

大学课程辅导与应试系列丛书

编纂指导委员会

(按姓氏笔画排列)

马继刚 (四川大学)

王绵森 (西安交通大学)

文小西 (高等教育出版社)

田 铮 (西北工业大学)

齐植兰 (天津大学)

刘 晓 (北方交通大学)

张庆灵 (东北大学)

杨秀雯 (天津大学出版社)

季文铎 (北方交通大学)

赵达夫 (北方交通大学)

郝志峰 (华南理工大学)

谢国瑞 (华东理工大学)

游 宏 (哈尔滨工业大学)

蔡高厅 (天津大学)

高等数学释疑解难

齐植兰 编著



内 容 提 要

本书是为帮助学生深入学习高等数学而编写的一本学习辅导书,对学生学习过程中容易产生的疑难问题以问答方式由浅入深进行剖析解答,并以例题具体阐述相关的概念、理论,以使学生对概念、理论的理解,提高应用理论解决具体问题的能力,开阔解题思路。

本书是以《高等数学教学基本要求》为依据编写的,包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程共八章,共四个问题。

本书适用于高等院校非数学类各专业学生,亦可供教师参考,也可作为自学高等数学读者的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学释疑解难 杨植兰编著 天津:天津大学出版社, 2003
ISBN 7-304-02000-0

I 高... II 杨... III 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV 高等数学

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第 000000 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 89 号天津大学内(邮编 300072)
网 址 <http://www.tjup.com>
电 话 发行部: 022-27403608 邮购部: 022-27403608
印 刷 永清县晔盛亚胶印有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 16 开
印 张 10
字 数 200 千字
版 次 2003 年 1 月第 1 版
印 次 2003 年 1 月第 1 次
印 数 1 万册
定 价 16.00 元

前 言

高等数学是高等院校一门重要的基础理论课。学好高等数学不仅对学好后继课程十分必要,而且对提高专业能力都有深远的影响。在高等数学的教学过程中,不仅要向学生传授知识,同时要培养和提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力以及综合运用数学方法解决实际问题的能力。要做到这一点,必须使学生系统地、深刻地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握高等数学分析问题、解决问题的思路与方法。为了帮助学生学好高等数学,解决一些疑难问题,特编写了这本学习辅导书。

本书是以《高等数学课程教学基本要求》为依据编写的。全书包括“函数、极限、连续”、“一元函数微分学”、“一元函数积分学”、“向量代数与空间解析几何”、“多元函数微分学”、“多元函数积分学”、“无穷级数”、“常微分方程”共八章。从多年教学中总结学生在学习过程中感到疑难的问题共 150 个,以问答形式由浅入深进行剖析、解答,并辅以例题加以解决。通过解题具体地阐述相关概念理论以及理论的具体应用,以此启发学生思维,帮助学生学会运用数学理论解决具体问题的方法与技巧。

本书在编写过程中得到天津大学出版社的大力支持和帮助,并将此书列入“大学课程辅导与应试系列丛书”之一,作者对此表示诚挚的谢意!

由于水平所限,书中如有错误与不妥之处,欢迎广大读者批评指正。愿本书能对广大读者有所帮助!

编 者

二〇〇九年 元月

第 1 章 函数、极限、连续

函数反映了客观世界变量间的依从关系,是高等数学的研究对象.极限概念是高等数学的重要概念,微积分的基本概念,如导数概念、定积分概念、无穷级数的收敛性概念都是通过极限方法建立起来的.函数的连续性是函数的一个重要特性.连续函数是高等数学的主要研究对象.

问题 1.1 如何理解复合函数概念,怎样求分段函数的复合函数?

答:复合函数概念可简述为:若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , 函数 $z=\varphi(x)$ 在 D_f 上有定义,当 $x \in D_f$ 时, $\varphi(x) \in D_f$, 则函数 $y=f(\varphi(x))$ 称为由函数 $z=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D_f .

注意:不是任意两个函数都能构成复合函数的.在复合函数的定义中, $y=f(x)$ 及 $z=\varphi(x)$ 能够构成复合函数,要求当 $x \in D_f$ 时,相应的函数值 $\varphi(x)$ 必须落在 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 上.例如 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $z=\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其值域为 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \subset (-\infty, +\infty)$, 故 $y=f(\varphi(x))$ 有意义.

若 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $z=\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其值域为 $(-\infty, +\infty)$, 则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

若 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $z=\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其值域为 $(-\infty, +\infty)$, 则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

再如 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $z=\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其值域为 $(-\infty, +\infty)$, 则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $y=f(x)$ 及 $z=\varphi(x)$ 为分段函数时,求复合函数 $y=f(\varphi(x))$, 需依据 $z=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(x)$ 的定义域的交集的情况,确定 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域.

例 1.1 已知二分段函数

$$y=f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}, \quad z=\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$$

求复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

解:当 $x \leq 0$ 时, $z=\varphi(x) \leq 1$, 故当 $x \leq 0$ 时, $y=f(\varphi(x)) = \varphi(x) = x+1$; 当 $x > 0$ 时, $z=\varphi(x) > -1$, 故当 $x > 0$ 时, $y=f(\varphi(x)) = \varphi(x)^2 = (x-1)^2$.

时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且当 $x \in \mathbb{R}$ 时 $f(x) = y$ 由此知当 $y \leq 0$ 及 $y > 0$ 时, $f(x) = y$
 当 $y \leq 0$ 时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) = y$ 此时 $f(x) = y$ 且 $x \in \mathbb{R}$ 当 $y > 0$ 时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) = y$
 原式此时 $f(x) = y$ 综合以上结果, 得复合函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \text{ 或 } x > 0 \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

例 1.1.1 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

求复合函数 $f(f(x))$

解 函数 $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} , $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x) = y$ 且 $y \in \mathbb{R}$ 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x) = y$ 且 $y \in \mathbb{R}$

当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) = y$ 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) = y$ 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\exists x \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) = y$

综上所述, 得

$$f(f(x)) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

问题 1.1.2 函数 $f(x)$ 满足什么条件时具有反函数, 如何求分段函数的反函数?

答: 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 值域为 \mathbb{R} , 如果 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 上的一一映射, 即任给 $y \in \mathbb{R}$, 有唯一的 $x \in \mathbb{R}$ 与之对应, 反之任给 $x \in \mathbb{R}$, 有唯一的 $y \in \mathbb{R}$ 与之对应, 则函数 $f(x)$ 必有反函数 $f^{-1}(x)$

由此知单值单调函数必有反函数, 且反函数也是单调的, 这是反函数存在的一个充分条件, 不是必要条件

例 1.1.3 函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

是否有反函数, 若有, 求出反函数

解: $f(x)$ 构成 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的映射与 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的映射上的一一对应, 任给 $y \in \mathbb{R}$, 显然有唯一的 $x \in \mathbb{R}$ 与之对应, 反之任给 $x \in \mathbb{R}$, 当 $x > 0$ 时, 则 $f(x) = y$ 与之对应, 当 $x \leq 0$ 时, 则 $f(x) = y$ 与之对应, 故其反函数存在, 且 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{R} \\ x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

“ $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ ”恒成立”说明对于 $\{x_n\}$ 的一切 ϵ , 皆落在开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 随 n 的增大 $|x_n - a|$ 不一定是减小的, 也就是 $\{x_n\}$ 原定义并不是单调减小地趋于 a . 例如

$\{x_n\}$ 越 $\left\{ \begin{array}{l} a, \quad n \text{ 为奇数,} \\ (a - \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$ 显然 $\{x_n\}$ 越 a 但 $\{x_n\}$ 原定义 $\left\{ \begin{array}{l} a, \quad n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$ $\{x_n\}$ 原定义

不随 n 的增加而单调地减小 $\{x_n\}$ 原定义 $\rightarrow a$

又如 $\{x_n\}$ 越 $\left\{ \begin{array}{l} a, \quad n \text{ 为奇数,} \\ a - \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$ 显然 $\{x_n\}$ 越 a 但 $\{x_n\}$ 原定义 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为奇数,} \\ a - \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$ $\{x_n\}$ 原定义

也不是随 n 增大而单调地减少

(按所给定义与原定义等价) 看 $\{x_n\}$ 原定义 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ 定义: “任给 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ ” 按新定义: “任给 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ ” 按 ϵ, ϵ 的任意性, 可知二者等价

再看 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 该问题的 (员) 中已知 $\{y_n\}$ 不是唯一的, $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 所指的 n 是一致的, 故原定义中“对于 $\{x_n\}$ 的一切 ϵ ”与现定义中“对于 $\{y_n\}$ 的一切 ϵ ”是等价的, 只需取 $\{y_n\}$ 越 a 即可

(源) $\{x_n\} \neq a$ 表明极限定义不成立, 也就是要否定“对任意的 $\epsilon > 0$ 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \epsilon$ ”的事实, 这就是“存在一个正数 ϵ_0 , 对任何正整数 N , 至少存在一个 $n > N$, 使 $|x_n - a| \geq \epsilon_0$ ”

问题 (员) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}, \dots, \{x_{kn}\}$ 是否收敛? 反之, 若数列 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 皆收敛, 那么 $\{x_n\}$ 是否必收敛? 又若 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 收敛, $\{x_n\}$ 是否必收敛? 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{x_{2n}\}$ 是否必收敛?

答: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\{x_n\}$ 越 a . 由定义知任给 $\epsilon > 0$ 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 故当 $n > N$ 时, 必有 $|x_{2n} - a| < \epsilon, |x_{2n+1} - a| < \epsilon$. 所以 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 皆收敛. 实际上, 若数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 收敛, 则任何子列 $\{x_{k_n}\}$ 也收敛, 且 $\{x_{k_n}\}$ 越 a . 反之, 若数列 $\{x_n\}$ 的任何子列都收敛于 a , 则数列 $\{x_n\}$ 必收敛于 a .

又由于当 $n > N$ 时, $|x_{2n} - a| < \epsilon, |x_{2n+1} - a| < \epsilon$, 且 $|x_n - a| < \epsilon$, 故数列 $\{x_{2n}\}$ 及 $\{x_{2n+1}\}$ 也收敛

反之, 若数列 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ 皆收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 未必收敛. 例如数列 $\{x_n\}$ 越 $\left\{ \begin{array}{l} a, \quad n \text{ 为奇数,} \\ a - \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$ 是收敛的, $\{x_{2n}\}$ 越 $a, \{x_{2n+1}\}$ 越 a , 数列 $\{x_n\}$ 为 $\left\{ \begin{array}{l} a, \quad n \text{ 为奇数,} \\ a - \frac{1}{n}, \quad n \text{ 为偶数} \end{array} \right.$

猿 员 园 灶原员
源 ... 灶原员 灶 ... 是发散的 援 若数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 皆收敛于 葬, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = 2a$ 援

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{y_n\}$ 未必收敛 援 例如数列 员, 原员, 员, 原员, ... , 员, 原员, ... 是发散的, 但 $x_n + y_n = 0$ 故数列 $\{x_n + y_n\}$ 收敛 援 渣 渣 员 则数列 $\{渣 \cdot 渣\}$ 也收敛 援 这个例子也说明数列 $\{渣 \cdot 渣\}$ 收敛, 数列 $\{渣\}$ 未必收敛 援

问题 员 缘 已给数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$, 若数列 $\{x_n y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 则下列论述是否正确?

- (员) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必收敛于 园 即必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 援
- (圆) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 则 $\{y_n\}$ 必为有界数列 援
- (猿) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 则 $\{y_n\}$ 必收敛 援
- (源) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 则 $\{y_n\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{a}$ 援

答: (员) 不正确, 例如

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ 1, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

数列 $\{x_n\}$ 发散, $x_n y_n = 0$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 但 $\{y_n\}$ 发散 援

(圆) (猿) 不正确 援 例如 $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ $\{y_n\}$ 为收敛数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \neq 0$ 取

$$y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ 1, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

则 $x_n y_n = 0$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 但数列 $\{y_n\}$ 不收敛, 也不是有界数列 援

(源) 正确 援 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 故不妨设 $x_n \neq 0$, $y_n = \frac{x_n y_n}{x_n}$, 由极限运算法则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{0}{a} = 0$$

故数列 $\{y_n\}$ 收敛于 园 援

问题 员 苑 极限四则运算法则在什么条件下成立?

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n)$ 存在, 能否得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 必存在? 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ 皆存在, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 皆存在?

答: 极限的四则运算是指: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ (当 $b \neq 0$ 时). 援 且当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ 存在的条件下, 可以由极限的四则运算求出和、差、积、商(分母极限不为零)的极限 援

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 存在, 不能断言 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在. 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$ 都存在, 则由于 $x_n = \frac{1}{2}[(x_n + y_n) + (x_n - y_n)]$, $y_n = \frac{1}{2}[(x_n + y_n) - (x_n - y_n)]$, 由极限的四则运算知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 皆存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)].$$

问题 1.1 收敛数列、有界数列、发散数列、无界数列、无穷大量, 这几个概念之间是什么关系?

答 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必为有界数列. 反之, 有界数列未必收敛. 如 $x_n = (-1)^n$

远
▲

$\begin{cases} \text{灶为奇数,} \\ \text{灶为偶数,} \end{cases}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 即 $\{x_n\}$ 是发散的. 援
 $\begin{cases} \text{灶为奇数,} \\ \text{灶为偶数,} \end{cases}$ 则 $\{x_n\}$ 为有界数列, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 即 $\{x_n\}$ 是发散的. 援

若 $\{x_n\}$ 为单调有界数列, 则 $\{x_n\}$ 必为收敛数列. 反之不成立. 援

若 $\{x_n\}$ 为无界数列, 则 $\{x_n\}$ 必发散. 事实上, 用反证法可以证明. 若 $\{x_n\}$ 为收敛数列, 则 $\{x_n\}$ 必为有界数列, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾. 反之, 发散数列未必无界. 如 $x_n = n$ 中给出的 $\{x_n\}$ 是发散的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

由上可知, 若数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 则 $\{x_n\}$ 必为无界数列. 故 $\{x_n\}$ 发散. 且无界数列 $\{x_n\}$ 未必是无穷大量. 如 $x_n = (-1)^n n$

$\begin{cases} \text{灶为奇数,} \\ \text{灶为偶数,} \end{cases}$ 则 $\{x_n\}$ 为无界数列, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在. 援

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$, 但该数列的子列 $\{x_{2k}\}$ 为无穷大量, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \infty$. 事实上, 有以下定理. 援

定理 $\{x_n\}$ 为无界数列的充分必要条件是存在无穷大子列, 即存在子列 $\{x_{n_k}\}$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \infty$. 援

问题 1.2 如何求数列 $\{x_n\}$ 的极限?

答 根据数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义, 只能由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 是否对一切 n 跃成立, 判断 a 是否为 x_n 的极限, 而不能用来求数列的极限. 求数列 $\{x_n\}$ 的极限, 通常分两步: 首先判断数列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则进行第二步, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 也就是先判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性, 再求极限值. 援

判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性, 一般采用单调有界准则或夹挤准则. 当然利用夹挤准则可同时得到所求的极限值. 援

例 1.1 已知 $x_n = \sqrt[n]{n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 援

解 显然 $x_n = \sqrt[n]{n} > 0$. 对于这种类型的数列, 一般先讨论它的单调有界性, 分两种情况. 援

若 $x_n \leq 1$, 则 $x_n = \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} = x_{n+1}$. 此知, 若 $x_n \leq 1$, 则 x_n 越 $\sqrt[n]{n}$ 越 $\sqrt[n]{n+1} \leq$

$\sqrt{a_n}$ 越 a_n 即 $\{a_n\}$ 为有界数列 $a_n \leq a_{n+1}$

$$a_n \leq \sqrt{a_n} \Rightarrow \sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow \sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$$

即 $\{a_n\}$ 为单调增数列, 且有上界 $a_n \leq a_{n+1}$ 存在援

若 $a_n > a_{n+1}$ 则 $a_n > \sqrt{a_n} > \sqrt{a_{n+1}} > a_{n+1}$ 此可推出若 $a_n > a_{n+1}$ 必有 $a_n > a_{n+1}$

$$a_n \geq \sqrt{a_n} \Rightarrow \sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow \sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$$

即 $\{a_n\}$ 为单调减数列, 且有下界 $a_n \geq a_{n+1}$ 存在援

设 $a_n > a_{n+1}$ 由 $a_n > \sqrt{a_n}$ 等式两端取极限得 $a > \sqrt{a}$, 即 $a > a$ 原 $a > a$ 越 a 由此得 $a > a$ 或 $a > a$ 原 $a > a$ 由于 $a_n > a_{n+1}$ 由同号性定理知 a 不取负值 撤 $a > a$ 原 $a > a$ 舍去, 得

$a_n > a_{n+1}$

例 员 越 越 设 $a_n > a_{n+1}$ 越 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ (灶越员圆...), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求

a_n

证: 数列 $\{a_n\}$ 的单调性与有界性不明显, 一般借助于 a_n 原 a_{n+1} 的正或负判断 $\{a_n\}$

的单调增或减 援 $a_n > a_{n+1}$ 及 $a_n > \frac{a_n}{a_{n+1}}$ (灶越员圆...), 知 $a_n > a_{n+1}$

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$$

由此知, 若 $a_n \leq a_{n+1}$, 即 $a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$ 则 $a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$ 即 $a_n \leq a_{n+1}$ 若 $a_n \geq a_{n+1}$, 则 $a_n \geq a_{n+1}$

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$$

若 $a_n \leq \sqrt{a_n}$ 则 $a_n \geq a_{n+1}$, 由以上推导知 $a_n \geq a_{n+1}$, 故 $\{a_n\}$ 为单调增数列 若 $a_n \geq \sqrt{a_n}$ 则 $a_n \leq a_{n+1}$, 由以上推导知 $a_n \leq a_{n+1}$, 即 $\{a_n\}$ 为单调减数列

又由 $a_n > a_{n+1}$ 知

$$a_n > a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

即 $\{a_n\}$ 为有界数列, 故 a_n 存在援

设 $a_n > a_{n+1}$ 在等式 $a_n > \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 两端取极限, 得 $a > \frac{a}{a}$, 即 $a > a$ 越 a 得 a

越 \sqrt{a} 因为 $a > a$, 即 $a > a$ 越 \sqrt{a}

例 员 越 越 设 $a_n > a_{n+1}$ 越 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ (灶越员圆...), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 a_n

证: 数列 $\{a_n\}$ 的单调有界性是很明显的, 因为 $a_n > a_{n+1}$ 越 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 越

$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$, 且 $a_n > a_{n+1}$ 即 $\{a_n\}$ 为单调减且有下界的数列, 故 $\{a_n\}$ 为收敛数列 援

怎越的求法与以上二例不同,因为若将等式怎越 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ 两端取极限,记

怎越则得到怎越,求不出怎,为此采用夹挤准则援

因为 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n}$,

得怎越 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n}$ 援

又怎越得怎越 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n}$ 援

问题怎越 如何理解函数的极限怎越及怎越的定义?如何利用数列的极限描述函数的极限?

答:由怎越的定义:“任给 $\epsilon > 0$ 存在正数 δ ,当 $x \in D_f$ 且 $x \in U_\delta(x_0)$ 时, $f(x) \in U_\epsilon(y_0)$ 恒成立”援知怎越包含了怎越与怎越,即当 δ 足够大时,怎必落在怎的 ϵ 邻域内援怎越与怎越不同,怎越是指 n 取正整数且无限增大;因此,若怎越必有怎越,反之,不能由怎越断言怎越或怎越,但若任取数列 $\{x_n\}$,当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow x_0$,且对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 皆收敛于 y_0 ,即恒有怎越,则可以断言怎越援

怎越的充分必要条件是怎越怎越援

例如,已知怎越 $\sqrt{\frac{1}{n}}$,求怎越援

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

故怎越不存在援

极限怎越的定义是“任给 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 当 $x \in D_f$ 且 $x \in U_\delta(x_0)$ 时, $f(x) \in U_\epsilon(y_0)$ 恒成立”援定义表明,当 x 落在 x_0 的足够小的去心邻域内时,对应的函数值 $f(x)$ 要落在 y_0 的充分小的邻域内援这里不考虑函数值 $f(x_0)$,也就是当 $x \rightarrow x_0$ 时,怎越的极限是否存在与怎在点 x_0 处的取值无关援

怎越也可以用数列的极限来描述援若怎越,则在怎越的定义域内任取收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$,其对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛于 y_0 ,即怎越援

反之 若在 x_0 的定义域内任取收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 恒有 $f(x_n)$ 越 $f(x_0)$ 越, 则必有 $f(x_0)$ 越 $f(x_0)$ 越

归纳以上 $x_n \rightarrow x_0$ 或 $x_n \rightarrow x_0$ 时 $f(x_n)$ 的极限, 有以下定理

定理 $f(x_0)$ 越 $f(x_0)$ 越的充分必要条件是, 对任意的数列 $\{x_n\}$, 若 $f(x_n)$ 越 $f(x_0)$ 越 ($x_n \rightarrow x_0$), 恒有 $f(x_n)$ 越 $f(x_0)$ 越

常常用以上定理论证 $f(x_0)$ (或 $f(x_0)$) 的存在性 例如, 找出两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $f(x_n)$ 越 $f(x_0)$ 越, $f(y_n)$ 越 $f(x_0)$ 越 ($x_n \neq y_n, x_n \neq x_0, y_n \neq x_0$), 但 $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越, 或 $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越, 则可以断言 $f(x_0)$ 不存在

再如, 证明 $f(x_0)$ 不存在

取 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$, $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越且 $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越, 取 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$, $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越

越且 $f(x_n)$ 越 $f(y_n)$ 越 ($x_n \neq y_n, x_n \neq x_0, y_n \neq x_0$) 越, 所以 $f(x_0)$ 不存在

问题 x_0 左、右极限在求极限时起什么作用? 何时要考虑左、右极限?

答 极限 $f(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f(x_0)$ 越 $f(x_0)$ 越, 因此在论证 $f(x_0)$ 是否存在时, 往往先分别考虑左、右极限 特别是分段函数, 在求分段点处函数的极限时, 必须考虑左、右极限 例如已给函数

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leq x_0 \\ \psi(x), & x > x_0 \end{cases}$$

则仅当 $f(x_0)$ 越 $\varphi(x_0)$ 越 $\psi(x_0)$ 越时, $f(x_0)$ 存在

例 $x_0 = 1$ 求 $f(x_0)$ 越 $f(x_0)$ 越

解: $f(x_0)$ 越 $\varphi(x_0)$ 越 $\psi(x_0)$ 越, 所以 $f(x_0)$ 越 $\varphi(x_0)$ 越

例 $x_0 = 1$ 求 $f(x_0)$ (葬为正常数)

解: 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 由于 $x < 1$ 故 $f(x) = \varphi(x)$, 于是 $f(x) \rightarrow \varphi(1)$ 即 $f(x_0)$ 越 $\varphi(1)$ 越

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, 由于 $x > 1$ 故 $f(x) = \psi(x)$, 于是 $f(x) \rightarrow \psi(1)$ 即 $f(x_0)$ 越 $\psi(1)$ 越

所以 $f(x_0)$ 不存在

例 $x_0 = 1$ 求 $f(x_0)$

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{y} = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y}} = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y}} = 1$ 不存在. 援

问题: 如何求复合函数的极限?

“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = x_0$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = A$ ”是否正确?

答: 结论不正确. 援如

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

取 $x \rightarrow 1$ 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$ 即 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$ 而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 援

再求复合函数 $f(\varphi(x))$ 的极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(\varphi(x)) = 0$ 援

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(\varphi(x)) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 援

关于复合函数的极限有以下两个定理. 援

定理 1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = x_0$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

定理 2: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = x_0$ 且当 $x \neq x_0$ 时 $\varphi(x) \neq x_0$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 则必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

上例中 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 且当 $x \neq 1$ 时 $\varphi(x) = 1$, 不满足定理 1 或定理 2 中的条件, 故不能得出相应的结论. 援将上例改成

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

则

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

此时 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$ 且 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(\varphi(x)) = 1$ 援

或改成

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

则复合函数 $f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

此时 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$ 且当 $x \neq 1$ 时 $\varphi(x) \neq 1$, 满足定理 2 的条件. 援

$\lim_{x \rightarrow 1} f(\varphi(x)) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 援

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

问题 员 无穷小量、无穷大量、函数有极限、有界函数、无界函数,这几个概念之间有什么关系?

答:关于这几个概念的关系,有以下几个定理 援

定理 员 若当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 是无穷大量,即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$) 即 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量 援 若 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 是无穷小量且 $f(x) \neq 0$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) 援

定理 圆 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) 的充分必要条件是 $f(x) > \alpha$ (或 $f(x) < -\alpha$), 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha = 0$)

α 是无穷小量 援

定理 猿 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则存在 x_0 的一个去心邻域 $U(x_0, \delta)$ (或 $x > M$), 在该邻域内 $f(x)$ 是有界的 援

反之, 函数在 x_0 的邻域上 (或 $x > M$) 有界, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数的极限未必存在 援 例如 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在 援

定理 源 有界函数与无穷小之积仍为无穷小 援

反之, 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $g(x)$ 为无穷小, 问 $f(x)g(x)$ 是否一定是有界函数 援 答案是肯定的 援 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 援 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 援

另外, 再看无穷大量与无界二者之间的关系 援 由无穷大量的定义知, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则在 x_0 邻域上 $f(x)$ 必无界 援 反之, 若 $f(x)$ 是无界函数, $f(x)$ 未必是无穷大量 援 如函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ \frac{1}{x}, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(x)$ 为无界函数, 但 $f(x)$ 不是无穷大量 援

问题 员 如何理解无穷小的阶与等价无穷小的概念? 在用等价无穷小的代换定理求极限时应注意什么?

答: 无穷小是指在自变量的某种变化过程中以零为极限的函数 援 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 而无穷小的阶是用 $f(x) \rightarrow 0$ 的速度来描述的 援 若 $f(x) \rightarrow 0$ 的速度比 $g(x) \rightarrow 0$ 的速度快, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 此时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小 援

例如 $x \rightarrow 0$ 时, 显然 $\frac{1}{x}$ 比 x 趋于零的速度快, 故 $\frac{1}{x}$ 是 x 的高阶无穷小, 也称 $\frac{1}{x}$ 为 x 的低阶无穷小 援

若两个无穷小 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小, 即 $f(x) \sim g(x)$

记作 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 以下定理可以更加明确“等价”二字的含义

定理 当 $\varphi \rightarrow \infty$ (或 $\varphi \rightarrow \infty$) 时, $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 与 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 是等价无穷小的充分必要条件是 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 原 $\alpha(\varphi)$ 是 $\beta(\varphi)$ (或 $\alpha(\varphi)$) 的高阶无穷小

证: 设 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 原 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 则

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = 1 \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\varphi)}{\alpha(\varphi)} = 1 \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = 1 \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\varphi)}{\alpha(\varphi)} = 1$$

反之 若 $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = 0$ 即

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = 0 \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\varphi)}{\alpha(\varphi)} = \infty$$

所以 $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = 0$ 即 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$

这个定理指出, 当且仅当 $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 其中 $\alpha(\varphi)$ 为较高阶无穷小时, $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$ 这就是说, 略去高阶无穷小, 则可以认为 $\alpha(\varphi)$ 就是 $\beta(\varphi)$, 这就是“等价”的含义. 因此在求两个无穷小之比的极限时, 可以用等价无穷小进行代换. 若 $\varphi \rightarrow \infty$ (或 $\varphi \rightarrow \infty$) 时, $\alpha(\varphi) \sim \beta(\varphi)$, $\gamma(\varphi) \sim \delta(\varphi)$ 则 $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\varphi)}{\delta(\varphi)}$

注意, 必须正确运用等价无穷小的代换定理, 将分子、分母作为一个整体来代换. 例如几个熟知的等价无穷小: 当 $\varphi \rightarrow 0$ 时, $\sin \varphi \sim \varphi$, $\tan \varphi \sim \varphi$, $1 - \cos \varphi \sim \frac{1}{2}\varphi^2$, $\ln(1+\varphi) \sim \varphi$, $e^{\varphi} - 1 \sim \varphi$, $\ln \frac{1}{1-\varphi} \sim \varphi$, $\ln \frac{1}{1+\varphi} \sim -\varphi$, $\arcsin \varphi \sim \varphi$, $\arctan \varphi \sim \varphi$ 等.

例如求 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, 不能因为当 $\varphi \rightarrow 0$ 时, $\sin \varphi \sim \varphi$, $\tan \varphi \sim \varphi$, 而认为 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\tan \varphi}{\varphi} = 1$. 实际上, 由于当 $\varphi \rightarrow 0$ 时, $\sin \varphi \sim \varphi$, $\tan \varphi \sim \varphi$ 都是等价无穷小, 故 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\tan \varphi}{\varphi} = 1$. 但并不是 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\tan \varphi} = 1$. 实际上,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\tan \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1$$

这表明 $\sin \varphi \sim \tan \varphi$ 是 φ 的同阶无穷小, 自然是 φ 的高阶无穷小.

又如求 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{1-\varphi}}{\varphi}$. 当 $\varphi \rightarrow 0$ 时, $\ln \frac{1}{1-\varphi} \sim \varphi$, 即 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{1-\varphi}}{\varphi} = 1$. 故 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{1-\varphi}}{\varphi} = 1$. 因此当 $\varphi \rightarrow 0$ 时, $\ln \frac{1}{1-\varphi} \sim \varphi$ 是等价无穷小,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{1-\varphi}}{\varphi} = 1$$

注意 :以上是将 $f(x)$ 整体作为无穷小来考虑找出它的等价无穷小的问题 怎样理解函数的连续性概念与间断点概念 ?

答 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义是 : $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义 ,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

按定义知 , $f(x)$ 在点 x_0 处连续应满足以下三个条件 :

(1) $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义 ;

(2) $f(x)$ 存在 ;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

因此只要以上三个条件中有一个不满足 , x_0 就是 $f(x)$ 的间断点 间断点有以下分类 :

(1) x_0 处 $f(x)$ 没有定义 ,或 x_0 是 $f(x)$ 定义域中的孤立点 ,在这种点处不能讨论 $f(x)$ 的连续性

(2) $f(x)$ 的极限不存在的点 ,例如函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处没有极限

按 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的间断点 这种间断点称为第二类间断点 (左、右极限至少有一个不存在)

(3) 若 x_0 是 $f(x)$ 的间断点 ,但在 x_0 处 $f(x)$ 的左右极限皆存在 ,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点

例如函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 第一类间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 ,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 ,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (或 $f(x)$ 在 x_0 无定义) ,则可以重新定义 $f(x)$ 在点 x_0 处的值 ,使 $f(x)$ 在点 x_0 连续 这种点 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点 ,也属于第一类间断点

例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义 ,但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 可以补充定义 $f(0) = 0$ 即构造函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续

又如 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 按 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

可改变 $f(0)$ 的值 ,令 $f(0) = 0$ 则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续