新锐丛书

21 世纪高职高专规划教材

高 等 数 学

(上)

主编　　陈誌敏　胡成龙

主审　　吴　翊

復旦大學出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部高等职业教育数学课程的基本要求与课程改革精神编写而成的.全书共分上、下两册,内容包括:一元函数微分学及其应用、一元函数积分学、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、线性代数、概率统计、数学实验.

本书的特色在于:一、保持传统高等数学的知识点;二、增加 Mathematica 软件操作内容,且每个章节内容中各含一节数学实验;三、采用模块化设计,补充了线性代数和概率统计,以便于不同专业选用;四、每章后附有数学家简介;五、习题分两个部分,(A)为基础题,(B)为提高题.

本书内容充实,体系新颖.特别是增添的"数学实验",强调理论与实际相结合,这些都十分有利于高职高专类学生对基础知识的学习和理解,有利于培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力.

本书可供高等职业技术学院、高等专科学校相关专业的师生使用,同时也可作为学习数学软件 Mathematica 的入门教材.

序

当前，我国正处于新型工业化时期，对人才的需求呈多元化、多层次的态势，这为高职高专学校的人才培养带来了新的契机．经济与社会的发展要求高职高专毕业生具有基础理论知识适度、技术应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点，因此，在培养优秀理论型、研究型人才的同时，对应用型技术人才的培养就成为高职高专教育的首要目标．瞄准这个目标办好高职高专，既能满足人才市场的需要，又能促进高职高专学校自身的蓬勃发展．

高等数学是高职高专的一门主要的基础课程，出版一套适合高职高专教学需要的高等数学教材，无疑是有着重大意义的事情．值得庆幸的是，现在呈现在读者面前的这套《高等数学》正是这样一套教材．

这套教材与其他教材相比，具有以下几点明显的优势和特色：

1．科学性

这套教材整个体系保持传统高等数学的严谨，涵盖所有必需的知识点．内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握．

2．先进性

这套教材在遵循教育部《高职高专教育基础课程基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》精神的前提下，充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科新思想、新趋势的材料，增加了“数学实验”和“数学家简介”等部分．特别是“数学实验”部分，不仅充实了教材内容，而且有助于提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力．

3．实用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具．这套教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排以及例题、习题的选配等方面，都注重从教学的实际要求出发，遵循教学活动自身的规律性，从而有利于师生的教与学．

总之，这套教材编出了新意和特色．相信这套教材在数学教学和教学改革中一定能发挥巨大的作用，同时也希望它在大家的关爱中不断地得到完善．

侯振挺

2005 年 11 月

前　言

高职高专教育的根本任务是培养生产、建设和管理第一线的技术应用型人才. 为发挥高等数学在 21 世纪培养技术应用型人才中的作用，培养和提高学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力，根据教育部高等职业教育数学课程的基本要求与课程改革精神，我们组织了一批富有多年教学经验的教师编写了本套教材. 在内容选择、结构体系上力图具有适应 21 世纪社会和时代发展需要的时代特征，具有适应我国社会主义建设对技术应用型人才培养要求的职业教育特色，能够反映现代教育思想观念、人才培养模式和课程结构改革的丰硕成果. 全套教材共分上、下两册，内容包括：一元函数微分学及其应用、一元函数积分学、无穷级数、微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、线性代数、概率统计、数学实验. 计划课时 150 学时，选修部分另加学时.

本套书的特色在于：

一、保持传统高等数学的知识点. 其基本内容是根据高职院校《高等数学课程教学要求》的纲目来编写的，同时紧扣高职高专的培养目标，选择适当的教学定位，借助数表和图像，将抽象的数学知识生动直观地表现出来，对高等数学基本内容的讲解做到了既结构严谨，又通俗易懂.

二、数学软件 Mathematica 的诞生，被视为是一次重大的智力和实践的革命，因此探索一种以计算机为辅助教学工具展开高等数学教学的全新教学模式已成为一种新潮. 教材在第一章增加了 Mathematica 软件操作内容，并在每个章节内容中各含一节数学实验（不定积分与定积分合为一节），以提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力.

三、教材采用模块化设计，补充了线性代数和概率统计，以便于不同专业选用.

四、为了扩大学生的视野，使学生了解高等数学创立发展背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后附有数学家简介，对数学创立发展过程中做出过伟大贡献的著名数学家作了介绍.

五、针对高职高专学生的特点，为使学生更好地掌握所学知识，提高应用能力，习题分成两个部分，（A）为基础题，（B）为提高题.

本书内容充实,体系新颖.特别是增添的"数学实验",强调理论与实际相结合,这些都十分有利于高职高专类学生对基础知识的学习和理解,有利于培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力.

本书可供高等职业技术学院、高等专科学校相关专业的师生使用,同时也可作为学习数学软件 Mathematica 的入门教材.

本书由陈誌敏、胡成龙主编.参加编写的人员有:陈誌敏、胡成龙、周振良、肖家平、陈春秀、魏婉梅、刘裕华、白淑珍,同时倪曼、刘小宁提出了许多宝贵意见,国防科技大学吴翊教授认真仔细地审查了此书.在此向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,加上时间仓促,本书不妥之处在所难免,恳请读者指正.

编　者

2006 年 1 月

目　　录

第一章　函数的概念

在自然科学、工程技术、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数关系，而所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，函数作为各种变量依存关系的一种抽象化的结果，是我们现阶段学习和研究的主要对象.

在本章中，我们先介绍函数及相关的一些概念，之后将介绍数学软件Methematica的入门知识.

第一节　函数的概念

一、常量与变量、区间与邻域

1. 常量与变量

在自然科学和工程技术中，常常会遇到各种不同的量，其中，有的量在过程中保持一定的数值，不发生变化，这种量叫做常量. 有的量在过程中发生变化，可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，加热一个密闭容器内的气体时，气体的体积和分子数保持一定，它们是常量. 而气体的温度和压力在变化，它们是变量.

一个量是常量还是变量，因讨论问题的不同，可能会有变化. 例如重力加速度一般情况下可看作常量，实际上在不同的地方，重力加速度是不同的，这与所讨论问题的精确度要求有关，如果精确度要求不高，把它看作常量，如果精确度要求比较高，就不能把它看作常量了.

2. 区间与邻域

任何一个变量，都有确定的变化范围. 如果变量的变化范围是连续的，常用一种特殊的数集——区间来表示变量的变化范围. 下面引进各种区间的名称和记号.

设 a,b 是两个实数,$a<b$. 那么

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b|\}$叫做闭区间,记为$[a,b]$,见图 1-1-1(a);

数集$\{x|a<x<b|\}$叫做开区间,记为(a,b),见图 1-1-1(b);

数集$\{x|a<x\leqslant b|\}$和$\{x|a\leqslant x<b|\}$叫做半开区间,分别记为$(a,b]$和$[a,b)$,见图 1-1-1(c),(d).

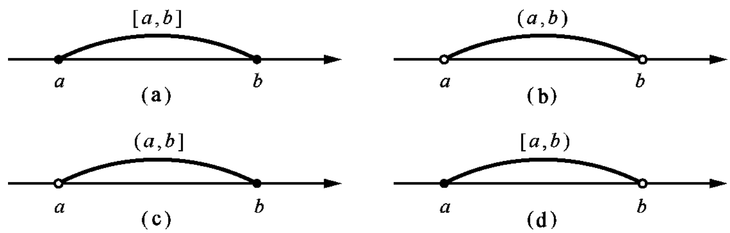

图 1-1-1

在以上各种情形中,a 和 b 叫做区间的端点,数 $b-a$ 叫做区间的长度.

除了上述有限区间外,还有一类区间叫做无限区间.

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a|\}$,见图 1-1-2(a).

$(-\infty,b)=\{x|x<b|\}$,见图 1-1-2(b).

$(-\infty,+\infty)$表示全体实数的集合 R.

注意,$+\infty$和$-\infty$分别读作"正无穷大"和"负无穷大",它们不是数,仅仅是记号.

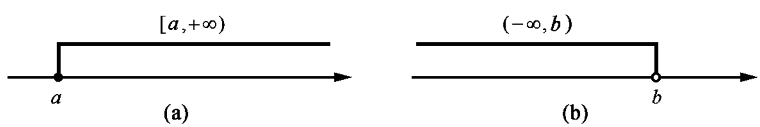

图 1-1-2

邻域是一个经常要用到的概念,设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,则数集$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$叫做点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做 $U(a,\delta)$的中心,δ 叫做 $U(a,\delta)$的半径. 因为$|x-a|<\delta$ 相当于$-\delta<x-a<\delta$,即 $a-\delta<x<a+\delta$,所以邻域 $U(a,\delta)$也就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$,这个开区间以点 a 为中心,长度为 2δ,见图 1-1-3(a).

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后形成的数集,称为点 a 的去心的 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$，见图 1－1－3(b).

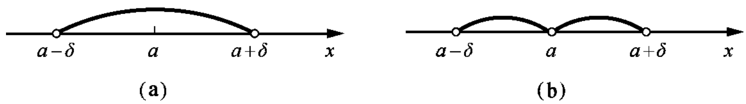

图 1－1－3

二、函数的概念

在介绍函数的概念之前，我们先来看几个例子.

引例 1　在自由落体运动中，物体下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，它们之间的依赖关系可以用公式表示为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度.

引例 2　关系式 $y=x^2$ 表示抛物线上点 (x,y) 两个坐标之间的依赖关系.

从以上两例可以看出，在研究事物内部各因素之间的关系时，我们常常通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系式. 为此，引进函数的定义.

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，数集 D 是变量 x 的变化范围. 如果对于属于 D 的每一个数 x，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 M 叫做函数的值域.

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x_0\in D$，都有确定的 $y\in M$ 和它对应. 因此，$y=c$（c 为常量）也符合函数的定义，因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 c.

如果自变量在定义域内任意取一个数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫做单值函数. 否则叫做多值函数. 高等数学中主要讨论单值函数.

2. 函数值与定义域

设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取定义域中的某一个定值 x_0 时，因变量 y 的

相应值叫做 $x=x_0$ 时的函数值. 记作 $f(x)\Big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

如果 $x=x_0$ 时,有函数值 $f(x_0)$,称 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义. 因此,函数的定义域也就是使函数有定义的实数的全体. 而函数值的全体称为函数的值域,记作 M. 这样,函数的定义又可简单地表示为

对任意 $x\in D\xrightarrow{f}$ 有确定的函数值 $y=f(x)\in M$.

很明显,只要函数的定义域及对应法则确定了,那么这个函数的值域也就确定了.

例 1　求函数 $f(x)=2x^2-5$ 在 $x=1, x=2$ 处的函数值.

解　$f(1)=2\times1^2-5=-3$,　$f(2)=2\times2^2-5=3$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的所有实数值.

例 2　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$;　(2) $y=\lg\dfrac{x}{x-1}$;　(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$.

解　(1) 要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\neq0\Rightarrow x\neq\pm2,\\ x+2\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-2,\end{cases}$$

故定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须满足

$$\frac{x}{x-1}>0\Rightarrow x>1 \text{ 或 } x<0,$$

故定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义,必须满足

$$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant1\Rightarrow-4\leqslant x\leqslant2,$$

故定义域为 $[-4,2]$.

三、分段函数

有些函数不能在整个定义域上用一个解析式子表示,而必须用多个解析式子表示,这种函数叫分段函数. 简单地说,由几个解析式子联立表示的函数就是分段函数.

例 3　作函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图形.

解　这个函数叫做符号函数. sgn 是符号函数的记号. 它的图形见图 1－1－4.

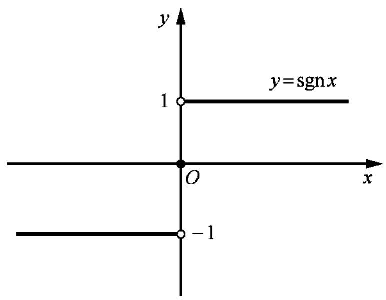

图 1－1－4

【思考题】

① 多值函数与单值函数的区别是什么？$y^2=x$是单值函数吗？

② 邻域和去心邻域这两个概念有什么不同？

习题 1－1

（A）

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$；

(3) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$；　(4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $y=\sqrt{\ln(x-2)}$；　(6) $y=\arcsin(x-3)$.

2. 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(x)+1$.

（B）

3. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；　(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.