新锐丛书

21 世纪高职高专规划教材

高 等 数 学

（下）

主编　陈誌敏　胡成龙

主审　吴　翊

復旦大學出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部高等职业教育数学课程的基本要求与课程改革精神编写而成的. 全书共分上、下两册，内容包括：一元函数微分学及其应用、一元函数积分学、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、线性代数、概率统计、数学实验.

本书的特色在于：一、保持传统高等数学的知识点；二、增加 Mathematica 软件操作内容，且每个章节内容中各含一节数学实验；三、采用模块化设计，补充了线性代数和概率统计，以便于不同专业选用；四、每章后附有数学家简介；五、习题分两个部分，(A)为基础题，(B)为提高题.

本书内容充实，体系新颖. 特别是增添的“数学实验”，强调理论与实际相结合，这些都十分有利于高职高专类学生对基础知识的学习和理解，有利于培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力.

本书可供高等职业技术学院、高等专科学校相关专业的师生使用，同时也可作为学习数学软件 Mathematica 的入门教材.

序

当前，我国正处于新型工业化时期，对人才的需求呈多元化、多层次的态势，这为高职高专学校的人才培养带来了新的契机．经济与社会的发展要求高职高专毕业生具有基础理论知识适度、技术应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点，因此，在培养优秀理论型、研究型人才的同时，对应用型技术人才的培养就成为高职高专教育的首要目标．瞄准这个目标办好高职高专，既能满足人才市场的需要，又能促进高职高专学校自身的蓬勃发展．

高等数学是高职高专的一门主要的基础课程，出版一套适合高职高专教学需要的高等数学教材，无疑是有着重大意义的事情．值得庆幸的是，现在呈现在读者面前的这套《高等数学》正是这样一套教材．

这套教材与其他教材相比，具有以下几点明显的优势和特色：

1．科学性

这套教材整个体系保持传统高等数学的严谨，涵盖所有必需的知识点．内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握．

2．先进性

这套教材在遵循教育部《高职高专教育基础课程基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》精神的前提下，充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科新思想、新趋势的材料，增加了"数学实验"和"数学家简介"等部分．特别是"数学实验"部分，不仅充实了教材内容，而且有助于提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力．

3．实用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具．这套教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排以及例题、习题的选配等方面，都注重从教学的实际要求出发，遵循教学活动自身的规律性，从而有利于师生的教与学．

总之，这套教材编出了新意和特色．相信这套教材在数学教学和教学改革中一定能发挥巨大的作用，同时也希望它在大家的关爱中不断地得到完善．

侯振挺

2005 年 11 月

前　　言

高职高专教育的根本任务是培养生产、建设和管理第一线的技术应用型人才. 为发挥高等数学在21世纪培养技术应用型人才中的作用，培养和提高学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力，根据教育部高等职业教育数学课程的基本要求与课程改革精神，我们组织了一批富有多年教学经验的教师编写了本套教材. 在内容选择、结构体系上力图具有适应21世纪社会和时代发展需要的时代特征，具有适应我国社会主义建设对技术应用型人才培养要求的职业教育特色，能够反映现代教育思想观念、人才培养模式和课程结构改革的丰硕成果. 全套教材共分上、下两册，内容包括：一元函数微分学及其应用、一元函数积分学、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、线性代数、概率统计、数学实验. 计划课时150学时，选修部分另加学时.

本套书的特色在于：

一、保持传统高等数学的知识点. 其基本内容是根据高职院校《高等数学课程教学要求》的纲目来编写的，同时紧扣高职高专的培养目标，选择适当的教学定位，借助数表和图像，将抽象的数学知识生动直观地表现出来，对高等数学基本内容的讲解做到了既结构严谨，又通俗易懂.

二、数学软件Mathematica的诞生，被视为是一次重大的智力和实践的革命，因此探索一种以计算机为辅助教学工具展开高等数学教学的全新教学模式已成为一种新潮. 教材在第一章增加了Mathematica软件操作内容，并在每个章节内容中各含一节数学实验(不定积分与定积分合为一节)，以提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力.

三、教材采用模块化设计，补充了线性代数和概率统计，以便于不同专业选用.

四、为了扩大学生的视野，使学生了解高等数学创立发展背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后附有数学家简介，对数学创立发展过程中做出过伟大贡献的著名数学家作了介绍.

五、针对高职高专学生的特点，为使学生更好地掌握所学知识，提高应用能力，习题分成两个部分，(A)为基础题，(B)为提高题.

本书内容充实，体系新颖．特别是增添的“数学实验”，强调理论与实际相结合，这些都十分有利于高职高专类学生对基础知识的学习和理解，有利于培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力．

本书可供高等职业技术学院、高等专科学校相关专业的师生使用，同时也可作为学习数学软件 Mathematica 的入门教材．

本书由陈誌敏、胡成龙主编．参加编写的人员有：陈誌敏、胡成龙、周振良、肖家平、陈春秀、魏婉梅、刘裕华、白淑珍，同时倪曼、刘小宁提出了许多宝贵意见，国防科技大学吴翊教授认真仔细地审查了此书．在此向他们表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请读者指正．

编　者

2006 年 1 月

目　　录

第八章　微分方程

高等数学研究的对象是函数,而函数关系一般是不能直接由实际问题得到的.但根据实际问题的特性,有时可以得到表示未知函数及其导数或微分与自变量之间的关系式.这种关系式就是所谓的微分方程.微分方程揭示了实际问题的客观规律性,是一种很重要的数学模型.

本章重点研究常见的微分方程的解法,并探讨其在实际问题中应用的思想方法.

第一节　微分方程的基本概念与分离变量法

一、微分方程的基本概念

我们学过代数方程——含有未知元的条件等式.在实际问题中,经常会碰到含有未知函数的导数或微分的方程,这类方程就称为微分方程.如

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g,\quad y'+\mathrm{e}^y=x^2,\quad x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y=0,\quad \text{等等}.$$

微分方程中所含有的未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶.

当微分方程中所含有的未知函数及其各阶导数全是一次幂时,微分方程就称为线性微分方程.

在线性微分方程中,若未知函数及其各阶导数的系数全是常数,则称这样的微分方程为常系数线性微分方程.如

$$2y''-y'+3y=\cos x$$

为二阶常系数线性微分方程.

使微分方程成为恒等式的函数称为该微分方程的解.如果微分方程的解含有任意常数,且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同,则称其为微分方程的

通解. 不含有任意常数的解称为微分方程的特解.

显然,函数 $y=x^2+C$ 是方程 $y'=2x$ 的通解. 而 $y=x^2+1$ 是它的一个特解.

什么是独立的任意常数?函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+3C_2\mathrm{e}^x$ 显然是方程 $y''-3y'+2y=0$ 的解. 这时的 C_1,C_2 就不是两个独立的任意常数,因为此时该函数可表示为

$$y=(C_1+3C_2)\mathrm{e}^x.$$

这种可以合并的任意常数只能算是一个独立的任意常数.

定义 1 设函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是定义在区间 (a,b) 内的函数,如果存在两个不全为零的数 k_1,k_2 使得 $\forall x\in(a,b)$,恒有

$$k_1y_1+k_2y_2=0$$

成立,则称 y_1,y_2 在区间 (a,b) 内线性相关,否则称为线性无关.

由此可见 y_1,y_2 在区间 (a,b) 内线性相关的充要条件是 $\frac{y_1}{y_2}$ 在区间 (a,b) 内恒为常数. 否则 y_1,y_2 线性无关.

例如 e^x 与 e^{2x} 线性无关,e^x 与 $3\mathrm{e}^x$ 线性相关.

于是,当 y_1 与 y_2 线性无关时,函数 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 中含有两个独立的任意常数 C_1 和 C_2.

通常,用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定其通解中任意常数的条件,称为初始条件. 求微分方程满足初始条件的特解问题,称为初值问题.

求解初值问题,通常是先求通解,再由初始条件确定通解中的任意常数从而求得特解.

例 1 一质量为 m 的物体,从高度为 y_0 的某处以初速度 v_0 自由下落,求下落过程中高度 y 与时间 t 的函数关系.

解 (图 8-1-1)建立坐标系. 设时刻 t 物体的位置为 $y(t)$,根据题意有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g,\quad y\Big|_{t=0}=y_0,\quad y'\Big|_{t=0}=v_0.$$

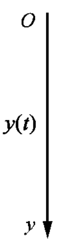

图 8-1-1

两次积分后,得方程的通解

$$y=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$

将 $t=0,y=y_0$ 代入上式得 $C_2=y_0$. 将 $t=0,y'=v_0$ 代入 $y'=gt+C_1$,得 $C_1=v_0$. 故下落过程中高度 y 与时间 t 的函数关系为

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0.$$

二、分离变量法

定义 2　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的方程,称为可分离变量方程.

其求解步骤为:

(1) 分离变量　$\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x.$

(2) 两边积分　$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$

(3) 积得通解　$G(y)=F(x)+C,$

其中 $G(x)$,$F(x)$ 分别是 $\dfrac{1}{g(y)}$,$f(x)$ 的一个原函数.

这种求解过程,我们称为分离变量法.

例 2　求 $y'+xy=0$ 的通解.

解　方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-xy,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-x\mathrm{d}x\quad(y\neq0),$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int x\mathrm{d}x,$$

求积分得

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

所以

$$|y|=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\quad(C=\pm\mathrm{e}^{C_1}),$$

所以方程的通解为　$y=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$　(C 为任意常数).

【思考题】

C 可否为零?

例 3　设降落伞从跳伞塔下落,所受空气阻力与速度成正比,降落伞离开塔顶($t=0$)时的速度为零. 求降落伞下落速度与时间 t 的函数关系.

解　(图 8-1-2)设降落伞下落速度为 $v(t)$,此时降落伞所受到的空气阻力为 $-kv$(k 为常数,负号表示阻力与运动方向相反). 同时,降落伞下落还受重力 mg 作用,故由牛顿第二定律及初始条件 $v\Big|_{t=0}=0$,得到初值问题

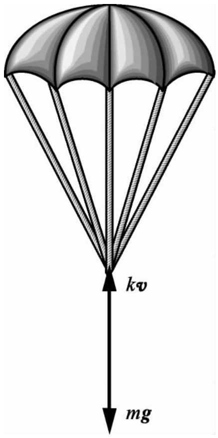

图 8-1-2

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv, \\ v\Big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

对 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$ 分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m},$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m},$$

可得 $$-\frac{1}{k}\ln|mg-kv|=\frac{t}{m}+C_1,$$

即 $$v=\frac{mg}{k}-C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\quad\left(C=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kC_1}\right),$$

由 $v\Big|_{t=0}=0$ 得 $$C=\frac{mg}{k},$$

于是所求特解为 $$v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$$

【思考题】

① 什么是微分方程?它与代数方程有何不同?什么是微分方程的阶?

② 什么是微分方程的通解,特解?通解和特解的几何意义是什么?

习题 8-1

(A)

1. 用分离变量法求解下列方程:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2y^2$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $xy'-y\ln y=0$; (4) $y'+y^{-1}\mathrm{e}^{y^2+3x}=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$; (6) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$.

2. 求解下列初值问题:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x+x^2)y, y(0)=\mathrm{e}$;

(2) $(\sqrt{1+x^2})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy^3, y\Big|_{x=0}=1$;

(3) $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0, y\Big|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$.

3. **一曲线过点**(1,0)**,且曲线上任意点**(x,y)**处的切线斜率等于该点横坐标的平方,求曲线方程.**

4. **曲线在点** $M(x,y)$**处的切线斜率等于该点横坐标与纵坐标的乘积,写出曲线所满足的微分方程.**

(**B**)

5. **放射性元素的质量随着时间的增加而逐渐减小,这种现象称为衰变. 镭的衰变有如下规律:其衰变速度与现存量** m **成正比. 已知** $t=0$ **时,镭的质量为** m_0**,求在衰变过程中镭的质量随时间变化的规律.**

6. **用微分方程表示一个物理命题:某种气体的气压** p **对于温度** T **的变化率与气压成正比,与温度的平方成反比.**

第二节　一阶线性微分方程

定义　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{8-2-1}$$

的方程,称为一阶线性微分方程,其中 $P(x)$**,**$Q(x)$**为已知函数.**

当 $Q(x)=0$ **时,**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{8-2-2}$$

称为齐次线性微分方程. 而当 $Q(x)\neq 0$ **时,式**(8-2-1)**称为非齐次线性微分方程.**

一、一阶齐次线性微分方程的求解

我们先求齐次线性方程(8-2-2)**的解. 将式**(8-2-2)**分离变量,得**

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\ln|y|=\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{8-2-3}$$

这就是(8-2-2)**的通解.**

例 1 求方程$(xy-2y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$的通解.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x-2)y=0,$$

这是一阶线性齐次方程,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=(2-x)\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int(2-x)\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=(2x-\frac{x^2}{2})+\ln|C|,$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}}.$$

二、一阶非齐次线性方程的解法

一阶齐次线性方程(8-2-2)的通解

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{8-2-4}$$

中的 C 为常数时,它显然不是方程(8-2-1)的解,这是因为式(8-2-1)的右边是 x 的函数 $Q(x)$. 但是,可设想将常数 C 换成待定函数 $C(x)$,则其可能成为方程(8-2-1)的解.

令 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 为非齐次线性方程(8-2-1)的解,并将其代入式(8-2-1)得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

将其代入 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 得(8-2-1)式的通解为

$$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{8-2-5}$$

式(8－2－4)称为一阶非齐次线性方程(8－2－1)的通解公式.

上述求解方法称为常数变易法. 用常数变易法求一阶非齐次线性方程的通解的步骤为：

(1) 先求出非齐次线性方程所对应的齐次方程的通解.

(2) 将所求出的齐次方程的通解中的任意常数 C 改为待定函数 $C(x)$，设出非齐次线性方程的解.

(3) 将所设解代入非齐次线性方程，解出 $C(x)$，并写出非齐次线性方程的通解.

例 2　求方程 $y'=\dfrac{y+x\ln x}{x}$ 的通解.

解　原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=\ln x, \tag{1}$$

为 $P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\ln x$ 的一阶非齐次线性方程.

方法一　直接用公式(8－2－4)

$$\begin{aligned} y &= \left[\int \ln x\, \mathrm{e}^{\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x} \\ &= \left[\int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)+C\right]x \\ &= \frac{x}{2}(\ln x)^2+Cx. \end{aligned}$$

方法二　首先对方程(1)所对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=0 \tag{2}$$

求解，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\ln y=\ln x+\ln C,$$

即

$$\ln y=\ln Cx.$$

所以齐次方程(2)的通解为

$$y=Cx.$$

于是，可令 $y=C(x)x$ 为方程(1)的通解，并代入方程(1). 得

$$xC'(x)=\ln x.$$