一流学校 一流老师 一流资源

三一丛书

高等数学

要点与解题

龚冬保 武忠祥 毛怀遂 邱双亮 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库　三一丛书

高　等　数　学

要点与解题

龚冬保　武忠祥
毛怀遂　邸双亮　编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书收集了700余道高等数学的典型题。题型既有传统的证明题、解析题，又有近年考试中常见的选择题、填空题，即非客观题和客观题。所选的每道题力求有较新颖、独特的解法，并且从分析题意入手，引导出解题的技巧，旨在启发读者学会求解高等数学各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法和揭示一些习题的背景，本书几乎对每道题都作了注释。

本书可作为大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学要点与解题/龚冬保等编著.—西安：西安交通大学出版社，2006.8

（西安交大教学资源文库."三一"丛书）

ISBN 7-5605-2221-1

Ⅰ.高...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064451号

书　　名	高等数学要点与解题
编　　著	龚冬保　武忠祥　毛怀遂　邸双亮
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西向阳印务有限公司
字　　数	431千字
开　　本	880 mm×1230 mm　1/32
印　　张	11.625
版　　次	2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-2221-1/O·235
定　　价	16.80元

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，我们组织出版了这套“三一”丛书，目的就是**提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果**，为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一，1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，**深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。**

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求，**以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结**，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的

总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排。本丛书既可单独使用，也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国，并祝您早日成为国家的栋梁之材！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：http://press.xjtu.edu.cn

http://www.xjtupress.com

理工医事业部信箱：jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

前　言

高等数学是一门重要的基础课程，要学好高等数学，必须要做一定数量的习题，而在做习题中，机械地“套公式”是一种最不可取的方法，其结果往往是陷入“题海”苦练，还未必能学好高等数学。

本书介绍的解题方法，是从分析题目的条件和结论间的关系入手，阐明解题思路，有技巧而又自然。大多数例题在解题过程中所用到的知识要点、解题方法、题与题间的联系等方面作了注释，不少题还给出了多种不同解法。

本书所例举的有些解题方法与技巧，在一般教材或参考书中并不多见。建议读者把本书的例题当习题，先自己做，不会时再看解答，看懂了推开书再自己做，并且要反复做，直至学会书中介绍的解题方法。希望读者能运用这些方法，去解教材中或其它参考书中的题目；最好尽量多想几种不同的解题方法反复练习。

做题不在多而在精。通过解题，熟悉和掌握知识的要领；通过解题，学会灵活运用所学知识解决问题的方法和技巧；通过解题，培养和训练数学的思维能力；这就是本书的宗旨。希望它能帮助读者学好高等数学这门课。

欢迎读者指出本书的讹误和不足之处，编者衷心感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编　者

2006.6

目　录

第 1 章　函数 极限 连续

1.1　函数及其性质

1-1　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为________.

解　依题意得 $\sin\varphi(x)=1-x^2$，所以

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

所以 $$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$$ 填 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$

1-2　函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为(　).

(A) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0$

(B) $x\in\mathbf{R}$，但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$

(D) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1$

解　由 $$x\neq 0,\ 1+\frac{1}{x}\neq 0,\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq 0$$

得 $$x\neq 0,-1,-\frac{1}{2}$$ 选 (C)

分母不能为零.

1-3　函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是(　).

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C) $[0,1]$　　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

此题可看作是求函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域，这样就把问题简化了.

解　因为　$1+x^2 \geqslant 2|x|$

所以　$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

选（B）

1-4　设$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=x-[x]$是(　).

（A）无界函数　（B）周期为1的周期函数

（C）单调函数　（D）偶函数

解　$y=x-[x]$的图像如图1.1所示.

选（B）

画草图是帮助解题的一种方法.

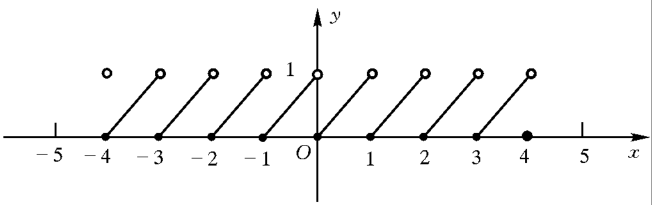

图 1.1

1-5　设$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，且它们可以构成复合函数$f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是(　).

（A）$f[f(x)]$　（B）$g[f(x)]$

（C）$f[g(x)]$　（D）$g[g(x)]$

选（A）

利用奇偶函数的性质可得.
$f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$

1-6　设$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$，则$f(-x)$等于(　).

（A）$\begin{cases} -e^{-x}, & x\leqslant 0 \\ -\cos x, & x>0 \end{cases}$　（B）$\begin{cases} e^{x}, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} -\cos x, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$　（D）$\begin{cases} \cos x, & x<0 \\ e^{x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$

选（D）

1-7　设$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leqslant 0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，

复合函数的概念是学习导数和

则 $f[g(x)]=(\quad)$.

(A) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解　由 $g(x)\leqslant 0$ 得 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)=-x\leqslant 0$.

所以　$x\geqslant 0$ 时　$f[g(x)]=1+x$

由　$g(x)>0$ 得　$x<0$ 时,$g(x)=x^2>0$

所以　$x<0$ 时　$f[g(x)]=x^2+2$　　选 (D)

积分的一个重要环节,一定要熟练掌握.本题要从复合函数 $f[g(x)]$ 的内层 $g(x)$ 开始讨论.

1-8　试求下列函数的定义域

1)　$f(x)=\lg(1-\lg x)$

2)　$f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解　1) 要使 $f(x)$ 有意义,x 应满足 $x>0$ 且 $1-\lg x>0$

即
$$0<x<10$$
故 $f(x)$ 的定义域为$(0,10)$.

2) 要使 $f(x)$ 有意义,x 应满足 $-1\leqslant\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$ 且 $[x]\neq 0$,

而
$$x-1<[x]\leqslant x$$

当 $x<0$ 时,　$0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$

当 $0\leqslant x<1$ 时,　$\dfrac{x}{[x]}$ 无意义

当 $x\geqslant 1$ 时,　$1\leqslant\dfrac{x}{[x]}$

最后一个不等式的等号仅当 $x\in\mathbf{N}$ 时成立,故 $f(x)$ 定义域为 $\{x\mid x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$.

对应法则和定义域是函数的两个基本要素.应当养成这样的习惯:遇到函数就要注意它的定义域.

1-9　设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域$(a>0)$.

解　由 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,得
$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases},\ \text{即}\ \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

故
$$a\leqslant x\leqslant 1-a$$

这些不等式由构成复合函数的

从而当 $a=1-a$ 即 $a=1/2$ 时，函数仅在 $x=1/2$ 一点有定义；

当 $0<a<1/2$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>1/2$ 时无解. 即定义域为空集.

原则得到.

1-10 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 为了求 $f(x-2)$，先求 $f(x)$，我们先给出求 $f(x)$ 的两种方法：

1) $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

2) 令 $x=t-2$，代入得

$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2$$

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$$

本题主要讨论对应法则，且以复合函数为主.

用配方法解.

变量代换法.

1-11 设

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0\\ -e^x, & x<0\end{cases}, \qquad \varphi(x)=\ln x$$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 1) 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0\\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1\end{cases}$$

从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

两个函数是否可以构成复合函数，要根据复合函数的法则分别考查这两个函数的定义域及值域.

复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

1-12 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},$$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

求：1) $\varphi[\varphi(x)]$； 2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$

$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

2) 因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |\psi(x)|\leqslant 1\\ 0, & |\psi(x)|>1\end{cases}$

而仅当 $|x|=1$ 时，$\psi(x)=1$

$|x|\neq 1$ 时，$1<\psi(x)\leqslant 2$

故 $$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

复合函数类似“代入”.但要注意定义域的变化.复合后最好写下复合函数的定义域.

1-13 求下列函数的反函数

1) $$y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$$

2) $$y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3^x, & x>2\end{cases}$$

解 1) 所给函数的定义域及值域分别是$[-\sqrt{2}/2,1]$，$[0,\sqrt{3\pi}]$.由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解得

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi)$$

故 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数为

$$y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi),\qquad x\in[0,\sqrt{3\pi}]$$

2) 当 $x<1$ 时，$y=x$，

故反函数为

$$y=x,\quad x\in(-\infty,1)$$

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3$，

故反函数为

注意反函数存在的条件.

注意定义域的范围.

利用几何图形看反函数及其定义域更为清楚，建议读者作出 $y=$

$$y=\sqrt[3]{x},\qquad x\in[1,8]$$

当 $x>2$ 时，$y=3^x$，

故反函数为

$$y=\log_3 x,\qquad x\in(9,+\infty)$$

综上所述，所求的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$$

f(x) 的图形.

1-14 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$

则 $$f(0)=a_0=1$$
$$f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1$$

比较原等式两边 x^8 的系数得 $a_8=2^8$.

故 $$a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256$$

把系数及一部分系数和视为函数在特殊点的值，比用二项式系数法好.

1-15 设 $f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)](n=1,2,\cdots)$. 试求 $f_n(x)$ 的解析表达式.

解 $$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}\qquad(n=2,3,4,\cdots)$$

先一步一步复合，从特殊中归纳出一般规律，再用数学归纳法证明.

1-16 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

证明函数是周

$$f(x+c)=-f(x)$$

所以对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

期函数的关键是要找到正常数 T. 这里 $T=2|c|$.

1-17 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的单调增函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 证明 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

证 因为 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，所以对任何 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_2>x_1$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),\quad g(x_1)\leqslant g(x_2),\quad h(x_1)\leqslant h(x_2)$$

又对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

所以 $\quad f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$

$\quad g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)]$

即 $\quad f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$

注意复合函数的单调性.

1.2 数列的极限

1-18 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ________.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

填 $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

先求根号下的和，再将分子有理化.

1-19 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=$ ________.

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\right.$$

本题利用的是拆项法.其目的是求出前 n 项的和.

$$\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\Big]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

填 $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$

1-20 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$ = ______.

解 1 因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

所以,原式 $=\frac{1}{2}$

解 2 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+n+k}-\frac{k}{n^2}\right)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$,

及 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+n+k}-\frac{k}{n^2}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+k)}{n^2(n^2+n+k)}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n}\to 0,\ \left(\frac{k(n+k)}{n^2+n+k}\leqslant 2\right)$$

填 $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$

解 1 是利用夹逼准则.

解 2 则是用无穷小分析法. $\frac{k}{n^2+n+k}$ 与 $\frac{k}{n^2}$ 是等价无穷小. 故想到用 $\frac{k}{n^2}$ 代替 $\frac{k}{n^2+n+k}$, 而证明它们差之和趋于 0.

1-21 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$,则下列断言正确的是( ).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

本题的关键是利用极限的运算法则.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}(x_n y_n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$

注：取 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$，知(A) 不正确.

取 $x_n = \frac{1-(-1)^n}{2}n, y_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}n$，知(B) 不正确.

取 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$，知(C) 不正确. 选 (D)

平时做选择题，应练习举例否定不正确选项的方法.

1-22 设 $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_n = \frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

连乘式首先要变形，约去公因子，化简后再求极限.

1-23 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

解
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2}$$

有理化分子也是求极限的好方法.

1-24 设 $x_n = \dfrac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解
$$x_n = \frac{2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}\right)} = \frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 10$$

分子、分母均是等比数列的部分和. 先利用求和公式求出各自的和，然后再求极限.

1-25 设 $x_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

这种分解法非常有用，它有利于求出有限和式的