高等数学思维训练与解题方法

佟绍成　王　涛　石月岩　　编著

东 北 大 学 出 版 社

· 沈　阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学思维训练与解题方法 / 佟绍成，王涛，石月岩编著. — 沈阳 : 东北大学出版社，2007.3
ISBN 978-7-81102-361-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①佟… ②王… ③石…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 014403 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　邮编：110004
　　电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
　　传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
　　E-mail：neuph @ neupress. com
　　http：// www. neupress. com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm×230mm
印　　张：13. 125
字　　数：336 千字
出版时间：2006 年 12 月第 1 版
印刷时间：2006 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81102-361-9
责任编辑：王兆元
封面设计：唐敏智
责任校对：张丽萍
责任出版：杨华宁

定　　价：25. 00 元

内容简介

本书内容由典型错误与评析、解题方法流程图及其应用两部分组成. 第一部分主要是收集和整理学生在学习高等数学课程过程中，由于对基本概念、定理的理解不透，逻辑推理不严密，解题思路不清晰，解题方法选择不当等所导致的典型错误，并以此为案例，进行了总结和评析. 第二部分是集高等数学中主要章节的知识要点、解题方法和技巧、解题的必要步骤于一体，设计了解题方法流程图，并配置了一些相关的典型例题. 以解题方法流程图为工具，结合配置的例题，对解题思路、方法和技巧等进行剖析、总结和归纳.

本书可作为工科院校各专业本科生学习高等数学课程和报考研究生复习的参考书，也可供从事高等数学课程教学的教师和数学专业的大学生作为教学和学习的参考资料.

前　　言

高等数学是高等学校工科专业极为重要的一门基础课程，在工科专业研究生入学考试中也是必考的课程之一. 该课程具有学时长、内容多、理论性强、难度大、解题技巧性灵活多样等特点，是衡量工科专业学生数学水平的重要标志. 学好该门课程能够使工科专业学生逻辑思维和推理能力得到训练，分析和解决问题的能力得到提高，解题技巧和计算水平得到加强，从而为后续课程的学习奠定坚实的数学基础. 为此，我们编写了《高等数学思维训练与解题方法》一书，希望达到抛砖引玉的效果.

作为长期从事高等数学课程教学的教师，在教学过程中，我们一直在思考和探索，如何面对高等数学浩如烟海的各种习题，各种抽象的定义和定理等问题，能给学生一种数学思维训练方法，一种启迪，一种解题思路或模式，使他们在这种模式下，学会主动学习，掌握高等数学中的基本概念、基本原理和解题方法的内涵和精髓，做到由此及彼，举一反三，从而在各类考试中得心应手，应对自如.

为了实现这个目标，我们在多年教学研究和总结的基础上，把学生在学习高等数学时，对基本概念、定理的理解不深，逻辑推理不严密，计算上忽略公式的先决条件等原因而出现的一些典型错误加以归纳，整理和评析，形成教学案例，以此帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍，加深对基本概念、定理的理解及计算方法的正确把握. 此外，我们集高等数学内容的相关程度、知识要点、解题思路，解题方法和技巧于一体，编制了主要章节的解题方法流程图，配置了满足各个分支条件的典型例题，对此进行分析、总结、归纳和计算. 宗旨是使学生从不同角度、全方位、多层次地寻求解题方法，达到培养数学思维、提高分析问题、解决问题和计算能力的目的.

本书内容包括两部分. 第一部分主要总结和归纳了学生在学习高等数学中常出现的典型错误，对这些典型错误进行评析，相应地给出正确的解法，并把相关

的知识点融入到正确的解法和评析之中；第二部分主要介绍了高等数学的教学难点和学生在解题方法方面遇到的问题，针对高等数学的主要内容，编制了解题方法流程图，并配备了满足各计算方法的典型例题，以详细介绍如何利用解题方法流程图进行分析和计算．同时，还对某些例题的解题方法及所应注意的问题进行必要的延伸、总结和归纳．

在本书的编写出版过程中，我校高等数学教研室唐剑涛教授提出了许多好的建议，并做了大量的工作，众多同仁给予了大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于编写时间仓促，作者水平有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2006 年 6 月于辽宁工学院

目　　录

第一部分　典型错误与评析

一、极限与函数的连续性

【题目 1】 **用定义证明** $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

【错误解法】 对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $|x^2-4|=|x-2||x+2|<\varepsilon$ 成立，只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$. 因此取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|x^2-4|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

【错解评析】 此题属于对函数极限定义理解上的错误. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的 $<\varepsilon-\delta>$ 定义不难看出，δ 是一个满足"当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立"的正实数，它与 ε 和 x_0 有关（一般地讲，ε 越小，对应的 δ 也越小），但与 x 无关. 所以，上述解法中取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$ 是错误的.

【正确解法】 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $x\to 2$，不妨限制 $0<|x-2|<1$，从而 $1<x<3$，$|x+2|\leqslant|x|+2<5$. 于是 $|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-5|$，要使 $|x^2-4|<\varepsilon$，只要 $5|x-2|<\varepsilon$，即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$. 由此取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\delta}{5}\right\}$. 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|x^2-4|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

【题目 2】 **用定义证明** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x}=0$.

【错误解法】 对任意给定的 $\varepsilon>0$（不妨令 $\varepsilon<1$），要使 $\left|\dfrac{x}{1+x}-0\right|=\dfrac{|x|}{|1+x|}<\varepsilon$ 成立，只要 $|x|<\varepsilon|1+x|$ 成立，又因 $\varepsilon|1+x|\leqslant\varepsilon+\varepsilon|x|$，故只要 $|x|<\varepsilon+\varepsilon|x|$ 成立，即 $|x|<\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，由此取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{x}{1+x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x}=0$.

【错解评析】 上述证法犯了逻辑推理上的错误，因为 $\varepsilon|1+x|\leqslant\varepsilon+\varepsilon|x|$，故 $|x|<\varepsilon+\varepsilon|x|$ 时，不能逆推出 $|x|<\varepsilon|1+x|$ 成立.

【正确解法】 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $x\to 0$，不妨限制 $|x|<\frac{1}{2}$，则 $|1+x|>\frac{1}{2}$. 于是

$$\left|\frac{x}{1+x}-0\right|=\frac{|x|}{|1+x|}<2|x|.$$

要使 $\left|\frac{x}{1+x}-0\right|<\varepsilon$，只需 $2|x|<\varepsilon$，即 $|x|<\frac{\varepsilon}{2}$，由此取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{x}{1+x}-0\right|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$.

【题目 3】 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\infty$.

【错误解法】 对任意给定的 $M>0$，要使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立，由于 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\leqslant\frac{1}{|x|}+2$，故只要 $\frac{1}{|x|}+2>M$ 成立，即 $|x|<\frac{1}{M-2}$. 故取 $\delta=\frac{1}{M-2}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立. 此即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\infty$.

【错解评析】 上述证法犯了逻辑推理上的错误. 因为 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\leqslant\frac{1}{|x|}+2$，故当 $\frac{1}{|x|}+2>M$ 成立时，不能逆推出 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立.

【正确解法】 对任意给定的 $M>0$，要使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立，由于 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geqslant\frac{1}{|x|}-2$，故只要 $\frac{1}{|x|}-2>M$ 成立，即 $|x|<\frac{1}{M+2}$，因此取 $\delta=\frac{1}{M+2}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立. 此即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\infty$.

【题目 4】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

【错误解法】
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\\&=0+0+\cdots+0=0.\end{aligned}$$

【错解评析】 本题由于忽视了极限运算法则是针对有限项和才可使用这一前提条件，所以造成了计算上的错误. 事实上，本题中的求和项数是随着 n 的增大而增加的，不是有限项，因此直接应用求极限的加法运算是错误的.

【正确解法】 应首先考虑将表达式求和，然后再利用极限的四则运算法则求其值.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

注　(1)像本题这样求 n 项和的极限的问题，实际上是一类求极限的重要题型.
常用的方法有：①变形求和；②利用夹逼准则；③利用定积分；④利用无穷级数等等.
(2)类似的问题，如

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=1\cdot1\cdots1=1\end{aligned}$$

也是由于没有注意极限法则的使用条件造成的错误，因为本题中乘积因子的个数是随着 n 的增大而增加的，它不是有限个因子的乘积.

其实本题是一个重要的结论：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.(可应用单调有界准则证明其存在性)

【题目 5】　求极限 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

【错误解法】　$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0$.

【错解评析】　此题属于极限运算法则应用上的一个典型错误．事实上，在具体应用 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$ 这一极限运算法则时，有一个重要的前提条件，那就是 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都必须存在(其他极限运算法则也有相应的条件)．在此题中，由于极限 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，所以不能用乘积的极限运算法则.

【正确解法】　由于 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，即当 $x\to0$ 时，$x^2\sin\frac{1}{x}$ 是一个无穷小与一个有界函数的乘积，依定理它仍是无穷小．故 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

【题目 6】　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$.

【错误解法】　因 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

【错解评析】　利用等价无穷小代换法则，求两个无穷小之比的极限时，分子分母(或分子或分母)都可用等价无穷小来代换．更进一步地说，分子或分母的乘积因子可用其等价无穷小代换，但和或差中的项则不能冒然进行代换，否则可能导致错误．此题的解法正是犯了这个错误，即用等价无穷小代换了分子中的第一、二项．事实上，当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，但 $\tan x-\sin x$ 并不等价于 $x-x=0$(常数 0 是比任何无穷小都更高阶的无穷小)．可证明，当 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

【正确解法】　由 $\sin x\sim x(x\to0)$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}.$$

由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$，**得**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【题目 7】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$.

【错误解法】 因为 $x\to 0$ **时，**$x^2\sin\frac{1}{x}\to 0$，**所以，**$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}$，**从而**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

【错解评析】 上述求极限的过程中，运用了等价无穷小代换：当 $x\to 0$ **时，**$x^2\sin\frac{1}{x}\to 0$，**所以，**$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}$；**而这个结论事实上是不成立的，这是由于当** $x\to 0$ **时，**$x^2\sin\frac{1}{x}$ **能取到零值，例如当** $x_n=\frac{1}{n\pi}$**时，**$\left(\frac{1}{n\pi}\right)\sin\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}}=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi=0$. **故本题不能使用等价无穷小代换的方法来求解，而是应用夹逼准则来考虑本题.**

【正确解法】 因为 $\left|\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant x^2$，**所以有**

$$0<\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|\to 0,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

【题目 8】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **在** $x=0$ **点的连续性.**

【错误解法】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2^t-1}{2^t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2^t\ln 2}{2^t\ln 2}=1$，**而** $f(0)=1$，**所以函数** $f(x)$ **在** $x=0$ **点处连续.**

【错解评析】 此题解法的错误在于忽视了极限定义中 $x\to x_0$ 的方式的任意性，即 $x\to 0$ 应该包括 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$．因此，本题中 $t=\dfrac{1}{x}$ 趋于无穷大应包括 $t\to -\infty$ 和 $t\to +\infty$.

【正确解法】 注意到 $\lim\limits_{t\to -\infty}2^t=0$，$\lim\limits_{t\to +\infty}2^t=+\infty$，所以

$$\lim_{t\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to -\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=-1,$$

$$\lim_{t\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to +\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=1.$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，因此函数在 $x=0$ 点不连续.

【题目 9】 设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

【错误解法】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}[(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}]=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot\infty=\infty.$

【错解评析】 此题解法的错误与题目 8 相同，即在求极限 $x\to 1$ 的过程中，没有考虑 $x\to 1^-$ 和 $x\to 1^+$．因此，得到了错误的结论.

【正确解法】 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}[(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}]=2\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0$，

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}[(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}]=2\cdot\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot\infty=\infty,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

注　题目 8，题目 9 提示我们，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，有时需要注意观察当 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势，若趋势不相同，则应先考虑求左右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$．例如，对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\end{cases}$$

在求 $x=0$ 点的极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 时，就需要从计算 $f(0^-)$ 和 $f(0^+)$ 入手.

二、一元函数的导数

【题目 10】 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x-1}, & x<0\\ \sin x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

【错误解法】 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(xe^x-1)'=(1+x)e^x$；当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\sin x-1)'=\cos x$；当 $x=0$ 时，由于 $f(0)=-1$，所以 $f'(0)=(-1)'=0$，从而

$$f'(x)=\begin{cases}(1+x)e^x, & x<0\\ 0, & x=0\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$$

【错解评析】 在上述解法中，求函数在 $x=0$ 点导数的做法是犯了概念性错误. 其原因在于没有正确理解函数在某一点的导数定义. 事实上，由

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

可以看出，函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 的导数 $f'(x_0)$，不仅依赖于函数在点 x_0 的值 $f(x_0)$，而且还依赖于函数在该点足够小邻域(左右两侧)的值. 它反映了函数在该点邻近函数值的某种变化状态，是一种所谓函数在一点的"局部(包括该点及其附近点)的性质"，并非仅是反映函数在"一点"的性质. 上述解法正是犯了导数 $f'(0)$仅与函数在 $x=0$ 的值有关这一片面性错误.

【正确解法】 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(xe^x-1)'=(1+x)e^x$；当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\sin x-1)'=\cos x$；当 $x=0$ 时，利用导数定义计算 $f'(0)$. 由于

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{xe^x}{x}=1,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以 $f'(0)=1$. 从而

$$f'(x)=\begin{cases}(1+x)e^x, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$$

注　求分段函数在分段点的导数是一类比较重要的求导练习，通过它可以加深对导数定义的理解. 解决此类问题的基本思想是：

(1) 函数在分段点两侧由同一式子定义，而在分段点的函数值单独定义，这时需要依导数定义求极限.

(2) 函数在分段点两侧由不同式子定义，这里需要从单侧导数入手. 先分别求出左右导数，若二者相等，即求出导数；若二者不等，则函数在该点不可导.

【题目 11】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2e}, & x\leqslant\sqrt{e}\\ \ln x-\dfrac{1}{2}, & x>\sqrt{e}\end{cases}$，求 $f'(e)$.

【错误解法】 当 $x\leqslant\sqrt{e}$时，$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{2e}\right)'=\dfrac{x}{e}$，故 $f_-'(\sqrt{e})=\lim\limits_{x\to\sqrt{e}^-}\dfrac{x}{e}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$；

当 $x>\sqrt{e}$时，$f'(x)=\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)'=\dfrac{1}{x}$，故 $f_+'(\sqrt{e})=\lim\limits_{x\to\sqrt{e}^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

于是得到 $f'(\sqrt{e})=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

【错解评析】 在上述解法中有两个方面的错误. 其一对分段函数在分段点处讨论可导性

时，没有先考虑其连续性；其二是把导函数 $f'(x)$ 在点 $x=\sqrt{e}$ 处的左右极限 $f'(\sqrt{e}^{-})$ 和 $f'(\sqrt{e}^{+})$ 当成了函数 $f(x)$ 在点 $x=\sqrt{e}$ 处的左右导数 $f_-'(\sqrt{e})$ 和 $f_+'(\sqrt{e})$，即错误地认为 $f'(\sqrt{e}^{-})=f_-'(\sqrt{e})$ 和 $f'(\sqrt{e}^{+})=f_+'(\sqrt{e})$；实际上这是两个不同的概念：$f'(\sqrt{e}^{-})=\lim\limits_{x\to\sqrt{e}^{-}} f'(x)$，而 $f_-'(\sqrt{e})=\lim\limits_{x\to\sqrt{e}^{-}}\dfrac{f(x)-f(\sqrt{e})}{x-\sqrt{e}}$，对此不难举出例子，函数 $f(x)$ 在 x_0 点是可导的，但 $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$．例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 是可导的：$f_-'(0)=f_+'(0)=f'(0)=0$，但导函数

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x>0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 左右极限 $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to-0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在，因而 $f_-'(0)\neq f'(0^-)$．

【正确解法】 先考察函数 $f(x)$在 $x=\sqrt{e}$处的连续性．由于

$$f(\sqrt{e}^{-})=\lim_{x\to\sqrt{e}^{-}}\frac{x^2}{2e}=\frac{1}{2},$$

$$f(\sqrt{e}^{+})=\lim_{x\to\sqrt{e}^{+}}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)=0,$$

所以 $f(\sqrt{e}^{-})\neq f(\sqrt{e}^{+})$，即极限$\lim\limits_{x\to\sqrt{e}} f(x)$不存在，因此函数在 $f(x)$在 $x=\sqrt{e}$处不连续，当然就谈不上可导．

注　本题目告诉我们，尽管 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，但函数仍然在点 x_0 不可导．总之，我们应该分清这样几个概念：

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 可导，是指 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，或者说是指

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$或 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$分别是指导函数 $f'(x)$在点 x_0 的左极限、右极限和极限．

(3) 当导函数 $f'(x)$在点 x_0 连续时，才有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(x);$$

而当导函数 $f'(x)$在点 x_0 左连续时，才有

$$f_-'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0^-)\text{；}$$

当导函数 $f'(x)$在点 x_0 右连续时，才有

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0^+).$$

【题目 12】 设函数 $y=y(x)$由方程

$$x^3+y^3+(x+1)\cos(\pi y)+9=0$$

确定，求该函数在点 $x=-1$ 处的导数.

【错误解法】 令

$$y=x^3+y^3+(x+1)\cos(\pi y)+9, \tag{1}$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos(\pi y)-\pi(x+1)\sin(\pi y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

整理得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3x^2+\cos(\pi y)}{1-3y^2+\pi(x+1)\sin(\pi y)}.$$

所以
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1}=\frac{3+\cos(\pi y)}{1-3y^2}.$$

【错解评析】 在上述解法中有两个方面的错误：其一是令 $y=x^3+y^3+(x+1)\cos(\pi y)+9$，这完全是由于没有理解隐函数概念所产生的错误. 实际上，由方程(1)确定的函数与题中所给的方程确定的函数 $y=y(x)$是不同的，当然所求结果也谈不上正确. 其二是计算$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$在 $x=-1$ 点的值时，没有将与 $x=-1$ 相对应的 y 值 $y(-1)=-2$ 代入$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的表达式中. 因为函数 $y=y(x)$是由题中所给方程确定的隐函数，而不是两个相互独立的变量. 所以当$x=-1$时，对应的 y 值 $y(-1)$应由方程

$$(-1)^3+[y(-1)]^3+(-1+1)\cos(\pi y(-1))+9=0$$

求得，即$[y(-1)]^3=-8$，或 $y(-1)=-2$.

【正确解法】 在给定方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos(\pi y)-\pi(x+1)\sin(\pi y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

整理得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3x^2+\cos(\pi y)}{\pi(x+1)\sin(\pi y)-3y^2}.$$

当 $x=-1$ 时 $y=-2$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1}=\frac{3\cdot(-1)^2+\cos(-2\pi)}{\pi(-1+1)\sin(-2\pi)-3\cdot(-2)^2}=-\frac{1}{3}.$$

【题目 13】 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【错误解法 1】 因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

【错误解法 2】

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}=\frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}=\frac{t}{1-t^2}.$$

【错解评析】 解法 1 的错误在于将 y 对 x 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 理解为一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 对 t 的导数，即错误地理解为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. 事实上，如果我们设由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，则 y 对 x 的一阶导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

是 t 的函数，而二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 是对自变量 x 求的，因此应该为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right).$$

这里应把 t 当成中间变量，即当成 x 的函数（$x=\varphi(t)$ 的反函数），于是

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\\&=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.\end{aligned}$$

这个二阶导数并不是一阶导数 $\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)$ 对 t 再求一次导数的结果.

解法 2 则是盲目地将 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 理解为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ 与 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 之商（可能受到 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 的影响）. 而由

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

便知 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\neq\frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}}{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}$，因此解法 2 是错误的.

【正确解法 1】 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{4t}(1+t^2).$$

【正确解法 2】 利用一阶微分形式不变性求导.

$$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y=\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t}=\frac{t}{2},\ \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t}=\frac{1}{4t}(1+t^2).$$

注　求三阶乃至更高阶导数，同样都需要注意本题所出现的问题.

三、函数极限的洛必达法则及函数的性质

【题目 14】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

【错误解法】 因当 $x\to 0$ 时，$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，所以，由洛必达法则得