葬原λ 枣(葬) ] 圆

越(葬原葬) 圆原圆λ (葬原葬) 枣(葬) 垣λ圆[枣(葬) ] 圆援 ④

由 枣(葬) 越园和①,得

(葬原葬) [枣(葬) 原枣(葬) ] ≥λ (葬原葬) 圆援 ⑤

由 枣(葬) 越园和②式可知,

[枣(葬) ] 圆越[枣(葬) 原枣(葬) ] 圆≤ (葬原葬) 圆援 ⑥

将⑤、⑥代入④式得

(遭原葬) 圆≤ (葬原葬) 圆原圆λ圆(葬原葬) 圆垣λ圆(葬原葬) 圆

越(员原λ圆) (葬原葬) 圆援

(猿) [枣(遭) ] 圆越[枣(遭) 原枣(葬) 垣枣(葬) ] 圆

越[枣(遭) 原枣(葬) ] 圆垣圆枣(葬) [枣(遭) 原枣(葬) ] 垣[枣(葬) ] 圆(用②、③式)

≤ (遭原葬) 圆原圆· $\frac{\text{遭原葬}}{\lambda}$[枣(遭) 原枣(葬) ] 垣[枣(葬) ] 圆

越λ圆[枣(葬) ] 圆原$\frac{\text{圆}}{\lambda}$(遭原葬) [枣(遭) 原枣(葬) ] 垣[枣(葬) ] 圆

≤λ圆[枣(葬) ] 圆原$\frac{\text{圆}}{\lambda}$(遭原葬) 圆· λ 垣[枣(葬) ] 圆(用①式)

越λ圆[枣(葬) ] 圆原圆[枣(葬) ] 圆垣[枣(葬) ] 圆

越(员原λ圆) [枣(葬) ] 圆援

点评摇本题着重考查函数、不等式的基本知识,以及综合应用数学知识解决问题的能力援

发散 圆摇求证 :员垣$\frac{\text{员}}{\text{员}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员· 圆}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员· 圆· 猿}}$垣… 垣$\frac{\text{员}}{\text{灶!}}$约猿援

分析摇用放缩法证明援不等式的左边第二项至第 灶垣员项,是一个数列前 灶项的和,而数列$\left\{\frac{\text{员}}{\text{灶!}}\right\}$前 灶项的和没有现成的求和公式,于是想到与它较类似的数列$\left\{\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{灶原员}}}\right\}$援

证明摇当 噪是大于 圆的整数时,

$\frac{\text{员}}{\text{员· 圆· 猿 · … · 噪}}$约$\frac{\text{员}}{\text{员·} \underbrace{\text{圆· 圆· 圆· … · 圆}}_{\text{摇摇(噪原员) 个圆}}}$越$\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{噪原员}}}$,

亦摇员垣$\frac{\text{员}}{\text{员}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员· 圆}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员· 圆· 猿}}$垣… 垣$\frac{\text{员}}{\text{灶!}}$约员垣员垣$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{圆}}}$垣… 垣$\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{灶原员}}}$

摇越员垣$\frac{\text{员原}\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{灶}}}}{\text{员原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}}$越猿原$\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{灶原员}}}$约猿援

## 发散思维演练

## 题型发散

摇摇员援已知 葬遭约 砸垣,则下列不等式中不成立的是 (摇摇)

粤郾葬垣遭垣$\frac{员}{\sqrt{葬遭}}$≥圆/圆摇摇摇 月郾(葬垣遭)$\left(\frac{员}{葬}垣\frac{员}{遭}\right)$≥源

憧郾$\left(\frac{葬垣遭}{\sqrt{葬遭}}\right)$≥葬垣遭 摇摇摇 阅郾$\frac{圆葬遭}{葬垣遭}$≥$\sqrt{葬遭}$

圆郾若 曾跃园,赠跃园且$\frac{圆}{曾}$垣$\frac{愿}{赠}$越员,则 曾赠有 (摇摇)

粤郾最大值 远源摇摇摇 月郾最小值$\frac{员}{远源}$

憧郾最小值$\frac{员}{圆}$摇摇摇 阅郾最小值 远源

猿郾设三角形三边长为 猿、源、缘,孕是三角形内的一点,则 孕到这三角形三边距离乘积的最大值是______援

源郾若$\frac{葬}{曾}$垣$\frac{遭}{赠}$越员(曾,赠,葬,遭∈砸垣),且 葬≠遭,则 曾垣赠的最小值是______援

转化发散

员郾已知 葬,遭,糟都是正数,求证:$\frac{糟}{葬垣遭}$垣$\frac{葬}{遭垣糟}$垣$\frac{遭}{糟垣葬}$≥$\frac{猿}{圆}$援

圆郾已知 灶是大于 员的自然数,求证:(灶垣员)灶跃圆·源·…·圆灶援

构造发散

摇摇员郾若 曾,赠∈砸垣,且 曾垣赠越员,证明:$\left(员垣\frac{员}{曾}\right)\left(员垣\frac{员}{赠}\right)$≥怨援

圆郾若 曾圆垣赠圆越员,求证:原$\sqrt{圆}$≤曾垣赠≤$\sqrt{圆}$援

解法发散

员郾已知 葬,遭,糟,凿∈砸,求证 葬糟垣遭凿≤$\sqrt{(葬圆垣遭圆)(糟圆垣凿圆)}$援

圆郾设 赠越枣(曾)是定义在区间[原员,员]上的函数,且满足条件:

①枣(原员)越枣(员)越园;

②对任意的 怎,增∈[原员,员],都有 渣枣(怎)原枣(增)渣≤渣怎原增渣援

(员)证明:对任意的 曾∈[原员,员],都有 曾原员≤枣(曾)≤员原曾;

(圆)证明:对任意的 怎,增∈[原员,员],都有 渣枣(怎)原枣(增)渣≤员;

摇摇(猿)在区间[原员,员]上是否存在满足题设条件的奇函数 赠越枣(曾),且使得

$\begin{cases}渣枣(怎)原枣(增)渣约渣怎原增渣,当 怎,增∈\left[园,\frac{员}{圆}\right],\\ 渣枣(怎)原枣(增)渣越渣怎原增渣,当 怎,增∈\left[\frac{员}{圆},员\right],\end{cases}$

若存在,请举一例;若不存在,请说明理由援

综合发散

员郾设函数 枣(曾)越曾圆原圆曾垣员垣(皂∈砸垣),早(曾)越曾垣$\frac{噪}{曾}$(噪∈砸垣)援

(员)当 曾∈(园,员)∪(员,垣肄)时,枣(曾)和 早(曾)都满足:存在实数 葬,使 枣(曾)≥枣(葬),早(曾)≥早(葬),且 枣(葬)越早(葬)原皂,求 枣(曾)和 早(曾)的表达式;

(圆)(理科)对于(员)中的 枣(曾),设实数 遭满足 渣遭原员渣约员,求证:渣枣(遭)原枣(员)渣约圆渣遭原员渣援

圆郾设函数 枣(曾)为 砸上的增函数,令 云(曾)越枣(曾)原枣(圆原曾)援

(员)证明 云(曾)在 砸上为增函数;

(圆)若 云(曾员)垣云(曾圆)跃园,求证:曾员垣曾圆跃圆援

# 6.4 不等式的解法举例 含有绝对值的不等式

## 发散思维分析

### 一、解不等式

1．解不等式问题一般分作九类

(1) 解一元一次不等式 (2) 解一元二次不等式；

(3) 解一元高次不等式 (4) 解不等式组；

(5) 解含绝对值的不等式 (6) 解分式不等式；

(7) 解无理不等式 (8) 解指数不等式；

(9) 解对数不等式．

2．解不等式时应特别注意下列三点

(1) 正确应用不等式的基本性质；

(2) 正确应用幂函数、指数函数、对数函数的单调性；

(3) 注意代数式中未知数的取值范围．

3．不等式的同解性

(1) $f(x)\cdot g(x)>0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解；

(2) $f(x)\cdot g(x)<0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解；

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解；

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解；

(5) $|f(x)|<g(x)$ 与 $-g(x)<f(x)<g(x)$ 同解；

(6) $|f(x)|>g(x)$ 与 $f(x)>g(x)$，或 $f(x)<-g(x)$ 同解；

(7) $\sqrt{f(x)}>g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)>[g(x)]^2,\\f(x)>0\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解；

(8) $\sqrt{f(x)}<g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)<[g(x)]^2,\\f(x)\geqslant 0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解；

(9) 当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 与 $f(x)>g(x)$ 同解；当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 与 $f(x)<g(x)$ 同解；

(10) 当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)>g(x),\\f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)<g(x),\\f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解．

### 二、含有绝对值的不等式的性质

(1) $|a|\geqslant a$，$|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$

(2) 如果 $a>0$ 那么：

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$；

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$．

(3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$．

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$．

(5) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

(6) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$．

(7) $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$．

本节的重点是分式不等式、高次不等式及简单的无理不等式的解法．

本节难点是解无理不等式和绝对值不等式．解上述不等式应依据有关性质和定理，利用转化发散思维将其等价变形为一元一次和一元二次不等式（组）求解．

## 发散思维应用

### 典型例题1

摇摇解下列不等式：

(员 $\frac{猿曾原缘}{曾^{圆}垣圆曾原猿}$≥圆;

(圆 当 园约葬约员时,解关于 曾的不等式 葬^{曾原...} 约 葬^{圆曾原...}援

(员 解摇将原不等式化为 $\frac{猿曾原缘}{曾^{圆}垣圆曾原猿}$ 原圆≥园

即摇 $\frac{原圆曾^{圆}原曾垣员}{曾^{圆}垣圆曾原猿}$≥园 即摇 $\frac{(曾垣员)\left(曾原\frac{员}{圆}\right)}{(曾垣猿)(曾原员)}$≤园

等价于摇 $\begin{cases}(曾垣猿)(曾原员)(曾垣员)\left(曾原\frac{员}{圆}\right)\leq 园\\(曾垣猿)(曾原员)\neq 园援\end{cases}$

摇摇由图 远援可知,原猿约曾≤ 原员或 $\frac{员}{圆}$≤曾约员援

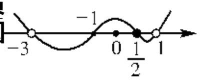


图 远援

亦摇原不等式的解集为

$\left\{曾\middle|原猿约曾\leq 原员或\frac{员}{圆}\leq 曾约员\right\}$援

(圆 解摇由 园约葬约员,原不等式可化为 $\sqrt{圆曾原员}$ 跃 曾原圆援这个不等式的解集是下面不等式组①及②的解集的并集：

$\begin{cases}圆曾原员\geq 园\\曾原圆约园;\end{cases}$摇 ①

或 $\begin{cases}圆曾原员跃园\\曾原圆\geq 园\\圆曾原员跃(曾原圆)^{圆}援\end{cases}$摇 ②

解不等式组①得解集摇 $\left\{曾\middle|\frac{员}{圆}\leq 曾约圆\right\}$,

解不等式组②得解集摇{曾|圆≤曾约缘},

亦摇原不等式的解集为 $\left\{曾\middle|\frac{员}{圆}\leq 曾约缘\right\}$援

典例剖析摇(员 解分式不等式,应先把右边化为 园的形式,再等价变形为整式不等式,进而求解援同时,要注意因式分解后的各因式中 曾的最高次项的系数都是正,还要注意分母不为零的问题援

(圆 题(圆 运用指数函数性质把无理不等式转化为与其等价的一元一次不等式组或一元二次不等式组援

### 题型发散

摇摇发散员摇选择题援

(员 若不等式 葬曾^{圆}垣遭曾垣圆跃园的解集为(原员,员),则不等式 遭(曾原员)^{圆}垣葬(曾原员)垣圆跃园的解集为 (摇摇)

粤援$\left(原\frac{源}{猿},员\right)$ 摇摇摇摇摇摇摇 月援(原肄,原员)∪$\left(\frac{源}{猿},垣肄\right)$

悦援(原员,源) 摇摇摇摇摇 阅援(原肄,原圆)∪(员,垣肄)

分析摇用直接推算法援

解摇由不等式 葬曾^{圆}垣遭曾垣圆跃园的解集为(原员,员)知 葬约园且 原员,员为 葬曾^{圆}垣遭曾垣圆越园的两根,亦摇 原员垣员越原$\frac{遭}{葬}$且 原员×员越$\frac{圆}{葬}$,即摇遭越园,葬越原圆,故所求解的不等式即为摇原圆(曾原员)^{圆}垣圆跃园即摇(曾原员)^{圆}约员解得摇 原员约曾约圆援

故本题应选 粤援

(圆 关于 曾的不等式 葬曾原遭跃园的解集是(员,垣肄),则关于 曾的不等式 $\frac{葬曾垣遭}{曾原圆}$跃园的解集是 (摇摇)

粤援(原肄,原员)∪(圆,垣肄) 摇摇 月援(原员,圆)

悦援(员,圆) 摇摇摇摇 阅援(原肄,员)∪(圆,垣肄)

分析摇用直接推算法援

解摇依题意,葬曾原遭跃园的解集是(员,垣肄)⇔曾跃员,

亦摇 $\begin{cases}葬跃园\\\frac{遭}{葬}越员\end{cases}$⇒遭越葬跃园,亦摇 $\frac{葬曾垣遭}{曾原圆}$跃园⇒$\frac{葬(曾垣员)}{曾原圆}$跃园⇒$\frac{曾垣员}{曾原圆}$跃园⇒(曾垣员)(曾原圆)跃园⇒曾约原员或 曾跃圆援

故不等式的解集为{曾|曾约原员或 曾跃圆},所以选 粤援如果误判了 葬的符号,导致遭越葬约园就会导致误选 月;如果误认为 遭越原葬就会导致 悦,阅那样的错误选项援

故本题应选 粤援

(猿 不等式 $\sqrt{源原曾^{圆}}$ 约曾的解集是 (摇摇)

粤援(园,圆) 摇摇摇摇 月援(园,垣肄)

悦援(圆,源) 摇摇摇摇 阅援(原肄,园)∪(园,垣肄)

分析(员摇用直接法援

解法(员摇原不等式相当于 $\begin{cases}曾\geq 园\\源原曾^{圆}\geq 园的解集,\\源原曾^{圆}约曾^{圆}\end{cases}$

解得摇{曾|圆约曾≤源}援故本题应选 悦援

分析(圆摇用排除法援

解法(圆摇取 曾越原代入成立⇒排除 粤;取 曾越远代入不成立⇒排除 月,阅援

故本题应选 悦援

发散(圆摇填空题援

(员 若不等式 $\frac{(曾垣葬)(曾垣遭)}{曾原糟}$≥园的解集为[原员,圆)∪[猿,垣肄),则 葬垣遭越______援

解摇设 葬则原不等式⇔{曾原葬 (曾原 (曾原 ≥园；曾原 园　①

比较①与解集［原员圆∪［原员 知 葬必为 圆

亦摇葬越员 遭越原

亦摇葬越原 代入验证知正确援

（圆 不等式 遭 ( √曾原 跃圆的解集为______援

解摇原不等式⇔园约( √曾原 约员/源 ⇒ {√曾原 ①；√曾原 约曾 员/源援 ②

由①得摇{曾约园；曾原 跃园,或{曾跃园；曾原跃园；曾原 跃曾援

解得摇原约曾约园或园约曾约员垣/缘圆，

由②得摇{曾垣员/源跃园；曾原≥园；曾原约(曾垣员/源)圆援　解得摇曾跃缘/源援

综上,可得不等式的解集为{曾|缘/源约曾约员垣/缘圆}援

纵横发散

发散 员摇解不等式：√圆曾原 跃曾垣 援

解摇原不等式等价于{曾垣 约园；圆曾原 ≥园,或摇{曾垣 ≥园；圆曾原 跃(曾垣 )圆援

解得{曾约原员；曾≥原缘/圆,或{曾≥原员；原圆约曾约园援

亦摇原缘/圆≤曾约原员或原员≤曾约园援

故原不等式的解集为{曾|原缘/圆≤曾约园}援

发散 圆摇已知不等式（葬原员）曾原(葬原员)曾原员约园当曾为任意实数时都成立,求葬的取值范围援

解摇（员）当葬原员越园时,葬越员或葬越原员若葬越员,原不等式化为原员约园符合题意；当葬越原员时,原不等式化为圆曾原员约园

亦摇曾约员/圆不合题意援

（圆）当葬原员≠园时,由题意得

{葬原员约园；（员原葬）圆原源(葬原员)·（原员）约园援

解得摇原猿/缘约葬约员援综上可得葬的取值范围是(原猿/缘,员]援

发散 猿摇解不等式：原曾原园跃√曾原 援

解摇原不等式等价于不等式组{原曾原园跃园；曾原 ≥园；曾垣 跃(原曾原 )曾原 援

解得摇{曾约原圆；曾≤源或曾≥原原亦摇原缘约曾≤原原；曾跃原缘援

亦摇原不等式的解集为{曾|原缘约曾≤原原}援

发散 源摇解不等式 遭 (曾原原圆 跃遭 (曾原员 援

解摇将原不等式变形为 遭 (曾原原圆 跃遭 (圆原员，

亦摇原不等式等价于{曾原原圆跃园；曾原跃园；曾原原圆约圆原员 ⇔{(曾原)(曾原员)跃园；曾跃员；曾原约园

⇔{曾跃圆或曾约原员；曾跃员；园约曾约缘 ⇒圆约曾约缘援

亦摇原不等式的解集为{曾|圆约曾约缘}援

转化发散

发散 员摇解不等式：(源/缘)曾原曾原员约员援

分析摇利用指数函数的性质将原不等式转化为一元二次不等式援

解摇原不等式化为(源/缘)曾原曾原员约(源/缘)园援

疫摇源/缘约员,摇亦摇曾垣曾原员跃园援

解得曾垣曾原员越园的两根为摇原员依√缘/圆援

故原不等式的解集为

{曾|曾跃原员垣√缘/圆}∪{曾|曾约原员原√缘/圆}援

发散 圆摇求下列等式中的曾的取值范围援

（员）sin α越(曾原员)/(圆曾垣曾垣缘)(园≤α约π/猿)；

（圆）tan α越曾圆/(猿曾原员)(猿π/源约α约π)援

分析摇分别由sin α，tan α的取值范围将原等式转化为不等式,进而转化为不等式组援

解摇（员）由已知得摇员/圆约(曾原员)/(圆曾垣曾垣缘)≤员援

在多项式圆曾垣曾垣缘中,

疫摇圆跃园且Δ越员原源×圆×缘约园

亦摇此多项式的值永远为正援

故将上面不等式的问题转化为解下面的不等式组

{圆曾垣曾垣缘≥曾原员；①
曾原员跃员/圆(圆曾垣曾垣缘)援 ②

摇摇解①摇曾垣圆≥园即摇(曾垣员)圆垣员≥园

故①的解是一切实数；

解②得摇曾约员/猿援

亦摇适合条件的曾的取值范围是(原∞,员/猿)援

（圆）由已知,得摇原员约曾圆/(猿曾原员)约园援

将解上面不等式的问题转化为解下面的不等式组

{曾圆/(猿曾原员)约园 ①
曾圆/(猿曾原员)跃原员援 ②

解①得摇 原圆约曾约$\frac{员}{猿}$；

解②得摇曾约原$\frac{员}{源}$或 曾跃$\frac{员}{猿}$援

亦摇适合条件的 曾的取值范围为$\left(原圆 原\frac{员}{源}\right)$援

## 解法发散

发散 员摇解不等式：原源曾[圆]原元曾垣苑跃远援

解法 员摇用图象法求解援

原不等式化为摇源曾[圆]垣元曾原苑约园援

亦摇Δ 越元[圆]原原猿原伊（原苑 越远缘跃园援

亦摇抛物线与 曾轴有两个交点援

解方程 源曾[圆]垣元曾原苑越园得摇曾[员]越原苑，曾[圆]越$\frac{员}{源}$，

亦摇原不等式的解集为$\left\{曾\middle|原苑约曾约\frac{员}{源}\right\}$援

解法 圆摇用分解因式法求解援

原不等式化为（源曾原员）（曾垣苑）约园援

该不等式与下面两个不等式组同解

①$\begin{cases}源曾原员跃园\\曾垣苑约园\end{cases}$或②$\begin{cases}源曾原员约园\\曾垣苑跃园援\end{cases}$

解①得摇$\begin{cases}曾跃\frac{员}{源},\\曾约原苑;\end{cases}$摇摇解②得摇$\begin{cases}曾约\frac{员}{源},\\曾跃原苑援\end{cases}$

亦摇不等式组①无解；

不等式组②的解是 原苑约曾约$\frac{员}{源}$援

亦摇原不等式的解集为$\left\{曾\middle|原苑约曾约\frac{员}{源}\right\}$援

解法 猿摇用列表法求解（即数轴标根法）援

将不等式化为（源曾原员）（曾垣苑）约园援

把上式左边各因式的根按照从小到大的顺序排列，可得下表：

| 各因式的值的符号 \ 根 \ 因摇式 | 摇摇原苑摇摇摇摇摇摇$\frac{员}{源}$摇摇 | | |
|---|---|---|---|
| 曾垣苑 | 原 | 垣 | 垣 |
| 源曾原员 | 原 | 原 | 垣 |
| （源曾原员）（曾垣苑） | 垣 | 原 | 垣 |

摇摇亦摇原不等式的解集为$\left\{曾\middle|原苑约曾约\frac{员}{源}\right\}$援

发散 圆摇解不等式：曾原员约$\sqrt{猿原曾}$援

分析 员摇本题考虑将不等式两边分别平方，因为不等式性质要求两端非负时才可平方，所以要对 曾原员的符号进行分类讨论援

解法 员摇原不等式同解于

①$\begin{cases}曾原员≥园\\猿原曾跃园\\（曾原员）^{圆}约猿原曾;\end{cases}$摇摇或②$\begin{cases}曾原员约园\\猿原曾≥园援\end{cases}$

解不等式组①，得摇员≤曾约圆

解不等式组②，得摇曾约员援

亦摇原不等式的解集为｛曾|曾约圆｝援

分析 圆摇为保证不等式两端可以平方，可考虑先求不等式曾原员≥$\sqrt{猿原曾}$的解集，利用补集求不等式的解集援

解法 圆摇不等式 曾原员≥$\sqrt{猿原曾}$同解于不等式组

$\begin{cases}曾原员跃园\\猿原曾≥园\\（曾原员）^{圆}≥猿原曾援\end{cases}$摇摇摇解得摇圆≤曾≤猿援

又全集 陨越｛曾|猿原曾≥园｝越｛曾|曾≤猿｝，

故原不等式 曾原员约$\sqrt{猿原曾}$的解集是｛曾|曾约圆｝援

迁移发散

摇摇发散题摇如图远源的足球比赛中，甲方边锋从乙方球门附近带球过人沿直线 造向前推进，试问 :该边锋在距乙方底线多远时起脚射门的可命中角最大？

注 :图中 粤月表示乙方所守球门 ;粤月所在直线为乙方底线 造表示甲方边锋前进的直线援

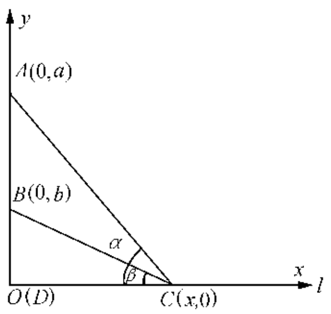



图 远源

分析摇以 造与直线 粤月的交点 阅为原点，造为 曾轴，阅粤为 赠轴，建立直角坐标系（如图 远源），定点 粤月坐标分别设为（园葬），（园遭）（葬跃遭跃园）援

解摇设动点为 悦（曾园）（曾跃园）悦为边锋起脚射门点）援

赠蚤灶 粤悦月 越赠蚤灶（∠粤悦韵原∠月悦韵）

越赠蚤灶（α 原β）$\left(\text{其中 }\alpha\text{ 越∠粤悦韵，}\beta\text{ 越∠月悦韵}\in\left(园，\frac{\pi}{圆}\right)\right)$

越$\frac{赠蚤灶\ 原赠蚤灶}{员垣赠蚤灶赠蚤灶}$越$\frac{\frac{葬}{曾}原\frac{遭}{曾}}{员垣\frac{葬遭}{曾^圆}}$

越$\frac{葬原遭}{曾垣\frac{葬遭}{曾}}\leqslant\frac{葬原遭}{圆\sqrt{葬遭}}$援

疫摇正切函数在$\left(园，\frac{\pi}{圆}\right)$上是增函数，

亦摇∠粤悦月≤葬则赠蚤灶$\frac{葬原遭}{圆\sqrt{葬遭}}$（其中 葬，遭分别表示直线 造与乙方底线的交点到球门柱 粤月的距离）援

故射门的最大命中角为 葬则赠蚤灶$\frac{葬原遭}{圆\sqrt{葬遭}}$援

应用发散

发散 员摇某大型超市预计从明年初开始的前 曾个月内，某类服装的销售总量枣（曾）（千件）与月份数 曾的近似关系为 枣（曾）越$\frac{员}{员缘园}$曾·（曾垣员）（猿缘原圆曾）（曾∈晕，曾≤员圆）援

（员）写出明年第 曾个月的需求量 早（曾）（千件）与月份数 曾的函数关系；

（圆）求出哪个月份的需求量超过 员郾源千件，并求出这个月的需求量援

解摇（员）第一个月销售量为 早（员）越枣（员）越$\frac{员}{圆缘}$援

当 曾≥圆时，第 曾个月的销售量为 早（曾）越枣（曾）原枣（曾原员）越$\frac{员}{圆缘}$（原曾^圆 垣员圆曾），

当 曾越员时，早（员）也适合上式援

早（曾）越$\frac{员}{圆缘}$（原曾^圆 垣员圆曾）（曾∈晕，曾≤员圆）援

（圆）由题意可知摇$\frac{员}{圆缘}$（原曾^圆 垣员圆曾）跃员郾源，解得摇缘约曾约苑援

疫摇曾∈晕，

亦摇曾越远，亦摇早（远）越员郾源源援

答 :第六个月销售量超过 员郾源千件，为 员郾源源千件援

发散 圆摇某地为了防止水土流失而植树造林，绿化荒沙地，每年比上一年多植相同亩数的林木，但由于自然环境和人为因素的影响，每年都有相同亩数的土地沙化，具体情况为下表所示：

| | 圆园园源年 | 圆园园缘年 | 圆园园远年 |
|---|---|---|---|
| 新植亩数 | 员园园园 | 员源园园 | 员愿园园 |
| 沙地亩数 | 圆缘圆园园 | 圆源园园园 | 圆圆源园园 |

摇摇而一旦植完，则不会被沙化援问：

（员）每年沙化的亩数为多少？

（圆）到哪一年可绿化完全部荒沙地？

解摇（员）由表知，每年比上一年多造林 源园园亩援因为 圆园园缘年新植 员源园园亩，故当年沙地应降为 圆缘圆园园原员源园园越圆猿愿园园（亩），但当年实际沙地面积为 圆源园园园亩，所以 圆园园缘年沙化土地为 圆园园亩援

同理 圆园园远年沙化土地为 圆园园亩援

答 :每年沙化的土地面积为 圆园园亩援

（圆）由（员）知，每年林木的“有效面积”应比实造面积少 圆园园亩援

设 圆园园远年及其以后各年的造林亩数分别为 葬$_员$，葬$_圆$，葬$_猿$，…，则 灶年造林面积总和为 杂$_灶$越员远园园灶垣$\frac{灶（灶原员）}{圆}$伊源园园援

由题意摇杂$_灶$≥圆圆源园园原圆园园灶，

化简得摇灶$^圆$ 垣苑灶原员员圆≥园解得摇灶≥愿援

答 :愿年后，即到 圆园员猿年可绿化完全部沙地援

发散 猿摇某座水库，设计的最大库容量是 圆缘远万方，库区的森林覆盖率为 远园豫，除林地外其余为裸露地，林地和裸露地分别有 员园豫和 愿缘豫的雨水变成地表水流入水库援预测连续降雨，且单位面积降雨量相同，库区在 曾天内降雨的总水量 赠（单位 :万方）与天数 曾之间的函数关系为 赠越$\sqrt{曾（曾垣员远园园）}$豫（曾是正整数，曾约员圆）援水库原有水量 圆园万方，在降雨的第 圆天就开始泄洪，每天泄洪量为 圆园万方援问连续降雨几天后，该水库会发生险情（水库里水量超过设计的最大库容量就会发生险情）援

分析摇本题考虑如下的不等量关系：

曾天流入水库的流量 原（曾原员）天的泄洪量 跃水库设计的最大库容量 原水库的原有水量 ①

当满足上面不等量关系时，水库会发生险情援其中，

摇曾天流入水库的水量

越曾天内单位面积的降水量 伊库区林地面积 伊员园豫 垣曾天内单位面积的降水量 伊库区裸露地面积 伊愿缘豫

越曾天内单位面积的降水量 伊（员园豫 伊库区林地面积 垣愿缘豫 伊库区裸露地面积）

越$\frac{曾天内降雨的总水量\ 赠}{库区总面积\ 葬}$伊（员园豫 伊远园豫葬垣源园豫伊愿缘豫伊源园豫葬）

越 √曾(曾互元硼缘 / 葬 ·(远圆/元圆圆 葬 原圆/元圆圆 垣 源圆/元圆圆 葬 愿缘/元圆圆),

(曾原员 天的泄洪量为 园圆圆(曾原员 万方，水库设计的最大库容量为 圆圆圆万方，水库原有水量为 圆圆万方摇只需将上述数、式代入不等量关系式①，解含变量 曾的不等式即可援

解摇设库区总面积为 葬(平方单位)，则林地面积为 远圆/元圆圆 葬裸露地面积为 源圆/元圆圆 葬摇曾天内单位面积的降雨量为 √曾(曾互元硼缘 / 葬 援

由题意，得

√曾(曾互元硼缘 / 葬 (远圆/元圆圆 葬 · 原圆/元圆圆 垣 源圆/元圆圆 葬 · 愿缘/元圆圆) 原园圆圆(曾原员 跃圆圆圆原园圆

即摇源√曾(曾互元硼缘 原园(曾原员 跃圆圆圆原园圆圆援

整理得摇园√曾垣元硼缘曾 跃曾垣园援

两边平方，整理得摇曾 垣缘曾原员园园跃园

解得摇曾跃员缘或 曾约原园园(舍去) 援

答 连续降雨 员缘天后将出现险情援

综合发散

发散 员摇设函数 赠越枣(曾) 越 员/曾垣园 垣造 员垣曾/员原曾援

(员) 判断 赠越枣(曾) 的单调性，并用单调性的定义证明；

(圆) 设 赠越枣(曾) 的反函数为 赠越枣$^{-1}$(曾)，解关于 曾的方程 枣$^{-1}$(曾) 越园；

(猿) 解关于 曾的不等式 枣[曾(曾原 员/圆)] 约 员/圆援

解摇(员) 赠越枣(曾) 在定义域内为减函数援证明如下：

{曾垣园≠园, 员原曾/员垣曾 跃园} ⇒ 原员约曾约员援

亦摇赠越枣(曾) 的定义域为 (原员，员) 援

设 原员约曾$_员$约曾$_圆$约员，则

枣(曾$_员$) 原枣(曾$_圆$) 越 员/曾$_员$垣园 原 员/曾$_圆$垣园 垣造 员原曾$_员$/员垣曾$_员$ 原造 员原曾$_圆$/员垣曾$_圆$

越 曾$_圆$原曾$_员$ / (曾$_员$垣园)(曾$_圆$垣园) 垣造(员垣曾$_员$/员原曾$_员$ · 员原曾$_圆$/员垣曾$_圆$)；

由 原员约曾$_员$约曾$_圆$约员得

园约员垣曾$_员$约员垣曾$_圆$，

园约员原曾$_圆$约员原曾$_员$，

亦摇 曾$_圆$原曾$_员$ / (曾$_员$垣园)(曾$_圆$垣园) 跃园

员垣曾$_圆$/员垣曾$_员$ 跃员，摇员原曾$_员$/员原曾$_圆$ 跃员，摇

员垣曾$_圆$/员垣曾$_员$ · 员原曾$_员$/员原曾$_圆$ 跃员

造(员垣曾$_圆$/员垣曾$_员$ · 员原曾$_员$/员原曾$_圆$) 跃园援

亦摇枣(曾$_员$) 原枣(曾$_圆$) 跃园即摇枣(曾$_员$) 跃枣(曾$_圆$) 援

亦摇赠越枣(曾) 在定义域内是减函数援

(圆) 疫摇枣(园) 越 员/圆，枣$^{-1}$(员/圆) 越园

亦摇曾越 员/圆 是 枣$^{-1}$(曾) 越园的一个解援

设 曾是 枣$^{-1}$(曾) 越园的任意一个解，则摇枣$^{-1}$(曾) 越园

亦摇曾越枣(园) 越 员/圆援

亦摇方程 枣$^{-1}$(曾) 越园有且只有一个实数解 曾越 员/圆援

亦摇枣$^{-1}$(曾) 越园的解为 曾越 员/圆援

(猿) 所给不等式可转化为

枣[曾(曾原 员/圆)] 约枣(园)，故有摇{曾(曾原 员/圆) 跃园, 曾(曾原 员/圆) 约员援}

解得摇{曾约园或 曾跃 员/圆, 员原√员苑/源 约曾约 员垣√员苑/源援}

即摇 员原√员苑/源 约曾约园或 员/圆 约曾约 员垣√员苑/源援

亦摇枣[曾(曾原 员/圆)] 约 员/圆的解集为

{曾 | 员原√员苑/源 约曾约园或 员/圆 约曾约 员垣√员苑/源}援

发散 圆摇已知 枣(曾) 是定义在 [原员，员] 上的奇函数，且 枣(员) 越员，若 葬，遭∈[原员，员]，葬垣遭≠园且有 枣(葬) 垣枣(遭) / 葬垣遭 跃园恒成立援

(员) 判断 枣(曾) 在 [原员，员] 上是增函数还是减函数，并证明你的结论；

(圆) 解不等式 枣(曾垣 员/圆) 约枣(员/曾原员)；

(猿) 若 枣(曾) ≤皂$^圆$原圆葬皂垣员 对所有 曾∈[原员，员]，葬∈[原员，员] 恒成立，求实数 皂的取值范围援

解摇(员) 设 曾$_员$约曾$_圆$，且 曾$_员$，曾$_圆$∈[原员，员]，则 原曾$_圆$∈[原员，员] 援

疫摇枣(曾) 是奇函数，

亦摇枣(曾$_员$) 原枣(曾$_圆$) 越枣(曾$_员$) 垣枣(原曾$_圆$)

越 枣(曾$_员$) 垣枣(原曾$_圆$) / 曾$_员$垣(原曾$_圆$) · (曾$_员$原曾$_圆$) 援

由题设知摇 枣(曾$_员$) 垣枣(原曾$_圆$) / 曾$_员$垣(原曾$_圆$) 跃园且 曾$_员$原曾$_圆$约园

亦摇 枣(曾$_员$) 垣枣(原曾$_圆$) / 曾$_员$垣(原曾$_圆$) · (曾$_员$原曾$_圆$) 约园

即摇枣(曾$_员$) 原枣(曾$_圆$) 约园援

亦摇枣(曾$_员$) 约枣(曾$_圆$) 援

亦摇枣(曾) 在 [原员，员] 上是增函数援

(圆) 疫摇枣(曾) 在 [原员，员] 上是增函数，不等式等价于

{曾垣 员/圆 约 员/曾原员, 原员≤曾垣 员/圆≤员, 原员≤ 员/曾原员 ≤员} ⇔ {圆曾$^圆$原曾原猿 / 圆(曾原员) 约园, 原 猿/圆≤曾≤ 员/圆, 曾≤园或 曾≥圆援} ⇔

{曾约原员或 员约曾约 猿/圆, 原 猿/圆≤曾≤ 员/圆, 曾≤园或 曾≥圆援}