21 世纪新理念高职高专规划教材

# 高 等 数 学

## （上册）

李 颖 李关民 王键闻 郭 颖 编

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）／李颖，李关民，王键闻，郭颖编. — 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
21世纪新理念高职高专规划教材
ISBN 7-81102-298-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李… ②李… ③王…　④郭…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第091081号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：170mm×228mm
印　　张：15
字　　数：288千字
出版时间：2006年8月第1版
印刷时间：2006年8月第1次印刷
责任编辑：张德喜　　责任校对：刘乃义
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：24.00元

# 中国高等职业技术教育研究会东北分会
# 教材建设指导委员会

# 总　　序

2003 年 12 月 19 日至 20 日，全国人才工作会议在北京召开。中共中央总书记、国家主席胡锦涛在会议上发表的重要讲话中指出："要进一步完善普通教育、职业教育、成人教育和高等教育相衔接的教育体系，完善继续教育和培养制度，建立健全人才培养机制。"

1999 年，江泽民同志在第三次全国教育工作会议上强调指出："努力办好各级各类职业技术教育，是一篇大文章。""各地各部门要狠狠抓它十年、二十年，必会大见成效。"

1993 年，国务院发布了《中国教育改革和发展纲要》，把职业教育确定为我国教育制度的重要组成部分，并对职业教育的改革和发展提出了明确的要求。

20 世纪 80 年代，时任国务院副总理的李鹏同志在分管教育工作时，把我国的教育分为"四大块"：一是基础教育，二是高等教育，三是职业教育，四是成人教育。他把职业教育摆在了十分重要的位置。

党中央、国务院高度重视职业教育的发展。从 1993 年中共中央、国务院发布《中国教育改革和发展纲要》，到 1996 年《中华人民共和国职业教育法》的颁布和实施，再到 2002 年《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》出台，十多年来，党中央、国务院制定了一系列推动职业教育发展的重大方针政策。现在，职业教育体系框架业已基本形成，多层次、多渠道、多种类的职业教育网络也初具规模。各级各类职业学校为社会主义现代化建设事业培养了 3500 万余名高素质劳动者和实用人才，涉及到面向第一产业、第二产业和第三产业的各类专业，明显地改善了各行业人才队伍的结构，从整体上提高了各行业劳动者的文化素质和技术素质，对于促进我国经济和社会的发展、服务业质量的提高和扩大就业起了重大作用。

目前，影响高等职业教育培养目标的微观因素较多，但归结起来主要有两个方面：一是高等职业教育师资队伍的建设情况，二是适合本地区、本专业高职教育教学需要的教材建设情况。

就职业教育的师资而言，国家要求职业学校的教师应该既会理论教学，又具有实际操作技能，能进行实践教学。提出要建设一支"双师型"的职业教育师资队伍。具体

来说，就是：一是在职业学校专任教师中要有一部分教师既能教授理论，又能传授生产实践技能，具备“双师”素质；二是这支队伍中，应该有一批从企事业单位聘请来的工程技术人员和“能工巧匠”，由他们指导学生进行实际操作训练，形成一支“双师型”教师队伍。在教育部的高度重视和关心下，现在业已建成了52个全国重点建设职教师资培训基地和6个依托企业的职教师资技能培训示范单位，各地区也相应建立了一批省级师资培训基地，初步形成了以全国重点基地为骨干、省级基地为基础的职教师资培养和培训网络。这些师资培训基地所进行的大量有针对性的专门培训，在促进教师学历达标、学位提升和能力提高等方面发挥了重要作用，为21世纪我国职业教育的发展提供了有力的支持和保障。

当前，我国高等职业教育虽然有了长足的发展，但是，适合本地区、本专业高职教育教学需要的配套教材应该说还不够健全。当前一些地区普遍面临的高职毕业生就业难的问题，可以说与目前缺乏能够突出高职特色的教材有一定关系，培养能力型、创新型人才，教材的内容是十分重要的因素之一。我们可以把一部分课程作为突破口，通过科学的规划和组织，在一段时间内，逐步形成融专业课、专业基础课和公共课为一体的高职教育教材体系。教材内容的选取应贴近社会需求，有利于学生能力的提高，为毕业生就业创造有利条件。

根据教育部《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司〔2000〕19号）的精神，教材建设工作应当在继承原有教材成果、汲取高职高专院校培养高等技术应用性专门人才和教材建设成功经验的基础上，围绕《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》，突出高职高专教育教材的鲜明特色。我们此次推出的《21世纪新理念高职高专规划教材》正是按照这一指导思想，在已出版的《高等职业技术教育系列教材》的基础上，结合东北地区高职高专院校特点和人才培养需求的具体情况，进行的一次具有重要意义的尝试。在这套规划教材开发过程中，从教材建设指导委员会到每位编著者，都认真考虑了高职教育的岗位针对性和适应性的需求，充分体现以就业为导向，围绕振兴东北老工业基地的人才培养目标，进行有益的探索。诚挚地希望东北分会的会员学校能够广泛地使用这套规划教材，并在使用中不断地完善，使之为东北地区乃至全国高职教育的发展起到积极的推动作用。

中国高等职业技术教育研究会东北分会<br>教材建设指导委员会<br>2004年2月

# 前　言

本套教材是受东北大学出版社的委托，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专数学教改经验的基础上，结合对国内外同类教材的发展趋势的分析而编写的。

本套教材分上册和下册，上册包括一元函数微积分学、微分方程，下册包括空间解析几何、多元函数微积分学、级数、线性代数、拉普拉斯变换、概率论与数理统计。本套教材适用于招收三年制、两年制高职工科院校和专科学校教学之用，同时也可供一般工程技术人员参考。

本套教材在编写过程中紧密围绕高职的培养目标，以“应用为目的，必需、够用为度”的教学原则，结合高职高专学生的实际，在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，以适度淡化深奥的数学理论，并采用数形结合的方法，直观地讲解概念、定理，使教材易教易学。

本书为上册，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程。书后附有习题参考答案及常用不定积分公式。

本书由沈阳工程学院李颖、李关民、王键闻、郭颖编写，其中第一章由李颖编写，第二章、第三章由李关民编写，第四章由郭颖编写，第五章、第六章由王键闻编写。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，希望广大读者给予批评和指正。

编　者

2006 年 5 月

# 目　　录

# 第一章　极限与连续

微积分研究的对象是函数，所使用的基本研究方法是极限方法，所涉及的主要函数是连续函数．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

## 1.1　函　数

### 1.1.1　函数的概念

在同一个自然现象或技术问题中，往往同时有几个量在变化着．这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．下面就某个变化过程中有两个变量的情形举两个例子．

**例 1**　圆的面积与它的半径之间存在着相依关系，这种关系由公式

$$A=\pi R^2$$

给定．当半径 $R$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 $A$ 的相应数值．

**例 2**　自由落体运动．设物体下落的时间为 $t$，下落的距离为 $s$，假定开始下落的时刻 $t=0$，那么 $s$ 与 $t$ 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 $g$ 是重力加速度．假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 $t$ 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一个数值时，由上式就可以确定下落距离 $s$ 的相应数值．

抽去上面例题中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质．

**定义**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空实数集，如果存在确定的对应法则 $f$，使得对于任意的 $x\in D$，都有确定的实数 $y$ 与它对应，则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的函数．记作

$$y=f(x).$$

$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，数集 $D$ 称为函数的定义域.

当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与之对应的 $y$ 的数值称为函数值，记作

$$f(x_0)\quad 或\quad y\big|_{x=x_0}.$$

当 $x$ 取遍 $D$ 中的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域.

$f$ 是函数符号，它表示 $y$ 与 $x$ 的对应规则，有时也可用其他字母表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.

对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时，它们才表示同一个函数.

**例 3** 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$.

**例 4** 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$.

### 1.1.2 具有某种特性的函数

**(1) 有界函数**

设函数 $y=f(x)$ 在集合 $D$ 上有定义，如果存在一个正数 $M$，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是有界的，否则是无界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为取 $M=1$，无论 $x$ 取何值，总有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立.

函数的有界性不仅与函数本身有关，还取决于自变量的取值范围. 例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，它在区间 $(0,+\infty)$ 内无界，但在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 内是有界的.

**(2) 单调函数**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有定义，如果对于任意的 $x_1$，$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上是单调增加的；如果对于任意的 $x_1$，$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上是单调减少的.

使函数 $f(x)$ 保持单调增加或单调减少的区间称为 $f(x)$ 的单调区间. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

(3) 奇(偶)函数

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，如果对于任意的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果对于任意的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

例如，$y=x$，$y=\sin x$ 均为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$ 均为 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数；而 $y=\sin x+\cos x$ 为非奇非偶函数.

(4) 周期函数

设 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个不为零的数 $l$，使得对于任意的 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，$l$ 称为 $f(x)$ 的周期. 显然，$2l$，$3l$ 等也是 $f(x)$ 的周期. 这就是说，周期有无穷多个. 通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

(5) 反函数

函数关系中的两个变量(自变量和因变量)，其地位是不同的. 但在实际问题中，两个变量中哪个看作自变量，哪个看作因变量，并不是绝对的，这就引出了反函数的概念.

对于单值函数 $y=f(x)$，设其定义域是实数集 $D$，值域是实数集 $W$，若对

于任意的 $y\in W$，通过关系式 $y=f(x)$，都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，则这样确定的以 $y$ 为自变量，以 $x$ 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

可以看出，定义在实数集 $D$ 上的单调的函数必有反函数.

为了研究方便，对于反函数 $x=\varphi(y)$，习惯上仍选用 $x$ 作为自变量，$y$ 作为因变量，写成 $y=\varphi(x)$.

在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

## 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\ln(x+1)$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(4) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$.

3. 下列函数哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=3x^2-x^3$；　(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

4. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-5)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=x\cos x$；　(4) $y=\sin^2 x$.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=1+\ln(x+2)$.

6. 设有一块边长为 $a$ 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一个无盖的盒子，试将盒子的体积 $V$ 表示成小正方形边长 $x$ 的函数，并求此函数的定义域.

# 1.2　初等函数

## 1.2.1　基本初等函数

下列五类函数统称为基本初等函数：

幂函数　　$y=x^{\alpha}$（$\alpha$ 是常数）；

指数函数　$y=a^{x}$（$a$ 是常数，且 $a>0$，$a\neq 1$）；

对数函数　$y=\log_a x$（$a$ 是常数，且 $a>0$，$a\neq 1$）；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，

$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，

$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

这些函数在中学数学课中已比较详细地介绍过，这里不重复了.

## 1.2.2　初等函数

(1) 复合函数

进行函数研究时，把某些函数看作是由几个函数复合而成的复合函数，这样对函数的研究会带来方便.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示 $y$ 是 $x$ 的函数. 如果我们引进辅助变量 $u$，$u=1-x^2$，我们便说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地，如果给定两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域全部包含在 $y=f(u)$ 的定义域内，那么通过 $u$ 的联系，$y$ 也是 $x$ 的函数，称此函数是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f(\varphi(x)),$$

其中 $u$ 称为中间变量.

**例 1**　设 $y=u^3$，$u=\sin x$，由于 $u=\sin x$ 的值域 $[-1,1]$ 全部包含在 $y=u^3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，所以可得复合函数 $y=\sin^3 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

**例 2**　设 $y=\arcsin u$，$u=2x+1$，由于 $u=2x+1$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 不完全在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 中，所以这两个函数在复合成复合函数

$y=\arcsin(2x+1)$时，应限制 $u=2x+1$ 的定义域，使其值域不超过 $[-1,1]$．例如，可使 $u=2x+1$ 的定义域为 $[-1,0]$．

构成复合函数的函数可以多于两个．例如 函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\cos x$ 复合以后就构成复合函数 $y=(\sin(\cos x))^2$．这时 $u$ 和 $v$ 都是中间变量．

**例 3** 将下列函数拆成简单函数的复合形式：

① $y=(3x+2)^8$；　　② $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$．

**解** 所谓简单函数，是指基本初等函数或由基本初等函数及常数经四则运算而得到的函数．

① 令 $u=3x+2$，那么 $y=u^8$．所以 $y=(3x+2)^8$ 是由 $y=u^8$，$u=3x+2$ 复合而成的．

② 同理可得：$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$是由$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{x}$复合而成的．

**(2) 初等函数**

**定义** 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算或有限次的复合步骤所构成的，且能用一个数学式子表示的函数称为初等函数．

例如，$y=\cos x^2$，$y=\sin^3x$，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 都是初等函数．

### 习题 1.2

1．设 $f(x)$ 的定义域为闭区间 $[0,1]$，求下列复合函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(x+a)$ $(a>0)$；　(3) $f(\sin x)$．

2．在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；　(2) $y=\sin u$，$u=2x$；　(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$；

(4) $y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$；　(5) $y=\arcsin u$，$u=\dfrac{1}{x}$．

3．判断下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{\tan x}$；　(2) $y=(3x+5)^8$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-\cos x}$；　(4) $y=\lg\cos\dfrac{x}{3}$．

## 1.3 极　限

极限概念是在研究某些实际问题的精确解中应运而生的，它是微积分学中最基本的概念．

### 1.3.1 数列的极限

观察下面的数列：