全国教育科学“十五”规划课题项目

高 等 数 学

（上　册）

主　编　李进金
副主编　吴炯圻
撰稿人　吴炯圻　何一农　李金龙　康淑瑰
王凤艳　王振芳　肖润梅

南 京 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册) / 李进金主编. —南京: 南京大学出版社,
2005.8
(新世纪地方高等院校专业系列教材)
ISBN 7-305-04472-5

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学—师范大学—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053923 号

丛 书 名 新世纪地方高等院校专业系列教材
书　　名 高等数学(上册)
主　　编 李进金
副 主 编 吴炯圻
出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
电　　话 025-83596923 025-83592317 传真 025-83686347
网　　址 http://press.nju.edu.cn
电子邮件 nupress1@public1.ptt.js.cn
sales@press.nju.edu.cn (销售部)
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×960 1/16 印张 16.75 字数 270 千
版　　次 2005 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 2 次印刷
印　　数 5001—10000
ISBN 7-305-04472-5/O·346
定　　价 20.10 元

* 版权所有,侵权必究
* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

本套《高等数学》教材是全国 23 所高校组成编委会编写的《新世纪地方高等院校专业系列教材》之一。

漳州师范学院副院长李进金教授(博士)为该编委会编委,担任本书主编。漳州师范学院数学系原系主任吴炯圻教授担任副主编。

参加编写单位有:漳州师范学院、雁北师范学院、陕西理工学院、南阳师范学院和衡阳师范学院等五所高校数学系。

本书编写的背景是:近几十年来,科技、教育领域都发生了十分可喜的变化,特别是计算机科学技术的突飞猛进、素质教育的逐步实施和高等教育的蓬勃发展,对当今的中国社会的影响极为深刻和广泛。面对新的形势,人们的教育思想、教育观念也跟着发生变化。为了适应新的形势的需要,《高等数学》的教材正在不断更新。目前流行的同济大学编写的《高等数学》第五版和中国人民大学编写的《微积分》(新版),这些都是很好的新教材。不过,这类教材似乎较适合于重点大学的工科或经济类,而如何编好适用于普通高校的教材仍是一个值得深入探讨的问题。为此,我们五所高校从 2003 年 9 月起着手编写这套面向普通高校的新教材。

本书阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用,适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生(少课时的专业对教材中附上星号 * 的章节可以选用或不用),也可供其他专业的师生教学参考。

本书由来自五所高校的具有丰富教学经验和较强教学研究能力的骨干教师负责或组织编写,经过在漳州师范学院 2004 级多个教学班试用,广泛征求意见,反复锤炼完善而成。新教材的特点是:

1. 在教育思想、教育观念上,适合推进素质教育,培养学生的创新精神和应用意识、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力。

2. 在教学内容上,在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下,努力吸收当前一些改革教材中成功的改革举措,融合多所高校先进的教学经验;注意文理渗透,体现微积分基本思想在理、工、经、管等领域中的应用。

3. 继承传统教材中结构严谨、逻辑清晰的优点,做到突出重点、详略得当、通俗易懂、便于自学。

全书原稿编写人员为:

第一、二章:雁北师范学院康淑瑰、王凤艳、王振芳和肖润梅老师;

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第三章：陕西理工学院李金龙老师；

第四、五章（包括附录的积分表）：南阳师范学院何一农老师；

第六章：漳州师范学院吴炯圻老师；

第七章：陕西理工学院王文良老师；

第八章：衡阳师范学院曹恒老师；

第九章：漳州师范学院唐振松老师；

第十、十一章：漳州师范学院陈跃辉老师。

主编、副主编负责组织、安排、协调工作，阅读全稿，提出总体编写思路、各阶段工作的计划、要求和修改方案。漳州师范学院吴炯圻、陈协彬、陈跃辉、唐振松、周戈、王旺根和余承依等老师共同完成内部审稿工作。统稿（包括内容、格式、插图等的修改、补充和完善等）工作主要由吴炯圻、陈跃辉和唐振松老师负责，全书的文字加工、润饰工作由吴炯圻老师完成。

漳州师范学院王桂芳教授等多位老师在该校 2004 级多个专业试用两学期，并提出了许多很有价值的修改意见与建议；太原理工大学邱宜坪教授在漳州师范学院应聘期间详细阅读了试用本，提出许多宝贵的意见与建议；马周明老师一直协助与各校编写人员之间的联络工作。谨此向他们表示衷心的感谢。同时，向支持本书编写、试用和出版的各单位有关领导和广大师生致谢。

本书在编写过程中，参考和引用了同类教材的许多资料。我们在书末列出主要参考文献，并借此机会向所有有关作者表示诚挚的谢意。

限于编者的学识水平和能力，书中可能仍有不足与错漏之处。欢迎使用本书的老师和读者不吝指正。

编　者

2005 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限 …… 1

§1.1 集合与函数的基本概念 …… 1

§1.2 极限 …… 17

§1.3 无穷小与无穷大、极限运算法则 …… 26

§1.4 极限存在准则、无穷小的比较 …… 32

§1.5 函数的连续性 …… 38

§1.6 闭区间上连续函数的性质 …… 45

总习题1 …… 49

第二章 导数与微分 …… 51

§2.1 导数的概念 …… 51

§2.2 函数的和、差、积、商的求导法则 …… 59

§2.3 反函数与复合函数的求导法则 …… 63

§2.4 高阶导数 …… 68

§2.5 隐函数与参数方程所确定的函数的导数 …… 72

§2.6 函数的微分 …… 77

总习题2 …… 87

第三章 微分中值定理与导数的应用 …… 89

§3.1 微分中值定理 …… 89

§3.2 罗必塔法则、泰勒公式 …… 95

§3.3 函数与曲线性态的研究 …… 105

§3.4 函数的极值与最大值、最小值 …… 111

§3.5 函数图形的描绘 …… 116

总习题3 …… 118

第四章 不定积分 …… 120

§4.1 不定积分的概念和性质 …… 120

§4.2 换元积分法 …… 126

§4.3 分部积分法 …… 137

§4.4 有理函数的积分 …… 144

总习题4 …… 152

第五章 定积分及其应用 …… 154

§5.1 定积分的概念和性质 …… 154

§5.2 微积分的基本定理 …… 161

§5.3 定积分的计算 …… 166

§5.4 广义积分 …… 172

§5.5 定积分在几何上的应用 …… 177

§5.6* **定积分在物理学和经济学上的应用举例** …… 186
总习题 5 …… 192
第六章　微分方程 …… 193
§6.1 **微分方程的基本概念** …… 193
§6.2 **可分离变量方程与齐次方程** …… 198
§6.3 **一阶线性微分方程** …… 205
§6.4 **可用降阶法求解的高阶方程** …… 209
§6.5 **二阶线性微分方程解的结构** …… 213
§6.6 **二阶常系数齐次线性方程** …… 216
§6.7 **二阶常系数非齐次线性方程** …… 219
§6.8* **二阶线性微分方程的应用** …… 225
总习题 6 …… 230
附录 1　几种常用曲线 …… 231
附录 2　积分表 …… 234

习题参考答案（上册） …… 246

第一章　函数与极限

现实世界普遍存在着矛盾和运动. 数学上常用变量以及变量之间的相互依赖关系(主要是函数关系)来描述这种矛盾与运动. 微积分学就是用极限方法来研究变量及其相互关系的一个数学分支.

§1.1　集合与函数的基本概念

§1.1.1　集合

1. 集合的基本概念

集合(简称为集)是数学的一个基本概念,在现代数学中起着非常重要的作用. 当研究范围明确时,集合通常理解为具有某种性质的事物的全体. 集合中的每一个事物称为该集合的元素. 某事物 a 与集合 E 具有下列两种关系之一:

(1) a 是 E 的元素,记作 $a \in E$;(2) a 不是 E 的元素,记作 $a \notin E$.

由有限个元素组成的集合,可将它的元素一一列举出来. 这种表示法称为枚举法. 例如,由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A,记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

对于一般的集合,通常采用性质描述法表示:设 E 是具有性质 P 的元素 x 的全体所组成的集合,就记作

$$E = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\} \text{ 或 } E = \{x \mid P(x)\}.$$

通常,以 $\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示整数集、有理数集、实数集和复数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,就称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

如果 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 同时成立,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$. 例如,设有集合 $A = \{-1, -2\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subset B$. 例如 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$. 如集合

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

规定空集是任何集 A 的子集,即 $\varnothing \subseteq A$.

2. 区间

设 a 与 b 是两个不同的实数,且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作(a, b),即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\},$$

其中 a 与 b 称为开区间(a,b)的端点. 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作$[a, b]$,即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

其中 a 与 b 称为闭区间$[a, b]$的端点.

又,数集 $[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 均称为半开区间,a 与 b 称为它们的端点.

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

类似地,我们可以定义无限区间

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$$

等. 可将区间在数轴上表示出来,如图 1-1:

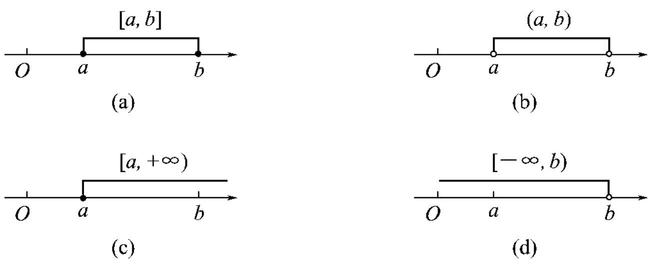

图 1-1-1

3. 邻域

对于实数 a 及正数 δ,开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为 a 的(以点 a 为中心、以 δ 为半径的)δ 邻域,记为 $U(a;\delta)$,即

$$U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

如图 1-1-2.

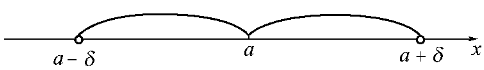

图 1-1-2

数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为点a的去心δ邻域,记为$\mathring{U}(a;\delta)$. 当不强调δ的大小时,a的δ邻域和δ去心邻域分别简称为a的邻域和去心邻域,并分别记作$U(a)$和$\mathring{U}(a)$.

§1.1.2 函数的基本概念

1. 函数的定义

日常生活中我们会遇到各种各样的量,如温度、湿度、浓度、密度、电流、电压、面积、体积等. 宇宙间一切事物都在不断变化,变化是绝对的,不变是相对的. 例如,在含一定盐量的盐水中逐渐加入水,则在加水的过程中,盐水的含水量及浓度均在逐渐变化,这种变化着的量称为变量. 上述过程中的含盐量没有发生变化,这种不变的量称为常量.

通常,变量用字母x, y, z, t, s等表示,常量用字母a, b, c, d等表示.

在某个自然现象或技术过程中,往往同时遇到两个或更多个的变量. 这些变量不是孤立地在变化,而是互相联系、互相依赖且循着一定的规律在变化. 下面先考察几个例子.

例 1 圆的面积S与它的半径r之间的关系由$S=\pi r^2$确定,即对任意的$r\in[0,+\infty)$,圆面积S相应有一个确定的值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为t,落下的距离为s. 假定开始下落的时刻为$t=0$,那么,s与t之间的关系由如下公式所确定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\geqslant 0.\ (\text{其中 } g \text{ 是重力加速度,常量})$$

假定物体着地的时刻为$t=T$,则当时间t在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离s的相应数值.

例 3 在货船的船头下部常看到表示货轮吃水深度的吃水线. 货轮吃水越深,说明排水量越大,相应地货轮装的货物也越多. 某货轮吃水深度与排水量的对应关系如下表所示:

吃水深度(m)	3	4	5	6	7	8
排水量(t)	5 020	7 225	9 275	11 475	13 750	16 125

以上三个例子都反映了在某一变化过程中有着两个互有联系的变量,当其中一个变量在某个数集内取值时,按一定的对应法则,另一个变量在另一数集内有唯一的一个值与之对应. 两个变量间的这种对应关系

就是函数概念的实质.

定义 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集,若对 D 中的每一个 x,按照对应法则 f ,实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一的数 y 与之相对应,则称 f 为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数,记作

$$f:D\to\mathbf{R},$$

上述 y 与 x 之间的对应关系记作 $y=f(x)$,并称 y 为 x 的函数值.若把 x,y 看成变动的量,则 x 称为自变量,y 称为因变量;D 称为函数的定义域;当 x 取遍 D 中一切数时,与它对应的 y 组成的数集 $f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.显然,值域 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,是变量 y 的变化范围.

由定义可知,例 1 的对应关系确定了一个定义在 $[0,+\infty)$ 上以 r 为自变量的函数;例 2 确定了一个定义在 $[0,T]$ 上以 t 为自变量的函数;例 3 则确定了一个定义在数集 $\{3,4,5,6,7,8\}$ 上以吃水深度为自变量的函数.

几点说明:

(1) 为了使用方便,我们将符号"$f:D\to\mathbf{R}$"记为"$y=f(x)$",并称"$f(x)$是 x 的函数(值)".当强调定义域时,也常记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

(2) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的符号 f 也可改用其他字母,例如"φ","F"等等.这时函数就记为 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$,等等.

(3) 用 $y=f(x)$ 表示一个函数时,f 所代表的对应法则已完全确定,对应于点 $x=x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

例如,设 $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$,它在点 $x=0$,$x=-2$ 的函数值分别为

$$y\big|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2,\ y\big|_{x=-2}=\sqrt{4-(-2)^2}=0.$$

(4) 从函数的定义知,定义域和对应法则是函数的两个基本要素,两个函数相同当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(5) 在实际问题中,函数的定义域可根据变量的实际意义来确定;但解题中,对于用表达式表示的函数,其省略未表出的定义域通常指的是使该表达式有意义的自变量取值范围.

例 4 求函数 $y=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{3x-2}$ 的定义域.

解 要使函数式子有意义,x 必须满足 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\3x-2\neq 0,\end{cases}$ 于是,所求函

数的定义域为

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{2}\text{ 且 }x\neq\frac{2}{3}\right\}\text{或 }D=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right).$$

2. 函数的表示法

(1) 解析法

当函数的对应法则用数学式子表示时,这种表示函数的方法称为解析法. 如

$$y=x^2-2x+3,\ x>1;\ y=\frac{1}{1-x^2},\ |x|<1.$$

都是解析法表示的函数,这将是我们今后表达函数的主要形式. 又如

例 5 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记为 $y=[x]$,则 $\left[\frac{3}{4}\right]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$[-2]=-2$,$[-4.6]=-5$. 这个函数称为取整函数.

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示,如例 6、例 7.

例 6 $y=\begin{cases}x^2, & x\in(0,+\infty),\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 1-x, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$

例 7 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

例 8 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$ 易知,对于任何实数 x,都成立着 $x=(\operatorname{sgn}x)|x|$. 这个函数称为符号函数.

如例 6、例 7、例 8 这种形式的函数,称为分段函数.

(2) 列表法

若函数 $y=f(x)$ 采用含有自变量 x 的值与函数 $f(x)$ 对应值的表格来表示,则称这种表示函数的方法为列表法. 如上述例 3 及通常所用的三角函数表、对数表等等,都是用列表法表达函数的例子.

(3) 图像法

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$,对应的函

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

数值为 $y=f(x)$. 这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标,就在 xOy 平面上确定了一点(x, y). 当 x 遍取 D 上的每一个数值时,就得到平面点集

$$C=\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\},$$

称其为函数 $y=f(x)$ 的图像. 采用图像给出函数的方法称为图像法. 图 1-1-3,图 1-1-4 与图 1-1-5 就是用图像法分别表示取整函数、绝对值函数、符号函数的例子.

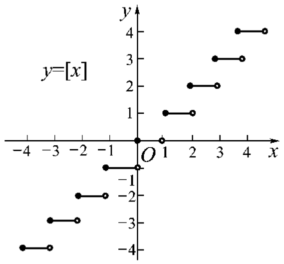

图 1-1-3

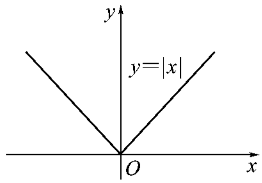

图 1-1-4

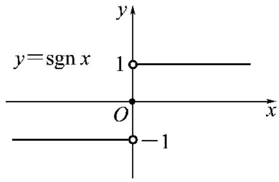

图 1-1-5

§1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某一实数集 D_1 上有定义(即 D_1 是 $f(x)$ 的定义域 D 的子集),若存在常数 M(或 m)使得对于一切 $x \in D_1$,都有不等式

$$f(x) \leqslant M(\text{或 } f(x) \geqslant m)$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D_1 有上界(或有下界),同时称 M 为 $f(x)$在 D_1 的一个上界(或 m 为 $f(x)$在 D_1 的一个下界). 若 $f(x)$在 D_1 既有上界又有下界,则称 $f(x)$在 D_1 有界,或 $f(x)$在 D_1 是有界函数,否则,则称函数 $f(x)$在 D_1 上无界,或称在 D_1 上函数 $f(x)$是无界函数.

如三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是有界的,因为对一切实数 x,有 $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$. 函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$无界(没有上界),在区间$[-1, 1]$上有界. 函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0, 1)$无界(没有下界),但在区间$(1, 3)$有界.

由定义可知,函数 $f(x)$在 D_1 有界当且仅当存在一个常数 $K>0$,使得

$$|f(x)| \leqslant K, x \in D_1.$$

2．函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是实数集 D. 若对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且满足

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是偶函数. 若对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称(如图 1-1-6)，奇函数的图像关于坐标原点对称(如图 1-1-7).

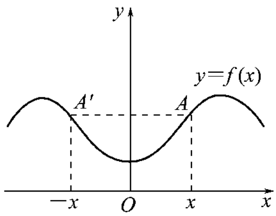

图 1-1-6

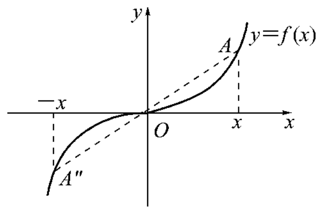

图 1-1-7

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数，而函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

3．函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某一实数集 D 上有定义. 若对于任意的 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，**则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加；**

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，**则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少.**

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

注 把(1)中的条件改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上不减；把(2)中的条件改为 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立时，则称 $f(x)$ 在 D 上不增. 不增与不减的函数统称为广义单调函数. 本书主要涉及单调函数(也称为“严格单调函数”)，把广义单调函数可能具有的类似性质留给读者自行探讨.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；但在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

4．函数的周期性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为实数集 D. 若存在一个非零的数

T,使得对于任意 $x \in D$, 当 $x \pm T \in D$ 时

$$f(x \pm T) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

显然,若 T 为 $f(x)$的一个周期,则 $2T,\ 3T,\ 4T,\ \cdots$也都是它的周期,故周期函数有无限多个周期. 若在周期函数 $f(x)$的所有正周期中有一个最小者,则称这个最小者为函数 $f(x)$的最小正周期. 通常所说的周期就是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的函数.

并非每一个周期函数都有最小正周期. 如,对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

任意有理数都是它的周期,但没有最小正周期.

§1.1.4 反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的. 我们不仅需要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的情况,有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况. 例如,自由落体下落的距离 s 与时间 t 的关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,\ t \in [0,\ T], \tag{1.1.1}$$

这时 s 是 t 的函数. 但是,如果问题是要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间 t,那就是由(1.1.1)解出 t,把它表示为 s 的函数

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}},\ s \in [0,\ H], \tag{1.1.2}$$

其中 H 是物体在开始下落时与地面的距离. 由(1.1.1)和(1.1.2)这对函数启发我们导出反函数的概念.

定义 设已知函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的值域为 $f(D)$. 若对于 $f(D)$中每一个值 y,D 中有唯一确定的值 x 使得 $f(x) = y$, 就在 $f(D)$上定义了一个函数,称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记为

$$x = f^{-1}(y),\ y \in (f(D).$$

$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数. 习惯上把自变量记为 x,因变量记为 y,所以反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也可写作 $y = f^{-1}(x)$. 相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 而言,原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 容易看出,在同一坐

标平面上,反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-1-8.

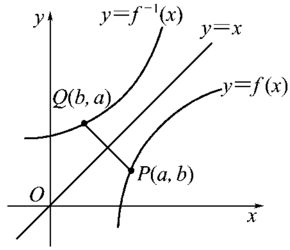

图 1-1-8

$y=f(x)$ 要满足什么条件才能保证其反函数一定存在呢? 根据定义可推出如下的反函数存在定理.

定理 单调函数必有反函数. 单调增加的函数的反函数必单调增加,单调减少的函数的反函数必单调减少.

例 9 函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,它的反函数 $y=\sqrt{x}$ 在其定义域 $[0,+\infty)$ 上也是单调增加的函数.

§1.1.5 复合函数

在许多自然现象中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量联系起来的.

例 10 某汽车行驶 10 t,每 km 耗油量为 0.2 L,行驶速度为 60 km/t. 于是汽车在行驶过程中,耗油量 y 是行驶距离 s 的函数

$$y=f(s)=0.2s,\ s\in[0,+\infty),$$

而行驶距离 s 又是行驶时间 t 的函数

$$s=g(t)=60t,\ t\in[0,10].$$

因此,汽车的耗油量 y,通过中间变量 s 与时间 t 建立了函数关系

$$y=0.2s=0.2\times 60t=12t,\ t\in[0,10],$$

在这个例子中,y 与 t 的对应关系是由两个函数 $y=f(s)$ 与 $s=g(t)$ 复合而成的.

一般地,我们有以下定义:

定义 已知两个函数

$$y=f(u),\ u\in E;\ u=g(x),\ x\in D.$$

设 $D_1=\{x\mid g(x)\in E,\ x\in D\}$ 是非空集,那么通过下式

$$y=f(g(x)),\ x\in D_1$$

确定的函数,称为是由函数 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为集 D_1,变量 u 称为中间变量. $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的复合函数也常记做 $f\circ g$,即

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x)),\ x\in D_1.$$

例 11 设函数 $y=\sqrt{u}$, $u\in E=[0, +\infty)$ 与 $u=1-x^2$, $x\in D=(-\infty, +\infty)$. 求复合函数.

解 设 $f(u)=\sqrt{u}$, $g(x)=1-x^2$. 那么

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \mid g(x)\in E, x\in D\} \\ &= \{x \mid 1-x^2\in[0, \infty), x\in(-\infty, +\infty)\} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

因此得到的复合函数为

$$y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1, 1].$$

更一般的情形是,复合函数 $f\circ g$ 可以只选 D_1 的一个子集 D_2 作为定义域,即不必要求 $D_2=D_1$,只要保证 $g(D_2)\subset E$ 即可.

复合函数不仅可以由两个函数,也可以由任意有限个函数相继进行有限次复合而成. 例如, $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 就是由 $y=\arcsin w$, $w=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$ 复合而成的,其中 w 和 u 都是中间变量.

§1.1.6 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数

函数

$$y=c \quad (\text{其中 } c \text{ 是常数})$$

叫做常数函数.

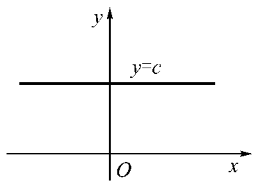

图 1-1-9

常数函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,它的图像是通过点$(0, c)$且与 x 轴平行的直线. 如图 1-1-9.

(2) 幂函数

函数

$$y=x^{\mu} \quad (\text{其中 } \mu \text{ 是常数})$$

叫做幂函数.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域根据 μ 的取值而定. 例如:当 $\mu=3$ 时, $y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$;当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时, $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是$[0, +\infty)$;当 $\mu=-\dfrac{1}{2}$ 时, $y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是$(0, +\infty)$,但无论 μ 取什么值,幂函数在$(0, +\infty)$内总有定义.

当 $\mu=1, 2, 3, -1, \frac{1}{2}$ **时的幂函数** $y=x^{\mu}$ **为最常见. 它们的图像如图** 1-1-10 **所示.**

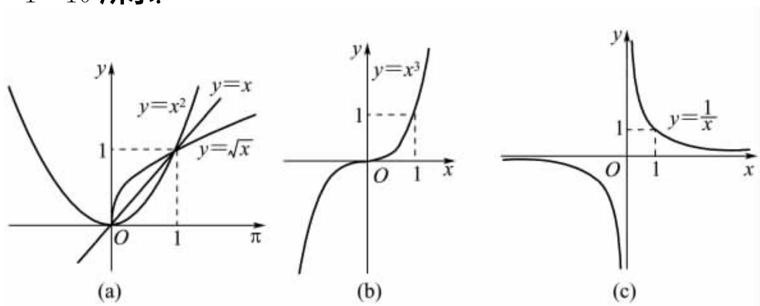

图 1-1-10

(3) **指数函数**

函数

$$y=a^{x}\ (\text{其中 } a \text{ 是常数且 } a>0,\ a\neq 1)$$

叫做指数函数,它的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

因为对于任意实数值 x**,总有** $a^{x}>0$**,又** $a^{0}=1$**,所以指数函数的图像总在** x **轴的上方,且通过点**$(0, 1)$.

若 $a>1$**,指数函数** a^{x} **是单调增加的;若** $0<a<1$**,指数函数** a^{x} **是单调减少的. 因** $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}=a^{-x}$**,故** $y=a^{x}$ **的图像与** $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$ **的图像关于** y **轴对称(如图** 1-1-11).

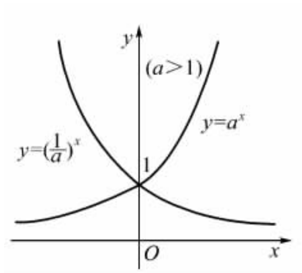

图 1-1-11

(4) **对数函数**

函数

$$y=\log_{a}x$$

$$(\text{其中 } a \text{ 是常数且 } a>0,\ a\neq 1)$$

叫做对数函数,它的定义域是$(0, +\infty)$**. 又由于** $\log_{a}1=0$**,所以对数函数的图像总在** y **轴的右方,且通过点**$(1, 0)$**(如图** 1-1-12).

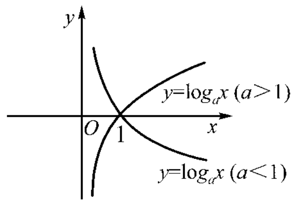

图 1-1-12

若 $a>1$**,对数函数** $\log_{a}x$ **是单调增加的;若** $0<a<1$**,对数函数** $\log_{a}x$ **是单调减少的.**

(5) **三角函数**

一般而言,三角函数有:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com