

新世纪高职高专教科书

李海波 总主编

# 高等应用数学

(上 册)

主 编 吴志清 黄玉洁

副主编 朱峻鹦

立信会计出版社

# 内 容 提 要

本书是教育部高职高专规划教材,是以教育部高职高专应用数学课程的基本要求为依据,吸收国外先进职业教育思想编写的。全书从培养财经、工程、管理类应用型、实用型人才的目标出发,突出“最优化”思想的主线,借鉴国外先进职业教育经验,在内容上有适度的超前性,如“图与网络分析”部分的内容,开创了国内同类型教材之先河。

全书分上、下两册,上册主要讲述一元微积分、二元微积分及矩阵;下册主要讲述线性规划、图与网络分析;事件与概率、随机变量的数字特征、统计推断、方差分析与回归分析等。

本书可作为财经、工程、管理类各专业高职、高专及成人高校和相关专业各类培训班的应用数学教材,也可作为各类工程技术人员及管理人员自学参考用书。

## 目 录

第一章 函数.....	1
§ 1-1 函数的概念 .....	1
习题 1-1 .....	5
§ 1-2 初等函数 .....	6
习题 1-2 .....	13
§ 1-3 分段函数 .....	13
习题 1-3 .....	16
§ 1-4 常用的经济函数 .....	17
习题 1-4 .....	21
复习题一 .....	21
第二章 极限与连续 .....	24
§ 2-1 数列极限 .....	24
习题 2-1 .....	29
§ 2-2 函数极限 .....	29
习题 2-2 .....	35
§ 2-3 无穷小与无穷大 .....	36
习题 2-3 .....	39
§ 2-4 极限的四则运算 .....	40
习题 2-4 .....	44
§ 2-5 两个重要极限 .....	45
习题 2-5 .....	49
§ 2-6 函数的连续性 .....	50
习题 2-6 .....	56

复习题二 .....	57
<b>第三章 导数与微分</b> .....	60
§ 3-1 导数的概念 .....	60
习题 3-1 .....	66
§ 3-2 导数的基本公式和基本运算法则 .....	67
习题 3-2 .....	71
§ 3-3 复合函数的导数 .....	72
习题 3-3 .....	75
§ 3-4 反函数的导数和隐函数的导数 .....	76
习题 3-4 .....	81
§ 3-5 高阶导数 .....	81
习题 3-5 .....	84
§ 3-6 微分 .....	85
习题 3-6 .....	93
复习题三 .....	94
<b>第四章 导数的应用</b> .....	97
§ 4-1 中值定理 .....	97
习题 4-1 .....	100
§ 4-2 罗必塔法则 .....	100
习题 4-2 .....	107
§ 4-3 函数单调性 .....	108
习题 4-3 .....	111
§ 4-4 函数的极值与最值 .....	111
习题 4-4 .....	118
§ 4-5 函数图形的描绘 .....	118
习题 4-5 .....	127

§ 4-6 导数在经济工作中的应用 .....	128
习题 4-6 .....	136
复习题四 .....	137
<b>第五章 不定积分</b> .....	<b>142</b>
§ 5-1 不定积分的概念与性质 .....	142
习题 5-1 .....	150
§ 5-2 换元积分法 .....	152
习题 5-2 .....	161
§ 5-3 分部积分法 .....	163
习题 5-3 .....	168
§ 5-4 简易积分表的使用 .....	169
习题 5-4 .....	172
复习题五 .....	172
<b>第六章 定积分</b> .....	<b>175</b>
§ 6-1 定积分的概念 .....	175
习题 6-1 .....	184
§ 6-2 微积分基本公式 .....	185
习题 6-2 .....	190
§ 6-3 定积分的换元积分法 .....	191
习题 6-3 .....	195
§ 6-4 定积分的分部积分法 .....	196
习题 6-4 .....	199
§ 6-5 无穷区间上的反常积分 .....	199
习题 6-5 .....	202
§ 6-6 定积分的应用 .....	202
习题 6-6 .....	211

复习题六.....	213
<b>第七章 多元函数微积分.....</b>	<b>217</b>
§ 7-1 空间解析几何简介 .....	217
习题 7-1 .....	220
§ 7-2 二元函数的极限与连续 .....	221
习题 7-2 .....	224
§ 7-3 偏导数与全微分 .....	225
习题 7-3 .....	229
§ 7-4 二元函数的极值 .....	229
习题 7-4 .....	235
§ 7-5 二重积分 .....	236
习题 7-5 .....	244
复习题七.....	245
<b>第八章 矩阵.....</b>	<b>248</b>
§ 8-1 矩阵的概念 .....	248
习题 8-1 .....	250
§ 8-2 矩阵的运算 .....	251
习题 8-2 .....	263
§ 8-3 矩阵的初等变换 .....	265
习题 8-3 .....	273
§ 8-4 投入产出分析简介 .....	274
习题 8-4 .....	288
复习题八.....	289
<b>附录一 习题参考答案.....</b>	<b>293</b>
<b>附录二 简易积分表.....</b>	<b>327</b>

# 第一章 函 数

函数的概念是数学的一个非常重要的概念,本章主要介绍函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念和一些在现实生活中常见的经济函数。

## § 1-1 函数的概念

### 一、函数的定义

我们知道,在现实世界中,物质的运动、发展与变化是普遍的,在对特定的现象进行观察时,我们发现在变化过程中,有些量保持不变,这些量被称为常量;而有些量则在不断发生变化,这些量被称为变量。在变化过程中变量往往不是孤立地存在,而是在与某个或某些量有相互制约、相互联系的对应关系。例如,有 1 000 件某种商品,要以单价 25 元销售,在销售过程中,单价是常量,销售量和营业额是变量,而且营业额依赖于销售量,当销售量确定时,营业额也随之被确定;又如,某企业生产一种产品,当单位成本一定时,则生产这种产品的总成本取决于生产产品数量。在上述例子中,这种量与量之间的依赖关系,通常被称为函数关系。

定义 设  $D$  是一个实数集,如果对属于  $D$  的每一个数  $x$ ,按照某个对应法则  $f$ ,都有惟一确定的数值  $y$  和它对应,那么  $y$  就称为定义在数集  $D$  上的  $x$  的函数,记作  $y=f(x)$ 。习惯上, $x$  称为自变量, $y$  称为因变量,数集  $D$  称为函数  $y=f(x)$  的定义域;对于每一个  $x \in D$ ,按照对应法则  $f$  所得到的惟一的  $y$  值称为函数在点  $x$  处的函数值,全体函

数值所组成的集合  $M$  称为函数的值域。

不同的对应法则表示不同的函数。对应法则也常常用  $\varphi, h, g, F$  表示,那么函数也就可记作  $\varphi(x), h(x), g(x), F(x)$  等等。

例 1 某地区化肥第一年到第十年的消费方程为:

$$y=200+50x$$

其中  $y$  表示消费量(单位:万吨), $x$  表示时间序数(即第几年)。当  $x$  在  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  中任取一个数值时,按照  $y=200+50x$ , 总有唯一的确定值和它对应,因此, $y$  是  $x$  的函数,这个函数的定义域  $D=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , 对应法则  $y=200+50x$ 。

例 2 求函数  $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$  的定义域。

$$\text{解 } \begin{cases} 3-x > 0 \\ |x|-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$$\text{得 } 1 < x < 3 \text{ 或 } x < -1$$

$$\text{所以,定义域 } D = (-\infty, -1) \cup (1, 3)$$

例 3 已知某函数的对应法则为  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ , 求  $f(1+a)$ ,  $f(x^2)$  和  $f[f(x)]$ 。

$$\text{解 } f(1+a) = \frac{(1+a)}{1-(1+a)} = -\frac{1+a}{a}$$

$$f(x^2) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$\text{又解 } f[f(x)] = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

定义域和对应法则是构成函数的两个基本要素。因此,只有当

两个函数具有相同的定义域和对应法则时,才能称它们是相同的函数。

例 4 判断下列各组中的两个函数是否相同。

$$(1) f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \frac{4 - x^2}{2 + x};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = x;$$

$$(3) f(x) = \ln \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln(x-1).$$

解 (1)  $f(x)$  的定义域为:  $x \in \mathbf{R}$ ,

$g(x)$  的定义域为:  $x \in (-\infty, 2) \cup (-2, +\infty)$ 。

因为  $f(x)$ 、 $g(x)$  两个函数的定义域不同,

所以  $f(x)$  与  $g(x)$  是两个不同的函数,即  $f(x) \neq g(x)$ 。

(2) 虽然  $f(x)$ 、 $g(x)$  的定义域都为:  $x \in \mathbf{R}$ ,但由于  $f(x) = \sqrt{x^2}$   
 $= |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ,而  $g(x)$  对于任一  $x \in \mathbf{R}$ ,均为  $g(x) = x$ 。

因为  $f(x)$ 、 $g(x)$  的对应法则不同,

所以  $f(x) \neq g(x)$ 。

(3) 因为  $f(x)$ 、 $g(x)$  的定义域都为:  $x > 1$ ,且对应法则也相同,

所以  $f(x) = g(x)$ 。

## 二、函数的表示法

常用的函数表示法有:解析法(又称公式法)、表格法、图像法。

### (一) 解析法

用数学式子表示自变量与因变量之间对应法则的方法称为解析法。其数学式子称为函数表达式。

例 5  $y = \frac{1}{4 - x^2} + \sqrt{x + 3}$ 。

这是用解析式表达  $y$  与  $x$  之间的函数关系,它的定义域  $D = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

(二) 表格法

将自变量的一系列数值与对应的函数值列成表格,以此表示自变量与因变量的对应法则的方法称为表格法。

例 6 某商店 2005 年各月的零售额(单位:万元),如下表 1-1 所示。

表 1-1

月 份( $t$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售额( $S$ )	186	205	160	152	135	137	142	157	162	170	176	180

这是用表格表达了零售额  $S$  与月份  $t$  之间的函数关系,它的定义域  $D = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 。

(三) 图像法

用一条平面曲线表示自变量与因变量之间的函数关系,这样的平面曲线称为函数图形。这种表示方法称为图像法。

例 7 某河道的一个断面图形如图 1-1 所示,其深度  $y$  与从一岸边  $O$  到测量点的距离  $x$  之间的对应关系由图 1-1 中曲线所示:

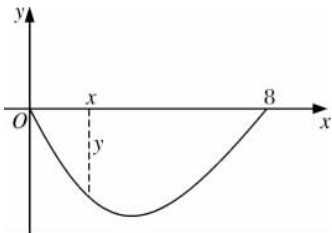


图 1-1

这里深度  $y$  与测距  $x$  的函数关系是用图形表示的,它的定义域  $D = [0, 8]$ 。

三、函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

定义 如果函数  $y=f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称,即  $a \in D$ ,必有  $-a \in D$ ,且对其中的任意  $x \in D$ ,

(1) 都有  $f(-x) = f(x)$ ,则称  $y=f(x)$  为偶函数;

(2) 都有  $f(-x) = -f(x)$ ,则称  $y=f(x)$  为奇函数。

偶函数  $y=f(x)$  的图形关于  $y$  轴对称,如函数  $y=x^2$  是偶函数,它的图形关于  $y$  轴对称;奇函数  $y=f(x)$  的图形关于原点对称,如函数  $y$

$=x^3$  是奇函数,它的图形关于原点对称。

## 2. 函数的单调性

定义 设函数  $y=f(x)$  在区间  $(a,b)$  内有定义,如果对区间  $(a,b)$  内的任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调递增的, 区间  $(a,b)$  为  $f(x)$  的单调递增区间; 若  $x_1 < x_2$ , 有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $(a,b)$  内是单调递减的, 区间  $(a,b)$  为  $f(x)$  的单调递减区间。例如,  $y=x^2$  在  $(-\infty, 0)$  内单调递减,  $(-\infty, 0)$  是  $y=x^2$  的单调递减区间;  $y=x^2$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增,  $(0, +\infty)$  是  $y=x^2$  的单调递增区间。

## 3. 函数的周期性

定义 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个非零常数  $l$ , 使得对于任一  $x \in D$ , 都有  $x+l \in D$ , 且  $f(x+l)=f(x)$  恒成立, 则称函数  $f(x)$  为周期函数,  $l$  称为  $f(x)$  的周期。显然, 周期函数  $f(x)$  的周期不是惟一的。

在周期函数  $f(x)$  的所有周期中, 如果存在一个最小的正周期  $T$ , 则称  $T$  为周期函数  $f(x)$  的最小正周期, 简称周期。通常我们所说的周期是指最小正周期, 如  $y=\sin x$ 、 $y=\cos x$  都是以  $2\pi$  为周期,  $y=\tan x$  是以  $\pi$  为周期。

## 4. 函数的有界性

定义 设函数  $y=f(x)$  在区间  $(a,b)$  内有定义 [ $(a,b)$  可以是整个定义域, 也可以是定义域的一部分], 如果存在一个正数  $M$ , 对于所有的  $x \in (a,b)$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $(a,b)$  内是有界的; 如果不存在这样的正数  $M$ , 则称  $f(x)$  在  $(a,b)$  内是无界的。例如,  $|\sin x| \leq 1$ , 所以  $y=\sin x$  在定义域内是有界的, 而对于  $y=\tan x$ , 不存在正数  $M$  使  $|\tan x| \leq M$  恒成立, 所以  $y=\tan x$  在定义域内是无界的。

# 习 题 1-1

1. 已知  $f(x)=x^3-a$ , 求  $f(0)$ 、 $f(a)$ 、 $f[f(a)]$ 。

2. 求下列函数的定义域。

$$(1) y = \frac{x}{x^2 - 3x - 4};$$

$$(2) y = \sqrt{3 - 2x};$$

$$(3) y = 1 - 3^{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{5}{x^2 - 4};$$

$$(5) y = \ln \frac{x}{3-x};$$

$$(6) y = \sqrt{|x| - 1}.$$

3. 判断下列各题中的两个函数是否相同？为什么？

$$(1) f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x}{x};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = |x|;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}, \quad g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2};$$

$$(4) f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x.$$

4. 将直径为  $d$  的圆木料锯成截面为内接矩形的木材, 列出矩形截面两条边长之间的函数关系。

## § 1-2 初等函数

### 一、反函数

**定义** 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $M$ 。如果对于每一个  $y \in M$  都有惟一确定的且满足  $y=f(x)$  的  $x \in D$  与之对应, 其对应法则记为  $f^{-1}$ , 那么这个定义在  $M$  上的函数  $x=f^{-1}(y)$  称为函数  $y=f(x)$  的反函数。

习惯上用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示因变量。因此, 我们将函数  $x=f^{-1}(y)$  改写为以  $x$  表示自变量、以  $y$  表示因变量的函数关系式  $y=$

$f^{-1}(x)$ ,这时我们说,函数  $y=f^{-1}(x)$  是函数  $y=f(x)$  的反函数。函数  $y=f(x)$  的图像与其反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称。

**例 1** 求函数  $y=\lg(x+1)$  的反函数。

**解** 由  $y=\lg(x+1)$ ,

再将式中的  $x$  与  $y$  对换,则求得函数  $y=\lg(x+1)$  的反函数为  $y=10^x-1$ 。

## 二、基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数:

1. 常数函数:  $y=C$ ;
2. 幂函数:  $y=x^a$  ( $a$  为任意实数);
3. 指数函数:  $y=a^x$  ( $a>0$  且  $a\neq 1$ );
4. 对数函数:  $y=\log_a x$  ( $a>0$  且  $a\neq 1$ );
5. 三角函数:  $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x,$   
 $y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ ;
6. 反三角函数:  $y=\arcsin x, y=\arccos x,$   
 $y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 。

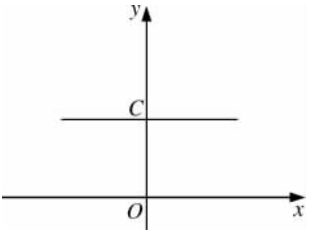
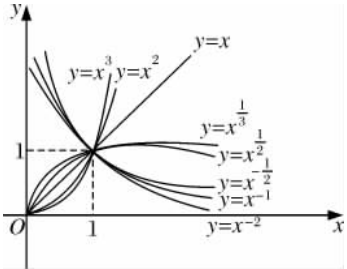
现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质列表如下(见表 2-1):

## 三、复合函数、初等函数

进行函数研究时,常把某些函数看作是由几个函数复合而成的。

例如,函数  $y=\sqrt{1-x^2}$  表示  $y$  是  $x$  的函数,它的定义域  $D=[-1,1]$ 。如果我们引进辅助变量  $u$ ,把这个函数的对应法则看作是:对于任一  $x\in[-1,1]$ ,通过函数  $u=1-x^2$  得到对应的  $u$  值;然后,对于这个  $u$  值,通过函数  $y=\sqrt{u}$  得到对应的  $y$  值。这样,我们可说函数  $y=\sqrt{1-x^2}$  是由函数  $y=\sqrt{u}$  和  $u=1-x^2$  复合而成,辅助变量  $u$  称为中间变量,像这类函数统称为复合函数。下面给出复合函数的定义:

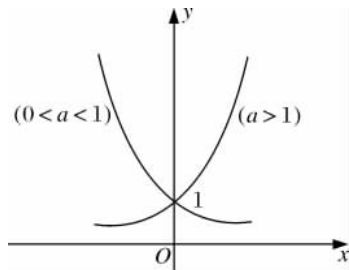
定义 设  $y$  是  $u$  的函数,  $y=f(u)$ ; 而  $u$  又是  $x$  的函数,  $u=\varphi(x)$ ,

名 称	表达式	定义域	图 形	特 性
常数函数	$y=C$	$(-\infty, +\infty)$		图像为平行于 $x$ 轴的一条直线。
幂函数	$y=x^{\alpha}$ ( $\alpha \neq 0$ )	随 $\alpha$ 而不同,但在 $(0, +\infty)$ 中都有定义。		经过点 $(1,1)$ 在第一象限内当 $\alpha > 0$ 时, $x^{\alpha}$ 为增函数; $\alpha < 0$ 时, $x^{\alpha}$ 为减函数。

指数函数

$$y = a^x$$
$$(a > 0, a \neq 1)$$

$(-\infty, +\infty)$



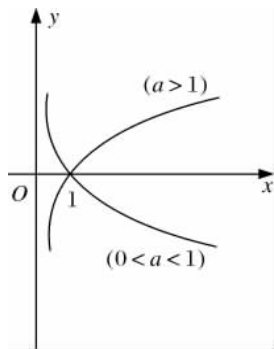
图像在  $x$  轴上方 (因  $a^x > 0$ ), 且都通过点  $(0, 1)$ 。

当  $0 < a < 1$  时,  $a^x$  是减函数; 当  $a > 1$  时,  $a^x$  是增函数。

对数函数

$$y = \log_a x$$
$$(a > 0, a \neq 1)$$

$(0, +\infty)$



图像在  $y$  轴右侧 (因  $0$  与负数都没有对数), 都通过点  $(1, 0)$ 。

当  $0 < a < 1$  时,  $\log_a x$  是减函数;

当  $a > 1$  时,  $\log_a x$  是增函数。

名称	表达式	定义域	图形	特性
三角函数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 $2\pi$ 为周期的奇函数 (图形关于原点对称)。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间, 即 $ \sin x  \leq 1$ 。
	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 $2\pi$ 为周期的偶函数 (图形关于 $y$ 轴对称)。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间, 即 $ \cos x  \leq 1$ 。
	$y = \tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )		是以 $\pi$ 为周期的奇函数, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数。