图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下)/黄立宏,高纯一等主编. —上海:
复旦大学出版社,2006.4
(新锐丛书)
ISBN 7-309-04951-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①黄…②高… Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031216 号

高等数学(上、下)

上册:黄立宏 廖基定 下册:高纯一 周 勇 主编

出版发行 复旦大學出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 白国信
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本 787×960 1/16
印 张 37.5
字 数 672 千
版 次 2006 年 4 月第一版第一次印刷
印 数 1—10 100

书 号 ISBN 7-309-04951-9/O·357
定 价 49.00 元

21 世纪高等学校教材

高 等 数 学

(上)

主编　　黄立宏　廖基定

主审　　庾建设

内 容 简 介

本教材是在面向21世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，编者根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.

本书分为上、下两册.上册含集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程、几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、对坐标的曲线和曲面积分、无穷级数、向量函数与场论等内容.每章均配有习题，书末附有习题参考答案，便于教与学.

本书可供综合性大学、高等理工科院校、高等师范院校(非数学专业)学生使用.

序

为了适应“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要，高等学校的数学行家们都在对当今高等学校的数学教学理念、教学内容、教学模式进行深入细致的探讨. 本书的作者们依托自己丰富的教学实践经验和对高等数学教学改革的独到认识，根据《教育部高等院校工科数学教学大纲》的要求，编写并推出了这套数学系列教材，该系列教材包括《高等数学》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》等.

数学是严谨的科学，数学教学不但要教给学生数学知识，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，还要提高他们的数学修养，养成良好的思维品格. 一套好的教材无疑是达到上述目标的基本条件，本套教材就是遵循这一目标而编写的.

与其他教材相比，本套教材具有以下几个明显的特点：

1. 科学性

内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握.

2. 先进性

本套教材充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料，充实教材内容，以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

3. 适用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具. 所以本套教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排，以及例题、习题的选配等方面，都是从教学的实际要求出发而做出的，使其遵循教学活动自身的规律性，方便教师教与学生学.

参加本套系列教材编写的作者们都是多年从事数学教学和研究的教授、学者，他们紧紧扣住教学大纲的要求，密切联系工科院校数学教学的实际，认真研究了国内各种版本的同类教材，取长补短，编出了新意和特色. 相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用，同时也希望它在教学实践中不断地完善.

应作者之嘱托，谨作此序.

侯振挺

2006 年 3 月

前　言

数学是科学和技术的基础,数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用.高等学校作为培育人才的摇篮,其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来,随着我国经济建设与科学技术的迅速发展,高等教育也进入了一个飞速发展时期,高等学校教育教学观念不断更新,教学改革不断深入,办学规模不断扩大,数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要,经众多高校的数学教师多次研究讨论,联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的,也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中,概念、定理及理论叙述准确、精炼,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程严谨,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性.

本教材分上、下两册.上册含集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程、几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、对坐标的曲线和曲面积分、无穷级数、向量函数与场论等内容.本册《高等数学》(上册)由黄立宏、廖基定主编,参加讨论和编写的人员有:王晓萍、朱若松、宋迎清、刘进波、杨韵生、周建军、周展、刘碧玉、孟益民、彭亚新、邓爱珍、戴国枝、段卫龙、彭向阳、兰艳等.刘楚中教授对本册教材的编写给予了许多支持与帮助,庾建设教授认真审阅了书稿,并提出许多宝贵意见.本教材的编写得到了著名数学家侯振挺教授的悉心指导,在此一并致谢.

教材中难免有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

编　者

2006 年 3 月

目　　录

第一章　函数极限与连续

微积分研究的主要对象是函数. 为了准确而深刻地理解函数概念,集合与映射的知识是不可缺少的. 本章将简要地介绍集合、映射的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数概念.

第一节　集合与映射

一、集合的概念

集合是数学中的一个最基本的概念,它在现代数学和工程技术中有着非常重要的作用. 一般地,我们将具有某种确定性质的事物的全体叫做一个集合,简称集. 组成集合的事物称为该集合的元素. 例如,某大学一年级学生的全体组成一个集合,其中的每一个学生为该集合的一个元素;自然数的全体组成自然数集合,每个自然数是它的元素,等等.

通常我们用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合;用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A,记作 $a\in A$;否则称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$).

含有有限个元素的集合称为有限集;不含任何元素的集合称为空集,用 $\varnothing$ 表示;不是有限集也不是空集的集合称为无限集. 例如,某大学一年级学生的全体组成的集合是有限集;全体实数组成的集合是无限集;方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集合是空集.

我们常用下面的方法来表示集合. 一种是列举法,即将集合的元素一一列举出来,写在一个花括号内. 例如,所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质,即将具有性质 $p(x)$ 的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x\mid x\ \text{具有性质}\ p(x)\}.$$

例如,正整数集 $\mathbf{N}$ 也可表示成

$$\mathbf{N}=\{n\mid n=1,2,3,\cdots\};$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 为实数}\}.$$

又如

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x,y\text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面单位圆周上点的集合.

二、集合的运算

设 A,B 是两个集合,若 A 的每个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作 A 被 B 包含(或 B 包含 A);若 $A\subseteq B$,且有元素 $a\in B$,但 $a\notin A$,则说 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$. 对任何集 A,规定 $\varnothing\subseteq A$. 若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则称集 A 与 B 相等,记作 $A=B$(或 $A\subset B$). 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的差集,记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

两个集合的并集,交集,差集如图 1－1 所示阴影部分.

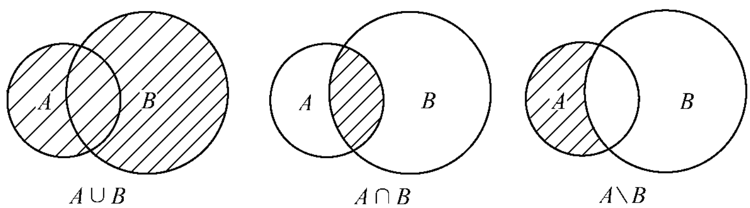

图 1－1

在研究某个问题时,如果所考虑的一切集都是某个集 X 的子集,则称 X 为基本集或全集. X 中的任何集 A 关于 X 的差集 $X\backslash A$ 常简称为 A 的补集(或余集),记作 $\complement_X A$.

两个集的并集与交集可以推广到任意多个集的并集与交集. 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交;若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交.

集合的交、并、余的运算满足下列运算法则

定理 1 设 A,B,C 为三个任意集合,则下列法则成立:

(1)**交换律**　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2)**结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)**分配律**　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;

(4)**幂等律**　$A\cup A=A$,　$A\cap A=A$;

(5)**吸收律**　$A\cup\varnothing=A$,　$A\cap\varnothing=\varnothing$.

定理 2　设 $A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集合,则下列法则成立:

(1)若 $A_i\subseteq C(i=1,2,\cdots)$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$;

(2)若 $A_i\supseteq C(i=1,2,\cdots)$,则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq C$.

定理 3　设 X 为基本集,$A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集合,则

$$\complement_X(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\complement_X A_i,$$

$$\complement_X(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\complement_X A_i.$$

以上法则根据集合的并集,交集,差集及集合相等的定义即可证明. 这里只证明定理 3 的第一个结论,其余证明留给读者练习.

设 $x\in\complement(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$,则 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$,即 $x\in\complement A_i(i=1,2,\cdots)$,于是 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement A_i$,故$\complement(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement A_i$.

反之,设 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement A_i$,则 $x\in\complement A_i(i=1,2,\cdots)$,从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$,即 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,于是 $x\in\complement(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$,故$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement A_i\subseteq\complement(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$,因此$\complement(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement A_i$.

三、区间与邻域

设 a 和 b 都是实数,将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数组成的数集称为**开区间**,记作(a,b). 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的**端点**,这里 $a\notin(a,b)$且 $b\notin(a,b)$.

类似地,称数集

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为**闭区间**,a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这里 $a\in[a,b]$且 $b\in[a,b]$.

称数集

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}\text{和}(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为区间的长度. 此外还有无限区间：

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$

等等. 这里记号“$-\infty$”与“$+\infty$”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

邻域也是常用的一类数集.

设 x_0 是一个给定的实数，δ 是某一正数，称数集：

$$\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 称点 x_0 为这邻域的中心，δ 为这邻域的半径. (如图1－2).

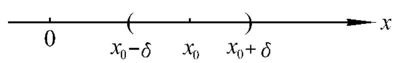

图 1－2

称 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

记

$$\mathring{U}(x_0^-,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\},$$
$$\mathring{U}(x_0^+,\delta)=\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\},$$

它们分别称为 x_0 的去心左 δ 邻域和去心右 δ 邻域. 当不需要指出邻域的半径时，我们用 $U(x_0)$，$\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的某邻域和 x_0 的某去心邻域。

四、映射的概念

定义 1 设 A,B 是两个非空的集合，若对 A 中的每个元素 x，按照某种确定的法则 f，在 B 中有惟一的一个元素 y 与之对应，则称 f 是从 A 到 B 的一个映射，记作

$$f:A\to B,\text{或 } f:x\mapsto y, x\in A,$$

称 y 为 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 在映射 f 下的原像. 集合 A 称为映射 f 的定义域，A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为 f 的值域，记作 $f(A)$，即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x), x\in A\}.$$

定义中 x 的像是惟一的，但 y 的原像不一定惟一，且 $f(A)\subseteq B$.

映射概念中的两个基本要素是定义域和对应法则. 定义域表示映射存在的范围，对应法则是映射的具体表现.

例 1　设 A 表示某高校大学一年级学生所构成的集合，用一种方法给每一个学生编一个学号，B 表示该校一年级学生学号的集合，f 表示编号方法，于是确定了从 A 到 B 的一个映射 $f: A\to B$.

例 2　设 $A=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$B=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$. 令

$$f: n\mapsto 2n,\quad n\in A,$$

则 f 是一个从 A 到 B 的映射.

例 3　设 $A=[0,1]$，$B=\{(x,y)\mid y=x, x\in A\}$，如图 1－3 所示. 令

$$f: x\mapsto (x,x),\quad x\in A,$$

则 f 是一个从 A 到 B 的映射.

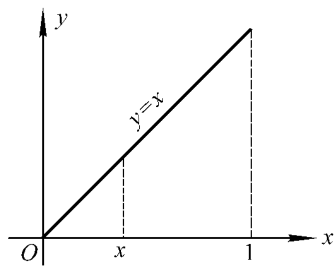

图 1－3

设有映射 $f: A\to B$. 若 $B=f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，则称 f 是满射. 若 f 将 A 中不同的元素映射到 B 中的像也不同，即若 $x_1, x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射. 若 f 既是满射又是单射，则称 f 是从 A 到 B 的一一映射. 若 A 与 B 之间存在一一映射，则称 A 与 B 是一一对应的. 上面的例 1，例 2 与例 3 的两个集合都是一一对应的. 有趣的是例 2 中的 B 是 A 的真子集，但 A 与 B 却是一一对应的，这是无限集的一种特性.

定义 2　设有映射 $g: A\to B$，$f: B\to C$，于是对 $x\in A$ 有

$$x\xrightarrow{g}u=g(x)\xrightarrow{f}y=f(u)=f(g(x))\in C.$$

这样，对每个 $x\in A$，经过 $u\in B$，有惟一的 $y\in C$ 与之对应，因此，又产生了一个从 A 到 C 的新映射，记作 $f\circ g: A\to C$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\quad x\in A,$$

称 $f\circ g$ 为 f 与 g 的复合映射，如图 1－4 所示.

两个映射的复合可推广到有限个映射复合的情形.

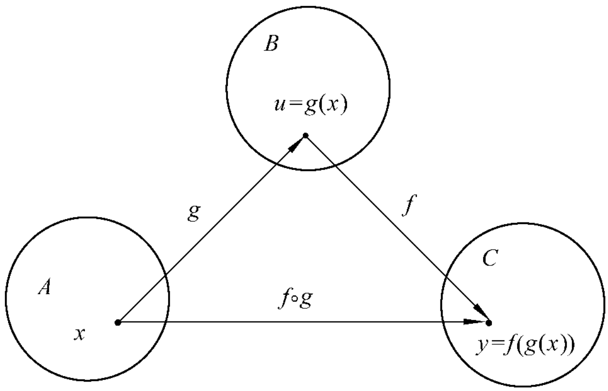

图 1－4

定义 3 设有映射 $f: A \to B, B = f(A)$ 若存在一个映射 $g: B \to A$，对每个 $y \in B$，通过 g，有惟一的 $x \in A$ 与之对应，且满足关系 $f(x) = y$，则称 g 是 f 的逆映射，记作 $g = f^{-1}$.

定理 4 若映射 $f: A \to B$ 是一一映射，则 f 必存在一个从 B 到 A 的逆映射 f^{-1}.

证 由 f 是从 A 到 B 的满射知，对每个 $y \in B$，必有 $x \in A$ 与之对应；又 f 是从 A 到 B 的单射，故对每个 $y \in B$，必有惟一的 $x \in A$ 与之对应，且满足 $y = f(x)$，故 f 存在一个从 B 到 A 的逆映射.

第二节 函数的概念与基本性质

一、函数的概念

函数是客观世界中变量之间的一种依赖关系. 本节利用映射概念来定义函数.

定义 1 设 A, B 是两个实数集，将从 A 到 B 的映射 $f: A \to B$ 称为函数，记作

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in A,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，$f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的函数值，A 称为函数 f 的定义域，记作 $D(f)$；$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$ 称为函数 f 的值域，记作 $R(f)$.

通常函数是指对应法则 f，但习惯上用“$y = f(x), x \in A$”表示函数，此时应

理解为"由对应关系 $y=f(x)$所确定的函数 f".

由映射概念知,函数概念也有两个基本要素,即定义域和对应法则.定义域表示使函数有意义的范围,即自变量的取值范围.在实际问题中,可根据函数的实际意义来确定.在理论研究中,若函数关系由数学公式给出,函数的定义域就是使数学表达式有意义的自变量 x 的所有值构成的数集.对应法则是函数的具体表现,即两个变量之间只要存在对应关系,它们之间就具有函数关系.例如,气温曲线给出了气温随时间变化的对应关系;三角函数表列出了角度与三角函数值的对应关系.因此,气温曲线和三角函数表表示的都是函数关系.这种用曲线和列表给出函数的方法分别称为图示法和列表法.但在理论研究中所遇到的函数多数由数学公式给出,称为公式法.例如,初等数学中所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数都是用公式法表示的函数.

从几何上看,在平面直角坐标系中,点集
$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$$
称为函数 $y=f(x)$的图像(如图 1-5 所示).函数 $y=f(x)$的图像通常是一条曲线,$y=f(x)$也称为这条曲线的方程.这样,函数的一些特性常常可借助于几何直观来发现;相反,一些几何问题,有时也可借助于函数来作理论探讨.

现在我们举一个具体函数的例子.

例 1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$的定义域.

解　要使数学式子有意义,x 必须满足
$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ x>1.\end{cases}$$
由此有
$$1<x\leqslant 2,$$
因此函数的定义域为$(1,2]$.

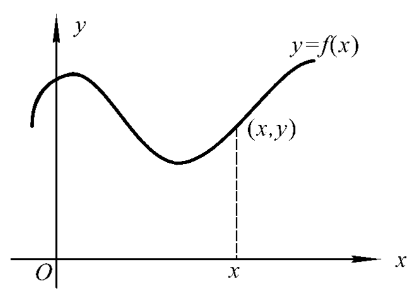

图 1-5

有时一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则,称这种函数为分段函数.下面给出一些今后常用的分段函数.

例 2　绝对值函数
$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$
的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=[0,+\infty)$,如图 1-6 所示.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$，如图 1－7 所示.

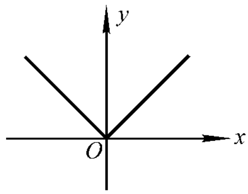

图 1－6

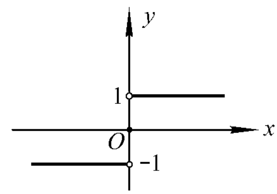

图 1－7

例 4 最大取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[-\frac{1}{3}]=-1$，$[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$ 等等. 函数 $y=[x]$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{$整数$\}$. 一般地，$y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，如图 1－8 所示.

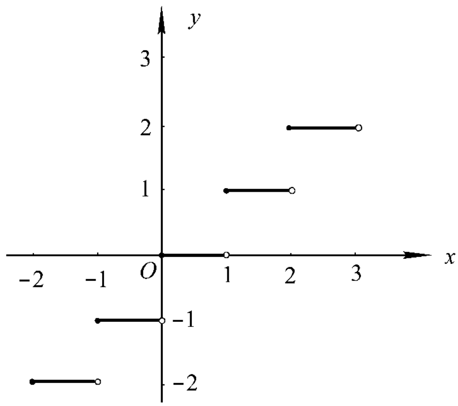

图 1－8

二、复合函数与反函数

根据函数的概念可知，函数是一种特殊的映射，即映射的原像（自变量）和像（因变量）都是实数。类似地，当复合映射和逆映射的原像和像都是实数时，就得到复合函数与反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；而函数 $u=g(x)$