21 世纪高职高专数学教材

高等应用数学

（下　　册）

上海高校《高等应用数学》编写组

立信会计出版社

《高等应用数学》编写组

顾　问　胡启迪（上海教育考试院原院长、教授）

主　编　朱弘毅

编　委　（按姓氏笔画排列）

车荣强　田　丽　朱弘毅　刘柏林　苏海容

陈宝冲　张福康　赵斯泓　俞国胜　陶明诚

黄丽萍

主　审　李重华（上海交通大学教授、东海职业技术学院副院长）

审稿组　（按姓氏笔画排列）

朱德通（上海师范大学）　李重华（东海职业技术学院）

杨晓斌（上海财经大学）　俞建新（上海农林职业技术学院）

姚力民（上海商学院）

《高等应用数学》下册

副主编　赵斯泓（上海立信会计学院）

陈宝冲（上海科学技术职业学院）

黄丽萍（上海城市管理职业技术学院）

俞国胜（上海大学）

刘柏林（三门峡职业技术学院）

序

由于普通高校的连年扩招以及高等教育的多渠道教学，使我国高等教育的毛入学率呈现连年增长的趋势。有数据表明，全国的毛入学率已接近 20%，而上海、北京等地已超过了 50%。这意味着我国的高等教育已从改革开放初期的“精英化”阶段进入到当今的“大众化”阶段，有的地方还向“普及化”阶段迈进，实现了高等教育的跨越式发展。作为大众化阶段的高等教育，其重要特点是多样性，具体表现在高等学校的多层次、多类型（研究型、教学型、高职型、社区型）；人才培养模式的多样性；毕业就业的多样性；社会对高等教育人才培养需求的多样性等。而其中高等职业教育的改革和发展在高等教育的改革和发展中，起着基础性作用，在为实现“造就数以亿计的高素质劳动者、数以千百万计的专门人才和一大批拔尖创新人才”的目标中，占有重要的一块。历史与科技发展的实践告诉我们，在高等教育的基础方面，高等数学是不可或缺的课程，它是大学生必需的基本技能、必备的文化修养。现在的问题是，如何在有限的课时下，根据教学对象和目标精选内容、架构体系、学以致用。面对高等教育中高职与高专这样一个特殊的学习群体，在当前教育形势下，编写一本有针对性的高等数学教材，成为许多人的愿望，也是教材建设中的重要任务。展示在我们眼前的《高等应用数学》，正是应运而生的教材。

据我了解，本教材的编写者都是一些有丰富教学实践经验的数学教师，他们中许多人长期工作在上海高等专科学校，经历了上海 20 世纪 90 年代专科教育和新世纪高职教育的改革实践，熟悉学生，掌握教学规律。他们把在上海高职高专数学课程教学改革中建立的内容、体

系和结构融进了《高等应用数学》中。在教材编写时，他们又进行了广泛的调查研究和深入的切磋讨论，紧扣高职与高专的培养目标，把握“以应用为目的，以必需够用为度”的编写原则，认真细致地做好教材编写工作。

《高等应用数学》重视基本概念的建立、基本运算的训练，注重培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，较好地调节数学推理与运算技巧的深度。与过去教材相比，本教材精简了内容、降低了难度，更贴近高职高专培养应用型人才的实际需要。另外《高等应用数学》的语言叙述也力求通俗精练，有利于启发式教学，有利于学生自学。

众所周知，高等职业教育改革是长期的任务，教材建设也是项长期的工作。随着事业的发展和教学改革的深入，教材建设会相应跟上。一本好的教材，也只有通过不断使用、研磨而日臻完善。因此希望使用本教材的各院校，能结合教学实际，改进不足之处，注入更新功能。

谨献此序，以表示一个老数学工作者对高职高专数学教学改革的期盼。

胡启迪

（上海市教育考试院原院长、教授）

前　　言

在高等职业教育迅速发展的基础上，为了适应高职高专教育改革的需要，在上海市教委的领导下，组建了“上海高校《高等应用数学》编写组”，朱弘毅任《高等应用数学》主编，为高职高专编写一本具有高职高专特色的数学教材。

《高等应用数学》分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、一阶微分方程及其应用、多元函数微积分，共七章，其教学课时分别为12、14、10、10、8、6、12学时。下册从第八章开始，内容包括矩阵（含行列式）、线性方程组、事件与概率、随机变量分布与数字特征、统计分析，共五章，其教学课时分别为12、4、8、10、12学时。俞国胜编写第八章，赵斯泓编写第九、第十章，陈宝冲编写第十一章，刘柏林编写第一章后二节及第十二章。

本教材按照“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，参照高职高专基础课教学基本要求，结合数学课程教学改革的实际情况和教学经验编写的。本书力求深入浅出，按照高职高专培养目标选取教材内容、把握好推理和运算能力的深度；本书立足“好教、好学”，每节后配有习题，每章后配有复习题。本书内容富有弹性，教师可根据本校的特点与实际情况进行选择。

本书由上海教育考试院原院长胡启迪教授任顾问。《高等应用数学》由李重华教授主审，参加审稿的还有朱德通、杨晓斌、姚力民、俞建新，他们认真审阅原稿，提出了许多宝贵意见。本书在编写和出版过程

中得到胡启迪教授、上海市教委高教处徐国良同志、立信会计出版社孙时平总编辑、徐雪芬副社长、蔡莉萍编辑及审稿组各位专家的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误与不妥之处,敬请广大读者和同行批评指正。

朱弘毅

目　　录

第八章　矩　　阵

第八、第九章介绍涉及线性代数方面的内容：矩阵和线性方程组。矩阵是研究线性代数的一个有力工具，有着广泛的应用。本章主要介绍有关矩阵的概念，矩阵的运算，逆矩阵及矩阵的初等变换。

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的概念

我们先看两个例子：

【例 1】　某公司销售甲、乙、丙三种产品，上半年的销售额（单位：件）与成本（单位：元）如表 8-1 所示。

表 8-1

甲、乙、丙产品销售额、成本

产品 项目	产品甲	产品乙	产品丙
销售额（件）	200	250	300
成本（元）	1 000	1 500	2 500

如果将表 8-1 中的数据取出并按表格数据的原次序排列，可以得到一个 2 行 3 列矩形数表：

$$\begin{pmatrix} 200 & 250 & 300 \\ 1\,000 & 1\,500 & 2\,500 \end{pmatrix}$$

则称其为 2 行 3 列矩阵，简称 2×3 矩阵。

【例 2】 已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=1 \\ -6x_1+x_2+2x_3+x_4=-4 \\ 7x_1+4x_2-3x_3-2x_4=5 \end{cases}$$

这个方程组未知数的系数及常数项按方程组中相对应次序排列，可以组成一个 3 行 5 列矩形数表：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

则称其为 3 行 5 列矩阵，简称 3×5 矩阵，并称之为该方程组的增广矩阵(在第九章中介绍)。

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 的下标表示该数在第 i 行第 j 列交叉位置上的元素。

一般用大写字母 A、B、C，…表示矩阵。为了指明矩阵 A 是 m 行 n 列矩阵，可用 $A_{m\times n}$ 表示，或用 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示以 a_{ij} 为元素 m 行 n 列矩阵 A。

定义 2 $n\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称 A 为 n 阶方阵,也可记作 A_n。在方阵中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

特别地,规定一阶方阵就是一个数,即 $A_1=(a)=a$。

定义 3　具有相同行数和相同列数的矩阵,称之为同型矩阵。

例如, $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}_i, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}_i$

则 A 与 C 是同型矩阵,A 与 B 不是同型矩阵。

定义 4　如果同型矩阵,$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}, (i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n)$$

则称矩阵 A 和矩阵 B 相等,记作 $A=B$。

【例 3】　设

$$A=\begin{pmatrix}x-4 & x\\ 2x-2y & x+y\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3y-3z & y-1\\ -2 & 6-z\end{pmatrix}$$

若 $A=B$,求 x,y,z 的值。

解　根据矩阵 A 与 B 相等的定义,A 与 B 对应的元素应该相等,得

$$\begin{cases}x-4=3y-3z\\ x=y-1\\ 2x-2y=-2\\ x+y=6-z\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x-3y+3z=4\\ x-y=-1\\ 2x-2y=-2\\ x+y+z=6\end{cases}$$

解方程组得

$$x=1, y=2, z=3$$

二、特殊矩阵

1．零矩阵

所有元素都为零的矩阵，称之为零矩阵，记作 O。m 行 n 列的零矩阵记作 $O_{m\times n}$。

注意，不同型的零矩阵是不相等的。

例如，$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$O_{2\times 2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$是两个不相等的零矩阵。

2．单位矩阵

主对角线上的元素均为 1，其余元素都为零的 n 阶方阵，称作单位矩阵，记作 E 或 E_n，即

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中所起的作用类似于数 0 和数 1 在数的运算中所起的作用。

3．三角形矩阵

主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角矩阵；主对角线上方的元素全为零的方阵称为下三角矩阵。如：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ -7 & 5 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

分别是上三角矩阵，下三角矩阵。

上三角矩阵，下三角矩阵统称为三角形矩阵。

习　题　8-1

1．写出下列方程组的增广矩阵。

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1\\ 5x_1+x_2+6x_3=2\end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 13x_2 + 8x_3 = 8 \\ 7x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2. 某公司销售甲、乙、丙三种产品，去年的销售额（单位：件）与成本（单位：元）如表 8-2 所示：

表 8-2

甲、乙、丙产品的销售额、成本

项目＼产品	产品甲	产品乙	产品丙
销售额	2 200	25	3 050
成本	8 742	157	7 211

按表格数据的次序，用矩阵表示上面的表格。

3. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} x+y & 0 & 1 \\ x-y & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & a-2b & 1 \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}, \text{且 } A=B,$$

试求常数 x, y, a, b。

第二节　矩阵的运算

矩阵的基本运算主要包括矩阵的加法与减法、数与矩阵的数乘运算、矩阵与矩阵的乘法运算和矩阵的转置运算。

一、矩阵的加法

定义 1　设矩阵 A、B 是两个 $m \times n$ 的同型矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

将它们对应位置元素相加，所得的 $m\times n$ 矩阵称为矩阵 A，B 的和，记作 $A+B$，即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+a_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+a_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

【例 1】 设

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

计算 $A+B$，

解 由定义

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

【例 2】 某公司销售甲、乙、丙三种产品上半年的销售额（单位：件）与成本（单位：元）如下矩阵 A 所示：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 200 & 250 & 300 \\ 1\,000 & 1\,500 & 2\,500 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{销售额} \\ \text{成　本} \end{array}$$

而该公司销售甲、乙、丙三种产品下半年的销售额（单位：件）与成本（单位：元）如下矩阵 B 表示：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ B= & \begin{pmatrix} 250 & 150 & 200 \\ 1\,200 & 1\,000 & 2\,000 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{销售额} \\ \text{成　本} \end{array}$$

则公司销售甲、乙、丙三种产品全年的销售额（单位：件）与成本（单位：元）可用如下矩阵 C 表示：