高职高等数学系列教材

高等数学学习辅导

（第 二 版）

主　编　刘书田

编著者　刘书田　冯翠莲　侯明华

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导(第二版)/刘书田,冯翠莲,侯明华编著.—北京:北京大学出版社,2001.7

(高职高等数学系列教材)

ISBN 7-301-05074-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②冯… ③侯… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036042 号

书　　名:高等数学学习辅导(第二版)
著作责任者:刘书田　冯翠莲　侯明华　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05074-7/O·0510
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×960　16 开本　22.25 印张　488 千字
2001 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 2 版
2006 年 1 月第 1 次印刷(总第 4 次印刷)
印　　数:18101—21100 册
定　　价:24.00 元

本书是与北京高等教育精品教材《高职高等数学系列教材——高等数学》配套的辅导书

内　容　简　介

本书是全国高等职业、高等专科教育《高职高等数学系列教材》(该系列教材 2004 年被评为“北京高等教育精品教材”)之一《高等数学》的学习辅导书.本书是配合主教材《高等数学》(第二版)的学习辅导书,本书依照教材的九章内容即函数·极限·连续,导数与微分,中值定理·导数应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,无穷级数而编写,与第二版教材相辅相成,同步使用.新版辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、教材习题选解、自测题与参考解答四部分内容编写.教学要求指明学生应掌握和理解的知识点;内容提要是把重点内容和容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法,揭示出解题规律,并通过典型例题中的点评与说明,指出初学者易犯的错误,使学生加深对课堂上所讲内容的理解,以加强基础训练和提高学生的解题能力;教材习题选解是把主教材中学生做题感到困难的习题给出分析和解答;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力,书中给出自测题的参考解答以供读者参考.

新版辅导教材对解题指导重新进行了改写,加强了对基本概念的阐述和典型例题举例,强调解题思路和解题方法的归纳与总结,以使读者对所学知识达到融会贯通,举一反三,灵活运用之目的.

本书可作为高等职业、高等专科学生学习“高等数学”课的辅导教材或学习参考书,对自考学生和数学爱好者本书也是一本较好的自学用书.

高职教育高等数学系列教材
出版委员会

高职高等数学系列教材书目

高等数学（第二版）	刘书田等编著	定价 29.00 元
微积分（第二版）（经济类、管理类适用）	冯翠莲　编著	定价 19.00 元
线性代数（第二版）	胡显佑等编著	定价 16.00 元
概率统计（第二版）	高旅端等编著	定价 16.00 元
高等数学学习辅导（第二版）	刘书田等编著	定价 24.00 元
微积分学习辅导（第二版）（经济类、管理类适用）	冯翠莲　编著	定价 18.00 元
线性代数学习辅导（第二版）	胡显佑等编著	定价 17.00 元
概率统计学习辅导（第二版）	高旅端等编著	定价 15.00 元

高职高专高等数学系列教材（少学时）书目

新编经济数学基础（经济类、管理类适用）	冯翠莲　主编	定价 22.00 元
新编工科数学基础（工科类适用）（即将出版）	冯翠莲　主编	估价 28.00 元

第二版序言

为了满足迅速发展的我国高职、高专教育“高等数学”课程教学的需要，北京大学出版社组织有丰富高职教学经验的专家、教授编写了《高职高等数学系列教材》. 该系列教材包括《高等数学》、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》及其配套辅导教材. 该套教材于2001年出版，发行三年多来，受到广大读者的欢迎和好评. 该系列教材的修订版于2003年被北京市教委列为“北京市高等教育精品教材立项项目”，并在2004年6月修订后出版发行第二版. 第二版教材于2004年被北京市教委评为“北京高等教育精品教材”. 第二版教材主要是基于第一版教材出版三年多来编者授课于高职高等数学的教学实践及读者有关的建议，并融合当前高职教育数学课程建设的改革思路和教学理念，对第一版的内容进行整合、改写和调整. 为了使原辅导教材与精品教材更好地配套、同步使用，我们把辅导教材《高等数学学习辅导》、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》按第二版教材重新进行了修订，作为辅导教材的第二版出版发行.

新版辅导教材在第一版的基础上做了较大调整：与教材同步增删了有关内容；对第一版中的解题指导重新进行了改写，加强了对基本概念的阐述和典型例题举例，强调解题思路和解题方法的归纳与总结，以使读者对所学知识达到融会贯通，举一反三，灵活运用之目的；对教材所配置的习题，辅导教材以“教材习题选解”的形式对较难的题目给出了详细的分析和解答，并给予适当点评；对自测题做了精选，使其难易程度、覆盖内容与第二版教材更加接近. 上述调整措施将使得本套辅导教材能更好地发挥辅助学生学习之作用.

编　者

2005年2月于北京

前　　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部制定的高职、高专数学课程教学基本要求，为高职、高专工科类及经济类、管理类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书分为教材四个分册：《高等数学》(上、下册)、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》；配套辅导教材四个分册：《高等数学学习辅导》(上、下册)、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共8分册. 书中加“*”号的内容，对非工科类学生可不讲授.

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 本套系列教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣高职、高专数学课程教学基本要求，慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、物理意义和经济背景，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示，解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明，并给出解题方法的归纳与总结. 教材与辅导教材相辅相成，同步使用.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨. 教材每节后配有适量习题，书后附有习题答案和解法提示. 辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答，便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助，同行专家和教授提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2001年1月于北京

目　录

第一章　函数·极限·连续 …… (1)
一、教学要求 …… (1)
二、内容提要与解题指导 …… (1)
(一) 函数概念 …… (1)
(二) 确定分段函数的定义域和函数值 …… (3)
(三) 判定函数的奇偶性 …… (4)
(四) 求已知函数的反函数 …… (6)
(五) 初等函数 …… (8)
(六) 用图形的几何变换作图 …… (9)
(七) 极限概念 …… (14)
(八) 极限的运算法则 …… (18)
(九) 两个重要极限 …… (23)
(十) 无穷小的比较 …… (28)
(十一) 函数的连续性 …… (30)
(十二) 曲线渐近线的求法 …… (34)
三、教材习题选解 …… (35)
四、自测题与参考解答 …… (43)
(一) 自测题 …… (43)
(二) 自测题参考解答 …… (44)
第二章　导数与微分 …… (48)
一、教学要求 …… (48)
二、内容提要与解题指导 …… (48)
(一) 导数概念 …… (48)
(二) 导数公式与运算法则 …… (52)
(三) 高阶导数 …… (57)
(四) 分段函数求导数 …… (60)
(五) 隐函数的导数 …… (62)
*(六) 由参数方程所确定的函数的导数 …… (65)
(七) 曲线的切线与法线 …… (67)
(八) 微分及其应用 …… (70)

（九）边际概念、需求价格弹性 …………………………………………（73）
三、教材习题选解 …………………………………………………………（76）
四、自测题与参考解答………………………………………………………（83）
（一）自测题 ……………………………………………………………（83）
（二）自测题参考解答 ……………………………………………………（85）
第三章　中值定理·导数应用 ………………………………………………（88）
一、教学要求 ………………………………………………………………（88）
二、内容提要与解题指导 ……………………………………………………（88）
（一）微分中值定理 ………………………………………………………（88）
（二）用洛必达法则求未定式的极限 ………………………………………（93）
（三）判别函数的单调增减区间 ……………………………………………（97）
（四）求函数的极值 ………………………………………………………（99）
（五）曲线的凹向与拐点 …………………………………………………（101）
（六）函数作图 ……………………………………………………………（103）
（七）最大值与最小值及应用问题…………………………………………（105）
（八）曲线的曲率 …………………………………………………………（112）
三、教材习题选解 …………………………………………………………（114）
四、自测题与参考解答 ………………………………………………………（126）
（一）自测题 ……………………………………………………………（126）
（二）自测题参考解答 ……………………………………………………（127）
第四章　不定积分……………………………………………………………（131）
一、教学要求 ………………………………………………………………（131）
二、内容提要与解题指导 ……………………………………………………（131）
（一）不定积分概念 ………………………………………………………（131）
（二）第一换元积分法 ……………………………………………………（135）
（三）第二换元积分法 ……………………………………………………（145）
（四）分部积分法 …………………………………………………………（147）
三、教材习题选解 …………………………………………………………（152）
四、自测题及参考解答 ………………………………………………………（157）
（一）自测题 ……………………………………………………………（157）
（二）自测题参考解答 ……………………………………………………（158）
第五章　定积分及其应用……………………………………………………（161）
一、教学要求 ………………………………………………………………（161）
二、内容提要与解题指导 ……………………………………………………（161）
（一）定积分的概念与性质 …………………………………………………（161）

（二）变上限定积分的导数 …………………………………………………………（164）
（三）牛顿-莱布尼茨公式 …………………………………………………………（165）
（四）定积分的换元积分法 …………………………………………………………（167）
（五）定积分的分部积分法 …………………………………………………………（170）
（六）无限区间上的广义积分 ………………………………………………………（172）
*（七）无界函数的广义积分 …………………………………………………………（174）
（八）定积分的几何应用 ……………………………………………………………（175）
*（九）定积分的物理应用 ……………………………………………………………（181）
（十）积分学在经济中的应用 ………………………………………………………（183）
三、教材习题选解 ……………………………………………………………………（188）
四、自测题与参考解答 ………………………………………………………………（198）
（一）自测题 …………………………………………………………………………（198）
（二）自测题参考解答 ………………………………………………………………（199）
第六章 微分方程 ………………………………………………………………………（203）
一、教学要求 …………………………………………………………………………（203）
二、内容提要与解题指导 ……………………………………………………………（203）
（一）微分方程的基本概念 …………………………………………………………（203）
（二）一阶微分方程 …………………………………………………………………（204）
（三）二阶常系数线性微分方程 ……………………………………………………（210）
（四）微分方程应用问题 ……………………………………………………………（217）
三、教材习题选解 ……………………………………………………………………（222）
四、自测题与参考解答 ………………………………………………………………（232）
（一）自测题 …………………………………………………………………………（232）
（二）自测题参考解答 ………………………………………………………………（234）
第七章 向量代数与空间解析几何 ……………………………………………………（237）
一、教学要求 …………………………………………………………………………（237）
二、内容提要与解题指导 ……………………………………………………………（237）
（一）向量代数 ………………………………………………………………………（237）
（二）空间曲面 ………………………………………………………………………（244）
（三）平面 ……………………………………………………………………………（245）
（四）空间的曲线与直线 ……………………………………………………………（247）
三、教材习题选解 ……………………………………………………………………（250）
四、自测题与参考解答 ………………………………………………………………（252）
（一）自测题 …………………………………………………………………………（252）
（二）自测题参考解答 ………………………………………………………………（254）

第八章 多元函数微积分…………………………………………………………………………（257）
一、教学要求 ……………………………………………………………………………（257）
二、内容提要与解题指导 ………………………………………………………………（257）
（一）多元函数概念 …………………………………………………………………（257）
（二）偏导数与全微分 ………………………………………………………………（259）
（三）复合函数的微分法……………………………………………………………（264）
（四）隐函数的微分法 ………………………………………………………………（267）
（五）多元函数的极值 ………………………………………………………………（268）
（六）用最小二乘法建立直线型经验公式 …………………………………………（274）
（七）在直角坐标系下计算二重积分 ………………………………………………（276）
*（八）在极坐标系下计算二重积分…………………………………………………（282）
（九）二重积分的应用 ………………………………………………………………（286）
三、教材习题选解…………………………………………………………………………（289）
四、自测题与参考解答 …………………………………………………………………（304）
（一）自测题 …………………………………………………………………………（304）
（二）自测题参考解答 ………………………………………………………………（305）
第九章 无穷级数…………………………………………………………………………（308）
一、教学要求 ……………………………………………………………………………（308）
二、内容提要与解题指导 ………………………………………………………………（308）
（一）无穷级数概念及其性质 ………………………………………………………（308）
（二）正项级数的敛散性判别法 ……………………………………………………（311）
（三）任意项级数的敛散性判别法…………………………………………………（315）
（四）幂级数的收敛半径与收敛域…………………………………………………（319）
（五）函数展开成幂级数……………………………………………………………（322）
（六）求幂级数的和函数……………………………………………………………（326）
*（七）以 2π 为周期的函数的傅里叶级数 ………………………………………（327）
*（八）以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数 ………………………………………（332）
三、教材习题选解…………………………………………………………………………（334）
四、自测题与参考解答 …………………………………………………………………（342）
（一）自测题 …………………………………………………………………………（342）
（二）自测题参考解答 ………………………………………………………………（343）

第一章　函数·极限·连续

一、教学要求

1. 理解函数概念，掌握函数符号的正确运用，会求函数的定义域；了解分段函数概念.

2. 了解反函数概念，会求已知函数的反函数.

3. 掌握函数的奇偶性，会用定义判定函数的奇偶性；掌握函数单调性、有界性、周期性的定义及其图形特征.

4. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式及其基本性质.

5. 了解复合函数概念，知道初等函数的定义，熟练掌握将一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算与复合的形式.

6. 了解数列极限与函数极限概念.

7. 了解无穷小与无穷大的概念；会进行无穷小的比较.

8. 掌握极限的四则运算法则及两个重要极限.

9. 了解函数连续的概念；了解第一类、第二类间断点，会判断分段函数在分界点处的连续性.

10. 知道初等函数在其定义区间上是连续函数.

11. 知道闭区间上连续函数的最值定理、有界定理、介值定理和零点定理.

二、内容提要与解题指导

（一）函数概念

在函数的定义中有三个因素：定义域 D，对应法则 f 和值域 Z，其中前二者是要素.

函数 $y=f(x)$ 的图形通常是一条平面曲线，该曲线在 x 轴上的投影是函数的定义域 D，在 y 轴上的投影是函数的值域 Z（图 1-1）.

在理解函数定义时，应掌握以下三个问题：确定函数的定义域；判定两个函数是否相同；正确运用函数记号，会求函数值.

1. 求函数的定义域

函数的定义域即自变量的取值范围. 当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出，而又没给出自变量的取值范围时，要求函数的定义域，就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

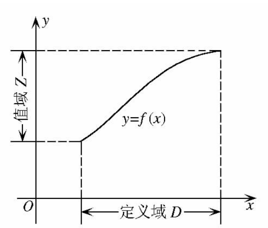

图　1-1

对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

2. 判定两个函数相同

由于对应法则 f 和定义域 D 是确定一个函数的要素，因此，当两个函数用不同的解析表达式表示时，而其定义域 D 和对应法则 f 都相同时，它们是同一函数.

3. 求函数值

当函数 $y=f(x),x\in D$ 用解析表达式表示时，若 $x_0\in D$，将表达式中的 x 代以 x_0，便得到该函数在自变量取 x_0 时的函数值，记作

$$f(x_0)\quad 或\quad y|_{x=x_0}\quad 或\quad y(x_0).$$

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域.

解　函数式有两项，其定义域中的 x 应使两项同时有意义.

对第一项 $\dfrac{1}{\lg(2-x)}$，应有

$$2-x>0\ 且\ 2-x\neq 1(因\ \lg 1=0),\quad 即\quad x<2\ 且\ x\neq 1.$$

对第二项 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$，反正弦函数符号下的式子，应有

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1,\ 即\ -1\leqslant x\leqslant 3.$$

综上，函数的定义域是 $[-1,1)\cup(1,2)$.

例 2　(1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$，求函数 $f(\ln x)$ 的定义域；

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，求 $f(x+2)$，$f(2^x)$ 的定义域.

解　(1) 已知条件可认为是，函数 $f(u)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$，即 $-\infty<u<0$.

求函数 $f(\ln x)$ 的定义域，就是确定该函数自变量 x 的取值范围. 对照已知条件，$f(\ln x)$ 中的 $\ln x$ 应是函数 $f(u)$ 中之 u，所以，应有 $-\infty<\ln x<0$.

根据对数函数的性质，当 $x\in(0,1)$ 时，有 $-\infty<\ln x<0$，因此，函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(0,1)$.

(2) 按上述分析，对函数 $f(x+2)$，依题设，应有 $0<x+2\leqslant 1$，即 $-2<x\leqslant -1$，函数 $f(x+2)$ 的定义域是 $(-2,-1]$.

同样，对函数 $f(2^x)$，依题设，有 $0<2^x\leqslant 1$，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，上式成立. 故函数的定义域是 $(-\infty,0]$.

例 3　设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$，则 $g(x)=(\quad)$.

(A) $\sin x$；　(B) $\cos x$；　(C) $\tan x$；　(D) $\cot x$.

解　首先用筛选法. 按题干所给条件，在 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$ 内必有 $g(x)\geqslant 0$. 而 $\tan x$ 在 $x=\pi/2$，$\cot x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义；又 $\cos x$ 在 $[\pi/2,\pi]$ 内非正，故应剔除(B)，(C)，(D).

事实上，在 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$ 内，确有 $\sin x\geqslant 0$. 故选(A).

例 4　下列各对函数中，相同的是(　　).

(A) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$；　(B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(C) $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；　　(D) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解　(A) 定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$；由于 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 是恒等式，即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $g(x)=1$，故它们的对应法则相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同的函数. 选(A).

(B) 两个函数的对应法则不同. 根据绝对值的性质，$\sqrt{x^2}=|x|$，即当 $x\geqslant0$ 时，$\sqrt{x^2}=x$；而当 $x<0$ 时，$\sqrt{x^2}=-x$.

(C) 定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(D) 两个函数的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，但对应法则不同. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$；而对 $g(x)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<0$.

例 5　设 $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+x^2}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解　$f(-2)$ 表示已知函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 时的函数值. 用 -2 代换表示式 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中的 x，便得到

$$f(-2)=\frac{1+2\cdot(-2)}{1+(-2)^2}=-\frac{3}{5}.$$

同样，用 0 代换 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中 x，得 $f(0)=\dfrac{1+2\cdot0}{1+0^2}=1$；用 a 代换 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中 x，得 $f(a)=\dfrac{1+2a}{1+a^2}$；以及 $f(x+1)=\dfrac{1+2(x+1)}{1+(x+1)^2}=\dfrac{3+2x}{2+2x+x^2}$；　$f(x^2)=\dfrac{1+2x^2}{1+(x^2)^2}=\dfrac{1+2x^2}{1+x^4}$.

例 6　设 $f(x)=\sin x$，$\psi(x)=\ln(2+x)$，求 $f(f(x))$，$f(\psi(x))$，$\psi(f(x))$.

解　将 $f(x)=\sin x$ 代以 $f(x)$ 表达式中的 x，得 $f(f(x))=\sin\sin x$.

将 $\psi(x)=\ln(2+x)$ 代以 $f(x)$ 表达式中的 x，得 $f(\psi(x))=\sin\ln(2+x)$.

将 $f(x)=\sin x$ 代以 $\psi(x)$ 表达式中的 x，得 $\psi(f(x))=\ln(2+\sin x)$.

例 7　求 $f(x)$，已知 (1) $f(2x-1)=x^2+1$；　(2) $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$.

解　(1) 这类题的一般解法是通过变量替换. 设 $t=2x-1$，则 $x=\dfrac{1}{2}(t+1)$，于是

$$f(2x-1)=f(t)=\left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^2+1=\frac{1}{4}(t+1)^2+1,$$

即

$$f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2+1.$$

(2) 设 $t=\sqrt[3]{x}-1$，则 $x=(t+1)^3$，于是

$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t+1$，　即　$f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

(二) 确定分段函数的定义域和函数值

由于分段函数是用两个或两个以上的解析表达式表示一个函数，且对于不同的解析表达式，自变量的取值范围又不相同，因此，分段函数的定义域是自变量 x 各个取值范围之总

和.求函数值 $f(x_0)$时,要根据 x_0 所在的取值范围,用 $f(x)$相应的表达式来求 $f(x_0)$.

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -2<x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x<3,\\ 2^x, & 3\leqslant x\leqslant 5.\end{cases}$

(1) 求函数 $f(x)$的定义域;　　(2) 求 $f(-1),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

解　这是分段函数,该函数用三个数学式子表示:当 $x\in(-2,1]$时,$f(x)=2x$;当 $x\in(1,3)$时,$f(x)=x^2$;当 $x\in[3,5]$时,$f(x)=2^x$.

(1) 由该分段函数的表示式知,自变量 x 的取值范围有三部分:$x\in(-2,1]$,$x\in(1,3)$和 $x\in[3,5]$,因此,函数的定义域是这三个部分之总和,即$(-2,5]$.

(2) 由于$-1\in(-2,1]$,$1\in(-2,1]$,应由区间$(-2,1]$相对应的表达式 $f(x)=2x$,求 $f(-1)$和 $f(1)$:

$$f(-1)=2x\big|_{x=-1}=2(-1)=-2,\quad f(1)=2x\big|_{x=1}=2\cdot 1=2.$$

由于 $2\in(1,3)$,应由相对应的表达式 $f(x)=x^2$,求 $f(2)$:

$$f(2)=x^2\big|_{x=2}=2^2=4.$$

由于 $3\in[3,5]$,$4\in[3,5]$,应由 $f(x)=2^x$,求 $f(3),f(4)$:

$$f(3)=2^x\big|_{x=3}=2^3=8,\quad f(4)=2^x\big|_{x=4}=2^4=16.$$

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x+3, & 2<x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

解　将 $f(x)$的表达式及其自变量 x 的取值范围中的 x 代换以 $x-1$,得

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2-2, & 1\leqslant x-1\leqslant 2,\\ 2(x-1)+3, & 2<x-1\leqslant 3,\end{cases}$$

即
$$f(x-1)=\begin{cases}x^2-2x-1, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 2x+1, & 3<x\leqslant 4.\end{cases}$$

(三) 判定函数的奇偶性

判定函数 $f(x)$奇偶性的方法.

(1) 根据函数奇偶性的定义:对给定的 $f(x)$,先计算 $f(-x)$,然后与 $f(x)$对照,若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$为奇函数;若上二式均不成立,则 $f(x)$为非奇非偶函数.

(2) 用奇偶函数的性质:奇函数与奇函数的和仍为奇函数;偶函数与偶函数的和仍为偶函数;奇函数与奇函数的乘积为偶函数;偶函数与偶函数的乘积为偶函数;奇函数与偶函数的乘积为奇函数.

(3) 用函数图形的对称性:奇函数的图形对称于坐标原点;偶函数的图形对称于 y 轴.

(4) 用奇偶函数的复合运算的性质:若 $f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则 $f(f(x))$,$f(\varphi(x))$,$\varphi(f(x))$均为偶函数,而 $\varphi(\varphi(x))$为奇函数.

例 1　确定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$；　(2) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}+2$.

解　(1) 已知函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 因

$$f(-x)=\log_a[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

所以，$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$为奇函数.

(2) 已知函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 因

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x),$$

可知 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$为偶函数.

(3) 已知函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 因

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2}+2=\frac{-\sin x}{1+x^2}+2,$$

显然，$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以，$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}+2$ 是非奇非偶函数.

说明　易看出 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$是奇函数. 奇函数加上一个任意常数后既不是奇函数，也不是偶函数. 而偶函数则不然，偶函数加上一个任意常数后仍是偶函数.

例 2　设 $f(x)=\cos(\sin x)$，$\varphi(x)=\sin(\cos x)$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $f(x)$是偶函数，$\varphi(x)$是奇函数；　(B) $f(x)$是奇函数，$\varphi(x)$是偶函数；

(C) $f(x)$和 $\varphi(x)$都是偶函数；　(D) $f(x)$和 $\varphi(x)$都是奇函数.

解　选(C). 因 $\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，根据奇偶函数复合运算性质知选(C).

例 3　判定函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<1,\\ x^3-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为$[-2,2]$，对任意的 $x\in[-2,2]$，由于

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^3+1, & -2\leqslant(-x)\leqslant -1,\\ -x, & -1<(-x)<1,\\ (-x)^3-1, & 1\leqslant(-x)\leqslant 2,\end{cases}\quad \text{即}\quad f(-x)=\begin{cases}-(x^3-1), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -x, & -1<x<1,\\ -(x^3+1), & -2\leqslant x\leqslant -1.\end{cases}$$

显然，$f(-x)=-f(x)$. 故 $f(x)$为奇函数.

例 4　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，试判定下列函数中偶函数是(　　).

(A) $[f(x)]^2$；　(B) $|f(x)|$；　(C) $\cos x\cdot f(x^2)$；　(D) $f(-x)$.

解　选(C). 因 $\cos x$ 是偶函数，且 $f((-x)^2)=f(x^2)$，故 $\cos x\cdot f(x^2)$是偶函数.

对任意函数 $f(x)$，不能断定$[f(x)]^2$，$|f(x)|$，$f(-x)$的奇偶性. 例如，$f(x)=a^x$，$x\in$

$(-\infty,+\infty)$，则$[f(x)]^2=(a^x)^2=a^{2x}$，$|f(x)|=|a^x|=a^x$，$f(-x)=a^{-x}$既不是偶函数，也不是奇函数.

例 5 设函数 $f(x)$在区间$(-a,a)$上有定义，证明：

(1) $f(x)+f(-x)$是偶函数； (2) $f(x)-f(-x)$是奇函数.

证明 (1) 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$，因

$$F(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(-x)+f(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$是偶函数.

(2) 设 $G(x)=f(x)-f(-x)$，因

$$G(-x)=f(-x)-f(-(-x))=-[f(x)-f(-x)]=-G(x),$$

所以 $G(x)$是奇函数.

说明 由上例知，对任意一个函数 $f(x)$，若在以原点为对称的区间上有定义，它可写成一个偶函数与一个奇函数的和. 即

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

（四）求已知函数的反函数

1. 求函数 $y=f(x)$的反函数的程序

首先，利用加法与减法、乘法与除法、乘方与开方的互逆运算，以及指数式与对数式、三角函数与反三角函数的互化关系，由已知关系式 $y=f(x)$解出 x，得到关系式 $x=f^{-1}(y)$；

其次，将关系式 $x=f^{-1}(y)$中的字符 x 与 y 互换得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

2. 求函数的值域

求函数的值域有多种方法，这里只介绍两种方法：

(1) 观察法. 当函数的解析表达式较为简单时，可直接观察，或先将函数式恒等变形后再观察，就可得出函数值的取值范围.

(2) 反函数法. 函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域就是 $y=f(x)$的值域.

例 1 求下列函数的反函数：

(1) $y=3^{x-2}$； (2) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$.

解 指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $\log_a x$ 互为反函数.

(1) 在已知关系式的两端取以 3 为底的对数，得

$$\log_3 y=(x-2)\log_3 3 \quad (\log_3 3=1), \quad 即 \quad x=2+\log_3 y.$$

按习惯写法，所求的反函数是

$$y=2+\log_3 x.$$

(2) 为由已知关系式解出 x，先将 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$写成指数式

$$a^y=x+\sqrt{x^2-1}.$$

为去掉根式，先移项，并两边平方，即

$$a^y-x=\sqrt{x^2-1}, \quad a^{2y}-2xa^y+x^2=x^2-1.$$

解出 x,得 $x=\dfrac{a^{2y}+1}{2a^y}$ 或 $x=\dfrac{a^y+a^{-y}}{2}$. 按习惯写法,所求的反函数为 $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

例 2　求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解　因为$\dfrac{1}{y}=\dfrac{2^x+1}{2^x}=1+\dfrac{1}{2^x}$,所以 $\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{y}-1=\dfrac{1-y}{y}$, $2^x=\dfrac{y}{1-y}$, 两端取以 2 为底的对数得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$. 于是所求的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}x/2, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解　求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段相对应函数表达式的反函数的表达式及其自变量的取值范围即可.

由 $y=\dfrac{x}{2}$, $-2<x<1$,得 $x=2y$, $-1<y<\dfrac{1}{2}$;

由 $y=x^2$, $1\leqslant x\leqslant 2$,得 $x=\sqrt{y}$, $1\leqslant y\leqslant 4$;

由 $y=2^x$, $2<x\leqslant 4$,得 $x=\log_2 y$, $4<y\leqslant 16$.

将以上所得各式字母 x 与 y 互换,得所求的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<1/2,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ \log_2 x, & 4<x\leqslant 16.\end{cases}$$

例 4　设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$,求 $f^{-1}(3)$.

分析　由于 $x=f^{-1}(f(x))$. 由此式知,当 $f(x)=3$ 时所对应的 x 即为所求.

解　将 3 代入已知式 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$的左端,所求 x 的值即为 $f^{-1}(3)$. 于是

$$3=\frac{4x}{x-1}\quad \text{得}\quad x=-3,\ \text{即}\quad f^{-1}(3)=-3.$$

例 5　已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$,求 $f(x)$.

解　先求 $f^{-1}(x)$,再求 $f(x)$. 设 $u=\log_a x$,则 $x=a^u$,于是

$$f^{-1}(u)=a^{2u}+1,\quad f^{-1}(x)=a^{2x}+1.$$

设 $y=a^{2x}+1$,求其反函数,得 $x=\dfrac{1}{2}\log_a(y-1)$, 即 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log_a(x-1)$.

例 6　求下列函数的值域:

(1) $y=\sqrt{x^2+4}$;　　(2) $y=\sqrt{x-x^2}$.

解　(1) 由于 y 是算术根,首先知 y 非负;又因 $x^2\geqslant 0$,所以 $x^2+4\geqslant 4$,即 $\sqrt{x^2+4}\geqslant 2$,故所求函数的值域是$[2,+\infty)$.

(2) 由 $y=\sqrt{x-x^2}$,得 $y^2=x-x^2$,由此有