高等数学习题分析

上海交通大学高等数学教研室　编

上海科学普及出版社

目　　录

第一章　函　　数

1(1.1)　证明下列不等式,其中 n 为自然数:

(1) 若 $r>1$, 则 $r^n>1+n(r-1)$, $n>1$;

(2) 若 $r>1$, 则当 $n\geqslant3$ 时, $r^n>\frac{n^2}{4}(r-1)^2$;

(3) $\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$;

(4) $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(5) 当 $n>1$ 时, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$;

(6) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant1+a_1+a_2+\cdots+a_n$ (其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是同符号且大于 -1 的数);

(7) $2^{n-1}\geqslant n$ 与 $2^{n-1}\geqslant2(n-1)$.

证　(1) 方法一: $r>1$,

$$r^n=[1+(r-1)]^n=1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(r-1)^2+\cdots$$
$$+(r-1)^n>1+n(r-1)\quad(\text{当 } n>1).$$

方法二: $r^n-1=(r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r+1)$
$$>(r-1)(1+1+\cdots+1)=n(r-1).$$

(2) $$r^n=[1+(r-1)]^n=1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(r-1)^2$$
$$+\cdots+(r-1)^n>\frac{n(n-1)}{2}(r-1)^2>\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}(r-1)^2$$
$$(r>1,\ n\geqslant3).$$

(3) 由上述不等式(2), 令 $r=\sqrt[n]{n}$, 则

$$(\sqrt[n]{n})^n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,\ \text{即 } n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

故得 $$\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(4) 利用不等式：$\frac{m}{m+1}<\frac{m+1}{m+2}$ 得
$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}.$$
对角线相乘得
$$\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2<\frac{1}{2n+1},$$
故 $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

又由于 $\frac{m}{m+1}>\frac{m-1}{m}$，故
$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)(2n)}>\frac{1}{2}$$
$$\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$$
$$=\left(\frac{2n}{2n}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$$
$$=\frac{2\times4\times\cdots\times(2n-2)(2n)}{3\times5\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{1}{4n},$$
由此得 $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(5) 因 $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，

故 $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

(6) $n=1$，$1+a_1=1+a_1$，命题成立。

若 $n=k$ 命题成立，即
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant1+a_1+a_2+\cdots+a_k,$$
则 $n=k+1$ 时，有
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$$
$$\geqslant(1+a_1+a_2+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})$$

$=1+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}$;

因 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 同号，故 $(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}\geqslant 0$，于是 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$，得证。

(7) i) $n=1$, $2^{1-1}=1$, 命题成立；设 $n=k$, $2^{k-1}\geqslant k$, 则 $n=k+1$, 有

$$2^{k+1-1}=2\times 2^{k-1}\geqslant 2k=k+k\geqslant k+1,$$

所以 $2^{n-1}\geqslant n$。

ii) $n=1$, 左边 $=2^{1-1}=1$, 右边 $=2(1-1)=0$, 命题成立。设 $n=k$, $2^{k-1}\geqslant 2(k-1)$ 成立，则 $n=k+1$, 有

$$\begin{aligned}2^{k+1-1}&=2\times 2^{k-1}\geqslant 2\times 2(k-1)=2(2k-2)=2(k+k-2)\\&=2(k+1-1+k-2)\geqslant 2(k+1-1)\end{aligned}$$

(当 $k=2$ 时等式成立)，所以

$$2^{n-1}\geqslant 2(n-1).$$

2(1.2) 证明下列等式：

(1) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;

(2) $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$;

(3) $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$;

(4) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$.

证 (1) 当 $k=1$, 左边 $=\sin x$, 右边 $=\dfrac{\sin x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$,

等式成立。假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

则 $n=k+1$ 时，有

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx+\sin(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\Big[\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}$$

$$+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\Big[\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}$$

$$+\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{k}{2}x\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\Big[\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k+2}{2}x\Big].$$

得证。

(2) $n=1$, $\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\cos x$;

$$n=2,\ \frac{\sin 4x}{2\sin x}=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{2\sin x}=2\cos x\cos 2x$$

$$=\cos x+\cos 3x.$$

设 $n=k$ 时，$\frac{\sin 2kx}{2\sin x}=\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x$，则当 $n=k+1$，有

$$\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}=\frac{\sin 2kx\cos 2x+\cos 2kx\sin 2x}{2\sin x}$$

$$=[\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x]\cos 2x$$

$$+\cos x\cos 2kx$$

$$=\frac{1}{2}[\cos x+\cos 3x+\cos x+\cos 5x+\cos 3x+\cos 7x+\cdots$$
$$+\cos(2k-3)x+\cos(2k+1)x+\cos(2k-1)x$$
$$+\cos(2k+1)x]=\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k+1)x.$$

(3) $$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}$$
$$=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^3}\sin\frac{x}{2^3}=\cdots$$
$$=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以 $$\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

(4) 当 $n=1$, 左边 $=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$，右边 $=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 假设 $n=k$, 等式成立, 即

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1},$$ 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}.$$

由于 $$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}\right]$$
$$=\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}}{1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)^2}}=\frac{k+1}{k+2},$$

因此 $$\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}=\operatorname{arctg}\frac{k+1}{k+2},$$

得证.

3(1.5) 设 $F(x)=\lg(x+1)$，证明
$$F(y^2-2)-F(y-2)=F(y).$$

证 $F(y^2-2)-F(y-2)=\lg(y^2-1)-\lg(y-1)$

$$=\lg\frac{y^2-1}{y-1}=\lg(y+1)=F(y).$$

4(1.6) 设 $f(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$，求 $f(y)+f(-y)$，并证明 $f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2$.

解 $f(y)+f(-y)=\dfrac{ae^y+be^{-y}}{a+b}+\dfrac{ae^{-y}+be^y}{a+b}$

$$[f(x)]^2-[f(-x)]^2=\left(\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}\right)^2-\left(\frac{ae^{-x}+be^x}{a+b}\right)^2$$

$$=\frac{ae^{2x}+be^{-2x}}{a+b}-\frac{ae^{-2x}+be^{2x}}{a+b}=f(2x)-f(-2x).$$

5(1.9) 若已知函数 $f(x)$ 定义在区间$[-5,5]$上，试求方程 $f(x)=f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$所有的根，其中 $f(x)=x^2-x+3$.

解 $x^2-x+3=\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)^2-\dfrac{x+8}{x-1}+3,$

$$x^4-3x^3+3x^2-10x-72=0.$$

经检验，4 与 -2 是此方程的二个有理根，故有

$$(x-4)(x+2)(x^2-x+9)=0,$$

而方程 $x^2-x+9=0$ 无实根，故方程 $f(x)=f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$在$[-5,5]$内的根为 4 与 -2.

6(1.10) 设 $f(x)$具有性质：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则必有 $f(0)=0$，$pf(x)=f(px)$（p 为任意正整数）.

证 由 $f(0+y)=f(0)+f(y)$ 得 $f(0)=0$. 用归纳法证 $pf(x)=f(px)$. 当 $p=1$ 时，显然成立.

当 $p=2$ 时，$f(x+x)=2f(x)$，$2f(x)=f(2x)$.

假设 $p=k$ 时，$kf(x)=f(kx)$成立，则当 $p=k+1$ 时，

$$f[(k+1)x]=f(kx+x)=f(kx)+f(x)$$
$$=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x).$$

成立．得证．

7(1.13)　下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 不同。因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$。

(2) 不同。因 $f(x)$ 的定义域为 $(2,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 1]\cup(2,\ +\infty)$。

(3) 相同。

8(1.14)　求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-2x$;

(4) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$; (5)* $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$;

(6)* $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$; (7) $y=\sin x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

解　(1) $x=1\pm\sqrt{1+y}$,
当 $x\geqslant 1$ 时，$x=1+\sqrt{1+y}$；当 $x<1$ 时，$x=1-\sqrt{1+y}$。
换名：当 $y\geqslant 1$ 时，反函数为 $y=1+\sqrt{1+x}$；当 $y<1$ 时，$y=1-\sqrt{1+x}$。

(4) $2^x(y-1)=-y$, $2^x=\dfrac{y}{1-y}$, $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$. 反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(5)
$$\begin{aligned}
y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\\
&\quad+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}+x-\sqrt{1+x^2}\\
&=2x-3\left[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\right]\\
&=2x-3y,
\end{aligned}$$

由此得 $x=\dfrac{y^3+3y}{2}$，故反函数为　$y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$.

(6) $\sin\frac{x-1}{x+1}=\frac{y-1}{2}$, $\arcsin\frac{y-1}{2}=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$,

$$x=\frac{1+\arcsin\frac{y-1}{2}}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}},$$

故反函数为

$$y=\frac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}.$$

(7) $y=\sin x=\sin(\pi-x)$,

当 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $\pi-x=\arcsin y$，$x=\pi-\arcsin y$，故反函数为 $y=\pi-\arcsin x$.

9(1.16) 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求以下函数的定义域： (4) $f(x+a)-f(x-a)\ (a>0)$.

解 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

解得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，这里 $1-a\geqslant a$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，否则定义域不存在，故定义域为 $[a,1-a]$，且 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

10(1.20) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，故 $f(x)=x^2-2$.

11(1.21) 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解 因为 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,

所以 $f(u)=2(1-u^2)$，$|u|\leqslant 1$,

于是 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$.

12(1.22) 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x)=\dfrac{lx+m}{nx+l}$,且 $b:c=m:n$,证明 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$。

证 $$f[\varphi(x)]=\frac{a\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+b}{c\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+a}=\frac{alx+am+bnx+bl}{clx+cm+anx+al},$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{l\cdot\dfrac{ax+b}{cx+a}+m}{n\cdot\dfrac{ax+b}{cx+a}+l}=\frac{alx+bl+cmx+am}{anx+bn+clx+al},$$

因 $b:c=m:n$, 即 $bn=cm$,

故 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$。

13(1.23) 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$, 若 $f(x)=a+bx$, 证

$$f_n(x)=a\cdot\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

证 $n=1$ 时, $f_1(x)=a+bx$,

设 $n=k$, $f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx$ 成立,则 $n=k+1$,

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=a+bf_k(x)=a+b\left[a\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right]$$

$$=a\cdot\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x,$$

故等式成立。

14(1.24) 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ $\varphi(x)=x^2-1$,

求 $f[\varphi(x)]$。

解 $y=\begin{cases}2u, & u\leqslant 0,\\ 0, & u>0,\end{cases}$ $u=x^2-1$,

故 $$f[\varphi(x)]=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

15(1.25) 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$,

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解 $$f[g(x)]=\begin{cases}2g(x), & 0\leqslant g(x)\leqslant 1,\\ [g(x)]^2, & 1<g(x)\leqslant 2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2\ln x, & 1\leqslant x\leqslant e,\\ \ln^2 x, & e<x\leqslant e^2.\end{cases}$$
$$g[f(x)]=\ln f(x)=\begin{cases}\ln 2x, & 0<x\leqslant 1,\\ \ln(x^2), & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

16(1.36) 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数，证明若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f[x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$。

证 因为 $f(x)$、$\varphi(x)$ 是单调增函数，所以当 $f(x)\geqslant\varphi(x)$ 时，有 $f[f(x)]\geqslant f[\varphi(x)]$ 和 $f[\varphi(x)]\geqslant\varphi[\varphi(x)]$，故
$$f[f(x)]\geqslant\varphi[\varphi(x)];$$
同理，由 $\psi(x)\geqslant f(x)$ 得 $\psi[\psi(x)\geqslant f[f(x)]$，

因此 $$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

17(1.38) 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$，$a$ 为常数，证明：$f(x)$是奇函数。

证 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$ 中用 $\frac{1}{x}$ 替换 x 得
$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=a,$$
由上二式解得 $f(x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)$。

因 $f(-x)=\frac{a}{3}\left(-\frac{2}{x}+x\right)=-f(x)$，故知 $f(x)$ 为奇函数。

18(1.39) 证明：不论 $f(x)$是定义在$(-l, l)$内的什么样的函数，$f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数。

证 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$，则 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，故 $F(x)$是偶函数。同理可证 $G(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数。

19(1.40) (4) 奇函数与偶函数的积为奇函数；

(5) 在区间$[-l, l]$上的任意函数可表达为一个偶函数与一个奇函数的和。

证 (4) 设$f(x)$为奇函数，$\varphi(x)$为偶函数，记$G(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$。因$G(-x)=f(-x)\varphi(-x)=-f(x)\varphi(x)=-G(x)$，故$G(x)$为奇函数。

(5) i) 存在性。设$f(x)$为$[-l, l]$上的任意一个函数，由第18题知 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$与$g(x)=f(x)-f(-x)$分别为$[-l, l]$上的偶函数与奇函数。从而

$$\varphi(x)+g(x)=2f(x),$$

于是
$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{g(x)}{2},$$

即
$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \tag{1}$$

这表明$f(x)$可表达为一个偶函数与一个奇函数的和。

ii) 唯一性。设

$$f(x)=s(x)+h(x), \tag{2}$$

其中$s(x)$与$h(x)$分别为$[-l, l]$上的偶函数与奇函数，于是

$$f(-x)=s(-x)+h(-x)=s(x)-h(x), \tag{3}$$

式(2)加式(3)得 $2s(x)=f(x)+f(-x)$，即

$$s(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2};$$

式(2)减式(3)得 $2h(x)=f(x)-f(-x)$，即

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

故
$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

它与式(1)相同，这就证明了唯一性。

20(1.41) 设$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，试考察下列复合函数的奇偶性：$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$。

解 设$F(x)=f[g(x)]$，$G(x)=g[f(x)]$，$H(x)=f[f(x)]$。因$F(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]=F(x)$，故$F(x)$

为偶函数；因 $G(-x)=g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]=G(x)$，故 $G(x)$ 为偶函数；因 $H(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]=-H(x)$，故 $H(x)$ 为奇函数。

21(1.42) 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其最小周期：(3) $y=\cos(\omega t+\theta)$ (ω, θ 为常数)；
(4) $y=x\cos x$。

解 (3) 记 $f(t)=\cos(\omega t+\theta)$， 因

$$f(t)=\cos[(\omega t+\theta)+2\pi]=\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\theta\right]$$

$$=f\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right),$$

故 $f(t)$ 是周期函数，且周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ $(\omega>0)$。

(4) 记 $g(x)=x\cos x$，设 l 为 $g(x)$ 的周期，则应有

$$(x+l)\cos(x+l)=x\cos x,$$

但此式仅对 $l=0$ 时才成立，故 $g(x)$ 不是周期函数。

22(1.46) 利用 $y=f(x)$ 的图形，由作出 $y=f(x+a)+b$ 的图形的方法，作出下列函数的图形：

(1) $y=x^2-4x+4$； (2) $y=\log_a(x+2)+1$ $(a>1)$；

(3) $y=a^{x+1}+3$ $(a>0,\ a\neq 1)$。

解 (1) $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$，先作出 $y=x^2$ 的图形，然后向右平移 2 个单位即得(图 1.22(1))。

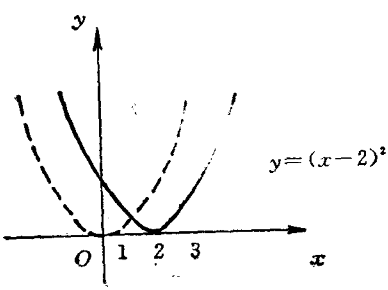

图 1.22(1)

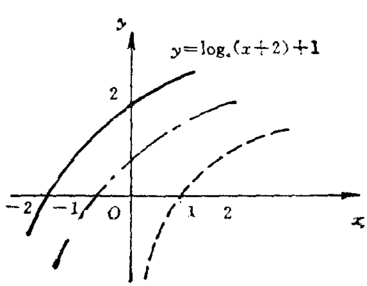

图 1.22(2)

(2) 先作出 $y=\log_a x$ 的图形，然后向左平移 2 个单位得 $y=\log_a(x+2)$ 的图形，再向上平移 1 个单位，即得 $y=\log_a(x+2)+1$ 的图形(图 1.22(2))。

(3) 先作出 $y=a^x$(设 $a>1$) 的图形，然后向左平移 1 个单位得 $y=a^{x+1}$ 的图形，再向上移 3 个单位，即得 $y=a^{x+1}+3$ 的图形(图 1.22(3))。

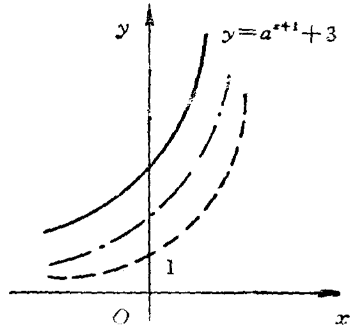

图 1.22(3)

23(1.47) 利用 $y=f(x)$ 的图形，由作出 $y=f(ax)$ 的图形的方法，作出下列函数的图形：

(1) $y=\sin 2x$; (2) $y=\cos\frac{x}{2}$; (3) $y=e^{2x}$.

解 (1) 因 $y=\sin 2x$ 的周期为 $T=\pi$，故先作出 $y=\sin x$ 的图形，然后把曲线上各点横坐标沿横向缩小到 $\frac{1}{2}$ 倍即得(图 1.23(1))

(2) 因 $y=\cos\frac{x}{2}$ 的周期为 $T=4\pi$，故先作 $y=\cos x$ 的图形，然后把曲线上各点的横坐标沿横向扩大 2 倍即得(图 1.23(2))

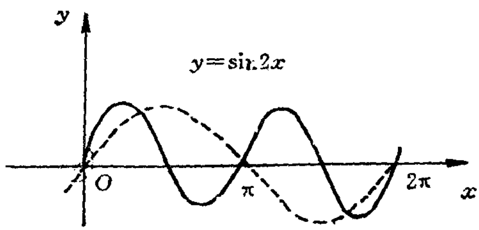

图 1.23(1)

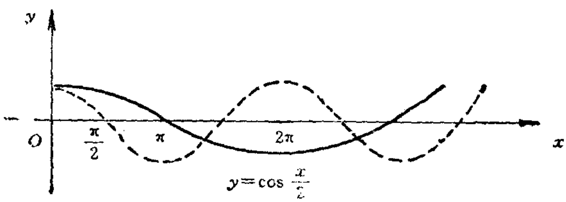

图 1.23(2)

(3) 先作出 $y=e^x$ 的图形，然后把曲线上各点的横坐标沿横向缩小一半即得(图 1.23(3))

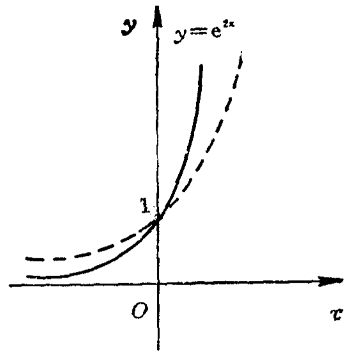

图 1.23(3)

24(1.48) 利用图形的叠加法，作出下列函数的图形：

(1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$；

(2) $y=\sin x+x$；

(3) $y=\sin x+\cos x$；

(4)* $y=\sin^3 x$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ (图 1.24(1))；

(2) $y=\sin x+x$ (图 1.24(2))；

(3) $y=\sin x+\cos x$ (图 1.24(3))；

(4) 因为 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，所以

$$y=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x \quad (图 1.24(4)).$$

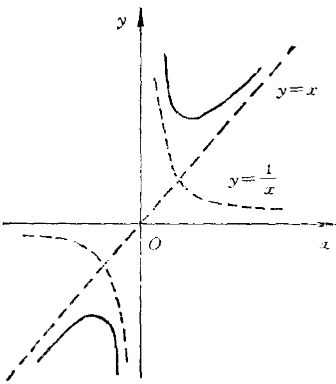

图 1.24(1)

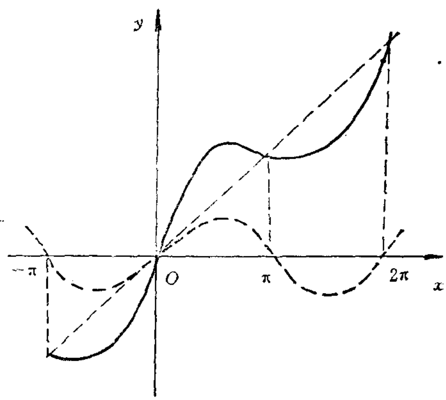

图 1.24(2)