● 大学数学试卷剖析系列

高等数学试卷剖析

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内　容　简　介

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，数学教学一直以优秀闻名全国，这与有一套好的题卷也不无关系．本书选编了该校近年的16份本科生高等数学试卷，对每一道试题均作详解，典型题或难题并有题前分析、题后点评和一题多解，试卷末的考核内容分值表和抽样得分率，则可使读者了解考查的重点和试题的难易，有利于学生系统、重点地掌握知识点，并帮助教师组织课程教学．

本书可作为高等院校《高等数学》课程师生的教学辅导用书，也可供考研者参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学试卷剖析/上海交通大学数学系编．—上海：上海交通大学出版社，2006（2006重印）
（大学数学试卷剖析系列）
ISBN 7-313-04308-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．上…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第13632号

高等数学试卷剖析
上海交通大学数学系　编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路877号　邮政编码200030）
电话：64071208　出版人：张天蔚
上海颛辉印刷厂印刷．全国新华书店经销
开本：880mm×1230mm 1/32　印张：7.125　字数：200千字
2006年1月第1版　2006年3月第2次印刷
印数：5051—10100
ISBN7-313-04308-2/O·191　定价：12.00元

前　言

跨越3个世纪的百年高校——上海交通大学是我国“211工程”和“985工程”重点投资建设的重点大学．上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、药、管理等各科学生都具有扎实的数学基础．

历年来，上海交大的学生在国内外高校的数学竞赛中，屡屡获奖；在历届全国硕士研究生和工程硕士研究生的入学考试中，上海交大考生的数学平均成绩，总是名列榜首．这些成绩的取得，是因为上海交大有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队，特别是有一个教学核心．几十年来，他们始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验，搜集教学资料．今天的成绩，是长期积累的结果，是历史的沉淀和升华．

学好一门基础理论课程与顺利地通过这门课程的考试，两者的要求是不同的．前者要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容从何处来、用在何处、如何应用；后者是检验所学内容的掌握情况，注重课程内各概念和内容之间的联系，强调基本概念和基本方法，适当顾及应用题．这两者之间没有包含关系，所以顺利地通过考试也是一门学问．本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助．

常说学生怕考试，其实教师也怕考试，教师怕的是出的考卷不优秀．一份优秀的数学试卷，至少要具备以下几点：

（1）基本涵盖课程的所有内容，突出课程的重点；

（2）涉及基本内容之间的联系，有检验基本概念掌握情况的客观试题，有掌握基本方法情况的计算题和应用题，还要有考查学生综合能力的综合测试题；

(3) 既要符合课程的基本要求,又要体现学生的真实情况,不仅要使努力学习的学生能顺利地通过考试,还要突出优秀的学生,淘汰较差的学生;

(4) 学生的考试成绩符合总体平均值为 75 分左右的正态分布.

高等数学是大学数学中一门主要的基础理论课程,不仅各高等院校非数学专业的本科生因后继课程所需而必修,而且是硕士研究生、MBA 研究生、工程硕士研究生的入学考试的主要课程之一. 本书所收录的 16 份试卷,是近年来上海交大高等数学课程的试卷. 每份试卷后有考核内容的分值表,从中读者不难发现该课程考试的重点和对学生的要求. 作者在书中除了对每一试题给予详解外,还对解题过程中的常见错误、试题的其他解法、题目涉及的相关知识、本题的得分情况作了精当的点评. 编者希望本书对学生顺利地通过考试和教师较好地组织试卷有所帮助.

本书可以作为高等院校高等数学课程学生的教学辅导用书,也可以作为教师的教学参考用书. 书中试卷(一)至试卷(四)的剖析由王铭执笔;试卷(五)至试卷(八)的剖析由吴忠英执笔;试卷(九)至试卷(十二)的剖析由郑麒海执笔;试卷(十三)至试卷(十六)的剖析由钱芝蓁执笔. 本书的编写和出版得到了上海交大数学系和上海交大出版社的大力支持,出版社的同志并指导了本书的结构和编排工作,编者在此一并表示感谢. 最后还要感谢上海交大数学系同仁对历年命题所付出的艰辛劳动.

由于时间紧迫,又囿于编者的水平,书中如有错误或不妥之处,诚恳希望读者提出宝贵意见.

编　者

2005 年 10 月

于上海交通大学

目　　录

试　卷　(一)

——第一学期期中试卷

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x)$**是单调增函数,**$g(x)$**是单调减函数,且复合函数** $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$**有意义,则下列函数组中全为单调减函数的是** (　　)

(A) $f(f(x))$, $f(g(x))$;　　(B) $g(f(x))$, $g(g(x))$;

(C) $f(g(x))$, $g(f(x))$;　　(D) $g(g(x))$, $f(f(x))$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**存在,则下列极限一定存在的是** (　　)

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\alpha}$;　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$;

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$;　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$.

3. 当 $x\to 0$ **时,若** $y=\mathrm{e}^x-ax^2-bx-1$ **是比** x^2 **高阶的无穷小,则** (　　)

(A) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$;　　(B) $a=1$, $b=\dfrac{1}{2}$;

(C) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$;　　(D) $a=-1$, $b=-\dfrac{1}{2}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & (x>0),\\ x^2g(x) & (x\leqslant 0),\end{cases}$ **其中** $g(x)$**有界,则** $f(x)$**在** $x=0$ (　　)

(A) **极限不存在**;　　(B) **极限存在,但不连续**;

(C) **连续,但不可导**;　　(D) **可导**.

5. 设 $f(x)$**在**$[-1, 1]$**上连续,在**$(-1, 1)$**内可导,且有** $f(0)=$

0，$|f'(x)|\leqslant M$，则在$[-1,1]$上必有 (　　)

(A) $|f(x)|\geqslant M$；　　(B) $|f(x)|>M$；

(C) $|f(x)|\leqslant M$；　　(D) $|f(x)|<M$.

二、填空题(每题 4 分，共 20 分)

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $\mathrm{d}f|_{x=0}=$________.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的间断点是________，它们的类型分别为________________________.

3. $f(a)=2$，$f'(a)=3$，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$______.

4. 对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点$\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$处的切线方程是____________.

5. 函数 $f(x)=x\ln(x-1)$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式中，带$(x-2)^3$ 的项为________.

三、计算下列极限(15 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

2. $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\tan x)^{\tan 2x}$.

四、计算下列函数的导数(18 分)

1. 设 $y=(\cos 2x)^{\arctan x^2}$，求 y'.

2. 设 $\begin{cases}x=t\mathrm{e}^t,\\ \mathrm{e}^t+\mathrm{e}^y=2,\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

3. 设 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，求 $y^{(10)}(x)$.

五、(10 分)设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任意实数 x，y 满足

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

其中 $g(x)=\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$．求 $f(0)$，$f'(0)$，$f'(x)$.

六、(14 分)

1. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2\,002}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}$ 是不为零的有限数，试求 α 以及极限值．

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $U(0,\delta)$ 内具有二阶导数，且有

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^{3}}+\frac{f(x)}{x^{2}}\right]=0.$$

试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

七、证明题(8 分)

设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)=0$．试证：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{\xi}=2\,003f'(\xi)$．

试卷(一)考核内容分值表

考核内容	函数	极限和连续	导数和微分	微分中值定理和导数的应用
分值	3	25	39	33

关于试卷(一)的说明

试卷(一)每题点评中提到的得分率，即考生在该题上的平均得分与该题满分之比，其取值范围在 0 与 1 之间．

由于不同的考生群体水平是有差异的，他们在同一题上的平均得分也不同．因此，同一题目相对于不同的考生群体的得分率是不同的．本试卷所给出的得分率是对某一学院考生统计的结果．

得分率是反映试题难易程度的指标,对于数学考试而言,得分率在 0.3 以下的为难题,在 0.3～0.8 之间的为中等难度题,在 0.8 以上的为易题.

试卷(一)详解

一、选择题

1. 设 $f(x)$**是单调增函数,**$g(x)$**是单调减函数,且复合函数** $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$**有意义,则下列函数组中全为单调减函数的是** ( )

(A) $f(f(x))$, $f(g(x))$; (B) $g(f(x))$, $g(g(x))$;

(C) $f(g(x))$, $g(f(x))$; (D) $g(g(x))$, $f(f(x))$.

解 选 C.

方法 1 根据定义验证:设 $x_1 > x_2$**,则** $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $g(x_1) \leqslant g(x_2)$; $f(f(x_1)) \geqslant f(f(x_2))$, $f(g(x_1)) \leqslant f(g(x_2))$, $g(f(x_1)) \leqslant g(f(x_2))$, $g(g(x_1)) \geqslant g(g(x_2))$**,故选** C.

方法 2 取特殊函数:令 $f(x)=x$, $g(x)=-x$**,则** $f(f(x))=x$, $g(f(x))=-x$, $f(g(x))=-x$, $g(g(x))=x$.

(**本题得分率为** 0.83)

点评 本题考察函数基本性质.

2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$**存在,则下列极限一定存在的是** ( )

(A) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{\alpha}$; (B) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$;

(C) $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x)$; (D) $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin f(x)$.

解 选 B.

(**本题得分率为** 0.75)

点评 仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ **且** $\lim\limits_{x \to A} g(x)$ **存在时,**$\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$**才一定存在.**

3. 当 $x \to 0$ **时,若** $y = \mathrm{e}^x - ax^2 - bx - 1$ **是比** x^2 **高阶的无穷小,**

则 (　　)

(A) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$;　　(B) $a=1$, $b=\frac{1}{2}$;

(C) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$;　　(D) $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$.

解　选 A.

方法 1　$0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-ax^2-bx-1}{x}=1-b\Rightarrow b=1$,

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-ax^2-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-1}{2x}=\frac{1}{2}-a\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

故选 A.

方法 2　利用带皮亚诺余项的泰勒展开式:

$$e^x-ax^2-bx-1=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-ax^2-bx-1$$

$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2),$$

仅当 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ **时,才成立** e^x-ax^2-bx-1 **是比** x^2 **高阶的无穷小.**

(**本题得分率为** 0.71)

点评　对无穷小的阶进行估计无论是在计算还是在证明中都很重要,要能熟练地掌握这部分内容.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & (x>0),\\ x^2g(x) & (x\leqslant 0),\end{cases}$ **其中** $g(x)$**有界,则** $f(x)$**在** $x=0$ (　　)

(A) **极限不存在**;　　(B) **极限存在,但不连续**;

(C) **连续,但不可导**;　　(D) **可导.**

解　选 D.

$$f(0)=0,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2 g(x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}=0,$$

因此 $f(x)$在 $x=0$ 连续；

又
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)-0}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{2}=0,$$

因此 $f(x)$在 $x=0$ 可导 .

（本题得分率为 0. 28）

点评　当考察分段函数在分段点处的极限、连续性和可导性时，要分别考察单侧极限和单侧导数 .

5. 设 $f(x)$在$[-1, 1]$上连续，在$(-1, 1)$内可导，且有 $f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant M$，则在$[-1, 1]$上必有　（　　）

(A) $|f(x)|\geqslant M$；　(B) $|f(x)|>M$；

(C) $|f(x)|\leqslant M$；　(D) $|f(x)|<M$.

解　选 C.

对任何 $x\in[-1, 1]$，存在 $\xi\in(-1, 1)$，使得$|f(x)-f(0)|=|xf'(\xi)|\leqslant M$；考察 $f(x)=Mx$ 可知道 $f(x)$满足本题题设，且在$[-1, 1]$上有 $|f(x)|\leqslant M$，因此选 C 而不选 D.

（本题得分率为 0. 56）

点评　为正确解答本题，说明选项中的等号可以取到是必须的 . 通常这可以通过取特殊函数来加以说明 .

二、填空题

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $\mathrm{d}f|_{x=0}=$______.

解　$n!\mathrm{d}x$.

$f'(0)=\{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+x[(x+1)(x+2)\cdots(x+$

$n)]'\}|_{x=0}=n!$,

$$\mathrm{d}f|_{x=0}=f'(0)\mathrm{d}x=n!\mathrm{d}x.$$

（本题得分率为 0.87）

点评　若函数 $f(x)$和 $g(x)$在 $x=x_0$ 可导，且 $g(x_0)=0$，则

$$(f(x)g(x))'|_{x=x_0}=f(x_0)g'(x_0).$$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的间断点是________，它们的类型分别为____________________.

解　$x=0$ 是跳跃间断点，$x=-1$ 是无穷间断点，$x=1$ 是可去间断点.

$f(x)$在 $x=0$，$x=-1$，$x=1$ 处无定义．由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}=1;$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to -1^+}f(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

因此 $x=0$ 是跳跃间断点，$x=-1$ 是无穷间断点，$x=1$ 是可去间断点.

（本题得分率为 0.69）

点评　间断点的类型取决于两个单侧极限存在与否及相互关系.

3. $f(a)=2$，$f'(a)=3$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$______.

解　36.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[f(a+2h)+f(a-h)]\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$$

$$= 2f(a)\lim_{h\to 0}\left[2\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]$$

$$= 6f(a)f'(a) = 36.$$

（本题得分率为 0.77）

点评 这里用到了 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，从而在 $x=a$ 连续这一结论.

4. 对数螺线 $r=e^{\theta}$ 在点 $\left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是__________.

解 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

$\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta, \\ y=e^{\theta}\sin\theta, \end{cases}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$，因此切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}} = -(x-0)，即 x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

（本题得分率为 0.34）

点评 此题得分率较低，原因在于许多同学未意识到只有在直角坐标表示下，切线方程的公式才是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

5. 函数 $f(x)=x\ln(x-1)$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式中，带 $(x-2)^3$ 的项为________________.

解 $\frac{1}{6}(x-2)^3$.

令 $t=x-2$，则

$$x\ln(x-1)=(t+2)\ln(t+1)=(t+2)\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right]$$

$$=2t+\frac{1}{6}t^3+o(t^3)$$

$$=2(x-2)+\frac{1}{6}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

（本题得分率为 0.70）

点评 本题直接利用公式计算$\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$较繁，通常这时候可以利用麦克劳林公式进行间接计算．

三、计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 **方法 1** 令 $y=\frac{1}{x}$，则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\\
=&\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y^2}\\
=&\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2y}}-\frac{1}{\sqrt{1+y}}}{2y}\\
=&\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{1+2y}}{2y}\\
=&\lim_{y\to0^+}\frac{-y}{2y(\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+y})}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

方法 2

因为

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\\
=&\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\
=&\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\\
=&\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})},
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=-\frac{1}{4}$.

（**本题得分率为** 0.68）

点评　利用变量代换、分子和分母有理化等代数手段对被求极限的式子进行变形是求极限的基本手段之一.

2. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^3}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

（**本题得分率为** 0.81）

点评　利用带皮亚诺余项的泰勒公式进行替换是求不定型极限的重要手段之一．本题也可用罗必塔法则计算.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解　**方法 1**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(\tan x)^{\tan 2x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\sec^2 x}{-2\tan x\csc^2 2x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\sin 2x}=\mathrm{e}^{-1}.$$

方法 2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(\tan x)^{\tan 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\left[1+(\tan x-1)\right]^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{\tan x-1}{\cos 2x}\sin 2x}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\sec^2 x}{-2\sin 2x}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

（**本题得分率为** 0.89）