21 世纪高等学校本科数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

(理 工 类)

下册

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工类）（下册）／赵更生，王学理，黄己立主编．— 沈阳：东北大学出版社，2006.8
（21世纪高等学校本科数学规划教材）

ISBN 7-81102-285-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①赵… ②王… ③黄…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第096667号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：12
字　　数：312千字
出版时间：2006年8月第1版
印刷时间：2006年8月第1次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：章　丽
责任出版：秦　力

定　　价：20.00元

《高等数学（理工类下册）》编写人员

主　　　编：赵更生　王学理　黄己立

副　主　编：周其华　费罗曼　葛有兰

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王立华　王新伟　杨万必

努尔古里　　　崔凤蒲

前　　言

进入 21 世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步．目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，我们已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这本适合于理工类本科生各专业使用的高等数学教材．

本书依据教育部制订的“高等数学课程教学基本要求”（文中简称“基本要求”）编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了高等数学课程教学时数减少的趋势．本书具有以下特色：

第一，突出高等数学的基本思想和基本方法．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握高等数学的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的思想方法与学术价值．

第二，加强基本能力培养．本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

第三，贴近实际应用．本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出．例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学知识解决实际问题的能力．

本书分上下两册，上册包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何，下册包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程．各节后均配有习题，各章后面配有总习题，书后附有全部习题的参考答案．

本书是多所院校合作的结晶，参加编写的院校有（以校名首字笔画为序）：天津师范大学津沽学院、东北大学、东华理工学院长江学院、兰州交通大学博文学院、辽宁石油化工大学顺华能源学院、安徽建筑工业学院、江西师范大学科学技术学院、沈阳农业大学、信阳农业高等专科学校、湖北民族学院、新疆农业大学科学技术学院．

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者不吝赐教．

作　者

2006 年 2 月

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用…… 1

第一节　多元函数的极限及连续性…… 1

一、平面点集与 n 维空间 …… 1

二、多元函数概念…… 2

三、多元函数的极限…… 5

四、多元函数的连续性…… 6

第二节　偏导数…… 8

一、偏导数定义及偏导数求法…… 8

二、偏导数的几何意义 …… 11

三、高阶偏导数 …… 11

第三节　全微分 …… 13

一、全微分的定义 …… 13

二、可微分条件 …… 13

三、全微分在近似计算中的应用 …… 16

第四节　多元复合函数求导法则 …… 17

一、复合函数的中间变量均为多元函数的情形 …… 18

二、复合函数的中间变量均为一元函数的情形 …… 19

三、某些中间变量又是复合函数中的自变量的情形 …… 20

四、全微分的形式不变性 …… 21

五、复合函数的高阶偏导数 …… 22

第五节　隐函数求导法 …… 23

一、一个方程的情形 …… 24

二、方程组的情形 …… 26

第六节　偏导数在几何上的应用 …… 30

一、空间曲线的切线与法平面 …… 30

二、空间曲面的切平面与法线 …… 32

第七节　梯度与方向导数 …… 36

一、梯度与场 …… 36

二、方向导数 …… 37

三、等值线与梯度的关系 …… 39

第八节　多元函数的极值 …… 41

一、多元函数的极值与最大值、最小值 …… 41

二、条件极值 ………… 43

第八章 重积分 ………… 50

第一节 二重积分的概念与性质 ………… 50
一、引例 ………… 50
二、二重积分定义 ………… 51
三、二重积分的性质 ………… 52
第二节 二重积分的计算 ………… 54
一、直角坐标中计算二重积分 ………… 54
二、极坐标中计算二重积分 ………… 59
第三节 三重积分 ………… 64
一、三重积分定义 ………… 64
二、三重积分的计算 ………… 65
第四节 重积分的应用 ………… 73
一、曲面的面积 ………… 73
二、重心 ………… 75
三、转动惯量 ………… 77

第九章 曲线积分与曲面积分 ………… 80

第一节 对弧长的曲线积分 ………… 80
一、对弧长的曲线积分的定义 ………… 80
二、对弧长的曲线积分的性质 ………… 81
三、对弧长的曲线积分的计算 ………… 81
四、对弧长的曲线积分的应用 ………… 83
第二节 对面积的曲面积分 ………… 85
一、对面积的曲面积分的定义 ………… 85
二、对面积的曲面积分的性质 ………… 86
三、对面积的曲面积分的计算 ………… 86
四、对面积的曲面积分的应用 ………… 88
第三节 对坐标的曲线积分 ………… 89
一、对坐标的曲线积分的定义与性质 ………… 90
二、对坐标的曲线积分的计算 ………… 91
三、两类曲线积分之间的联系 ………… 92
第四节 对坐标的曲面积分 ………… 93
一、对坐标的曲面积分的定义与性质 ………… 93
二、对坐标的曲面积分的计算 ………… 95
三、两类曲面积分之间的联系 ………… 96
第五节 Green 公式 ………… 97
一、Green 公式 ………… 97
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 ………… 99

第六节　Gauss 公式 …… 102
一、Gauss 公式 …… 103
二、利用 Gauss 公式计算曲面积分 …… 104
第七节　Stokes 公式 …… 105
一、Stokes 公式 …… 105
二、散度与旋度 …… 106

第十章　无穷级数 …… 110

第一节　无穷级数的概念与性质 …… 110
一、常数项级数的概念 …… 110
二、级数收敛与发散的定义 …… 111
三、收敛级数的基本性质 …… 113
四、级数收敛的必要条件 …… 115
第二节　正项级数审敛法 …… 116
一、比较审敛法 …… 117
二、比值审敛法 …… 120
三、根值审敛法 …… 120
四、积分审敛法 …… 121
第三节　交错级数 …… 122
一、交错级数 …… 122
二、绝对收敛与条件收敛 …… 123
第四节　幂级数 …… 125
一、函数项级数与幂级数的概念 …… 125
二、幂级数及其收敛性 …… 126
三、幂级数运算 …… 129
第五节　函数展开成为幂级数 …… 131
一、泰勒级数 …… 131
二、函数展开为幂级数 …… 132
第六节　傅立叶级数 …… 135
一、三角级数概念 …… 135
二、将以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数 …… 136
三、非周期函数的傅立叶级数 …… 139
四、正弦级数与余弦级数 …… 140
五、将以 $2l$ 为周期的函数展开成傅立叶级数 …… 141

第十一章　微分方程 …… 144

第一节　微分方程的基本概念 …… 144
一、微分方程 …… 144
二、微分方程的解 …… 144
三、函数组的线性相关性 …… 145

第二节　可分离变量的微分方程 …… 146
一、变量分离型微分方程 …… 146
二、齐次方程 …… 147
第三节　一阶线性微分方程 …… 149
一、一阶线性微分方程 …… 149
二、Bernoulli 方程 …… 151
第四节　全微分方程 …… 153
一、全微分方程 …… 153
二、积分因子 …… 154
第五节　可降阶的高阶方程 …… 155
一、$y^{(n)}=f(x)$ 型 …… 155
二、$y''=f(x, y')$ 型 …… 155
三、$y''=f(y, y')$ 型 …… 156
第六节　线性微分方程解的结构 …… 157
一、二阶线性齐次方程解的结构 …… 157
二、二阶线性非齐次方程解的结构 …… 158
第七节　常系数齐次线性微分方程 …… 159
一、方程（2）有两个不相等的实根 …… 159
二、方程（2）有两个相等的实根 …… 160
三、方程（2）有一对共轭的复根 …… 160
第八节　常系数非齐次线性微分方程 …… 162
一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ …… 162
二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ …… 164
答　案 …… **166**
数学家简介 …… **178**

第七章　多元函数微分法及其应用

本章在一元函数微分法的基础上讨论多元函数的微分法及其应用. 讨论中以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的函数则可以类推.

第一节　多元函数的极限及连续性

一、平面点集与 n 维空间

1. 平面点集

由平面解析几何知道，当在平面上引入了一个直角坐标系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x, y) 之间就建立了一一对应的关系，所以常将有序实数组 (x, y) 与平面上的点 P 视作等同的. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面. 二元实数组 (x, y) 的全体，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记为

$$E=\{(x, y)\mid x, y\ \text{具有性质}P\}.$$

例如，平面上以原点为中心，R 为半径的圆内所有点的集合是

$$C=\{(x, y)\mid x^2+y^2<R^2\}.$$

如果以点 P 表示 (x, y)，$|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离，则集合 C 也可表示成

$$C=\{P\mid |OP|<R\}.$$

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心，某一正数 δ 为半径的圆的内部点 (x, y) 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta)=\{(x, y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

如果邻域中不包含点 P_0，称之为去心邻域，记为 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0, \delta)=\{(x, y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某邻域，用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某去心邻域.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

内点：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称 P 为点集 E 的内点. 图 7-1 中，P_1 为 E 的内点.

外点：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为点集 E 的外点. 图 7-1 中，P_2 为 E 的外点.

边界点：如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为点集 E 的边界点. 图 7-1 中，P_3 为 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的边界.

E 的内点必属于E，E 的外点必不属于E，E 的边界点可能属于E，也可能不属于 E.

聚点：如果在点 P 的任一去心邻域内总有E 中的点，则称点 P 是E 的聚点.

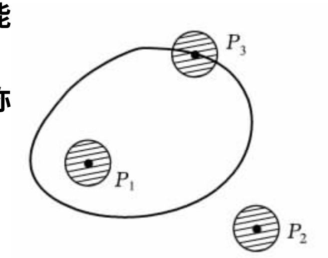

图 7-1

下面再来定义一些重要的平面点集.

开集：如果点集 E 的点都是E 的内点，则称 E 为开集.

闭集：如果点集 E 的余集是开集，则称 E 为闭集.

例如，集合 $\{(x, y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集，$\{(x, y) \mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集，$\{(x, y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 既不是开集，也不是闭集.

连通集：如果点集 E 内的任意两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

区域（或开区域）：连通的开集称为区域或开区域.

闭区域：开区域连同它的边界所构成的点集称为闭区域.

例如，集合 $\{(x, y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开区域，集合 $\{(x, y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭区域.

以后当不需要区分开区域和闭区域时，统称它们为区域.

如果一个平面区域总可以被包含在一个以原点为中心，半径为 R（R 为正常数）的圆内，则称之为有界区域，否则称为无界区域.

2．n 维空间

设 n 是取定的自然数，用 $\mathbf{R}^n$ 表示n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合，即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i\in\mathbf{R}, i=1, 2, \cdots, n\},$$

称$\mathbf{R}^n$ 为n 维空间，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点. 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 n 维空间中的两个点，规定这两点间的距离为

$$d=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

当 $n=2$ 时，它就是平面上两点间的距离公式；当 $n=3$ 时，它就是空间中两点间的距离公式.

上面关于平面点集、平面区域等概念可以推广到 n 维空间中来，这里不再重复.

例如，当 $n=3$ 时，集合 $\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$ 表示以原点为球心，R 为半径的闭球形空间区域；集合 $\{(x, y, z) \mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, e\leqslant z\leqslant f\}$ 表示一个闭长方体形空间区域.

二、多元函数概念

在许多问题中，会遇到一个变量（因变量）依赖于两个变量（自变量）的情形，举例如下.

例 1 长方形的面积 S 与其长x，宽 y 的关系为

$$S=xy,$$

当 x，y 在集合 $\{(x, y) \mid x>0, y>0\}$ 内取定一对值 (x, y) 时，S 的值也随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 p 与体积V 和热力学温度T 之间的关系为

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 当 V，T 在集合 $\{(V, T) \mid V>0, T>T_0\}$ 内取定一对值 (V, T) 时，p 的对应值就随之确定.

例 3　设 R 是由电阻 R_1，R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间的关系为

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2},$$

当 R_1，R_2 在集合 $\{(R_1, R_2) \mid R_1>0, R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1, R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

抽象出上面三个例子的共性，给出二元函数的定义如下.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x, y),\ (x, y)\in D \text{ 或 } z=f(P),\ P\in D.$$

其中 x，y 称为自变量，z 称为因变量，也称 z 是 x，y 的函数. 称集合 $\{f(x, y) \mid (x, y)\in D\}\subset\mathbf{R}$ 为 f 的值域.

当 $x=a$，$y=b$ 时，函数的对应值记为

$$f(a, b) \text{ 或 } f(x, y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \text{或 } z\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

定义 1 中的集合 D 称为函数 $f(x, y)$ 的定义域. 在实际问题中出现的函数的定义域由其实际意义来确定. 如例 1 中的函数的定义域 D 是 xOy 平面上的第一象限，因为矩形的边长不能是负的. 当不考虑函数的解析表达式中变量所表示的实际意义时，其定义域就是指 xOy 平面上使 $f(x, y)$ 有意义的全部点构成的点集. 如函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，其定义域是单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$，函数 $z=\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域是单位圆内的全部点 $x^2+y^2<1$.

例 4　求函数 $z=\sqrt{y}\ln x+\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2-y}}$ 的定义域.

解　定义域 D 中的点 (x, y) 应满足条件

$$x>0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant y<x^2,$$

其定义域见图 7-2.

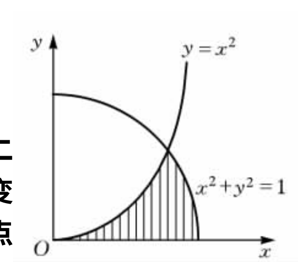

图 7-2

利用平面直角坐标系可以表示一元函数 $y=f(x)$ 的图形，对二元函数 $z=f(x, y)$，可利用空间直角坐标系表示其图形. 将自变量 x，y 及因变量 z 看成空间点的直角坐标，过定义域的任意一点 $P(x, y)$ 作垂直于 xOy 面的直线，并在此直线上取一点 M，使 M 点的竖坐标 z 等于 $f(x, y)$. 当点 $P(x, y)$ 取遍定义域 D 的全部点时，对应的点 $M(x, y, z)$ 的全体构成一个空间点集 $\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$，这个点集称为二元函数的图形，这个图形一般是一张曲面，见图 7-3. 这个曲面称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 这个曲面在 xOy 面上的投影就是函数 $f(x, y)$ 的定义域. 例如，由空间解析几何知道，函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形是球心在坐标原点，半径为 R 的上半球面，定义域是

$$\{(x, y) \mid x^2+y^2<R^2\}.$$

函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面，定义域是整个 xOy 平面.

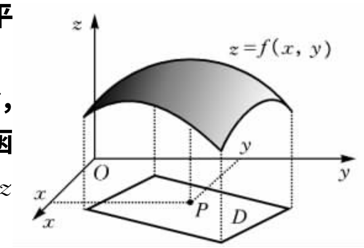

图 7-3

对定义域中的每一点 $P(x, y)$，通过确定的对应规则 f，都只有唯一的实数 z 与之对应，这样定义的函数称为单值函数. 有时在点集 D 中有这样的点 P，它通过 f 有多个实数 z 与之对应. 如

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

对区域 $D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 内的任意一点 P，通过上面的方程有两个实数

$$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

与之对应，这时称该方程确定了多值函数. 需要时可以将多值函数分成多个单值函数来讨论，如由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所确定的函数可分成 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 与 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

当用平面 $z=c$ (c 是常数) 去截曲面 $z=f(x, y)$ 时，二者的交线 L 为

$$\begin{cases} z=f(x, y), \\ z=c, \end{cases}$$

该曲线为平面曲线. 在平面 $z=c$ 上. 曲线 L 在 xOy 平面上的投影曲线 L^* 的方程为 $f(x, y)=c$，对于曲线 L^* 上的任何一点 (x, y)，$f(x, y)$ 的函数值均为 c，称曲线 $f(x, y)=c$ 为函数 $z=f(x, y)$ 的等值线. 当 c 取不同的值时，就得到了不同的等值线. 如果画出一个函数的若干条等值线并将它们提升 (或降低) 到所对应的高度，则函数图形也就大致上了解了. 图 7-4 及图 7-5 是某二元函数的图形及其等值线图形. 当常数 c 按等差方式取不同值时，等值线密的地方，曲面较陡峭，等值线稀疏的的地方，曲面较平坦.

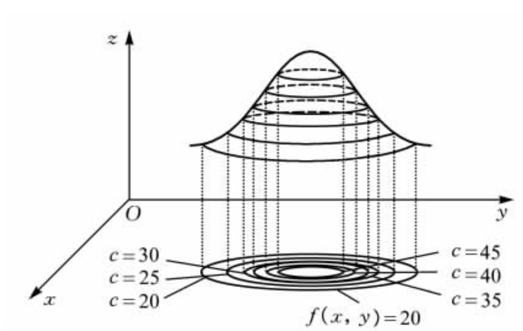

图 7-4

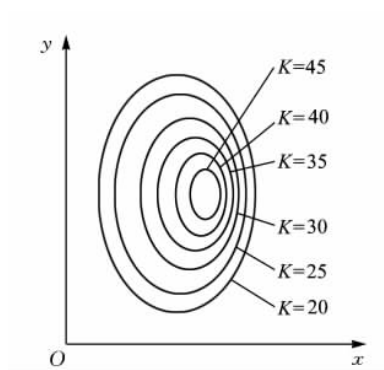

图 7-5

类似可以定义三元或三元以上的函数. 一般地，将定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 G，映射 $f: G\to\mathbf{R}$ 就称为定义在 G 上的 n 元函数，通常记为

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in G,$$

当 $n=2$ 或 3 时，习惯上将点 (x_1, x_2) 与点 (x_1, x_2, x_3) 分别写成 (x, y) 与 (x, y, z)，二元函数写成 $f(x, y)$，三元函数写成 $f(x, y, z)$.

n 元函数也可写成点函数形式

$$u=f(P) \qquad P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in G.$$

三、多元函数的极限

与一元函数极限的概念类似，对二元函数 $z=f(x, y)$，如果在点 $P(x, y)$ 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $P\to P_0$ 的极限. 这里所说的 $P\to P_0$，是指点 P 以任意的方式趋于 P_0，即两点间的距离趋于零：

$$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

为了从数学上确切地刻划上述极限，下面用“$\varepsilon-\delta$”语言给出极限的定义.

定义 2　设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|P_0P|<\delta$，且 $P(x, y)\in D$ 时，都有

$$|f(x, y)-A|<\delta$$

成立，则称 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 的极限，记为

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A,$$

或

$$f(x, y)\to A \qquad ((x, y)\to(x_0, y_0)),$$

也可记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

二元函数的极限称为二重极限.

定义 3　设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 G，P_0 是 G 的聚点，如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|P_0P|<\delta$，且 $P\in G$ 时，都有

$$|f(P)-A|<\delta$$

成立，则称 A 是函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

上面的 $|P_0P|$ 表示 n 维空间中两点 $P_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$ 和 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的距离：

$$|P_0P|=\sqrt{(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2+\cdots+(x_n-x_{0n})^2}.$$

n 元函数的极限称为 n 重极限.

定义 3 是极限定义一种统一的书写格式，当 $n=1$ 时，就得到一元函数的极限定义，当 $n=2$ 时，就得到二元函数的极限定义，依此类推. 所以，关于一元函数极限的运算法则也适用于多元函数的极限.

例 5　求极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(1, 2)} \dfrac{xy}{x+3y}$.

解　由极限运算法则，有

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} \frac{xy}{x+3y}=\frac{\lim\limits_{(x, y)\to(1, 2)}(xy)}{\lim\limits_{(x, y)\to(1, 2)}(x+3y)}=\frac{1\times 2}{1+3\times 2}=\frac{2}{7}.$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+4}+2)}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+4}+2)=4.$

例 7 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

解 因为

$$0<\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|<x^2+y^2,$$

且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0,$$

由夹逼准则，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|=0,$$

从而所求极限为零.

定义 2 所说的二重极限存在，是指点 $P\in D$ 以任意的方式趋于点 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近同一常数 A. 因此，如果点 P 以某一特殊方式趋于点 P_0 时，即使函数 $f(x,y)$ 无限接近某一确定值，也不能由此断定函数的极限存在. 但是，如果当点 P 以不同的方式趋近于点 P_0 时，函数趋近于不同的值，就可以断定所讨论的极限不存在.

例 8 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\tag{1}$$

当 $P(x,y)\to O(0,0)$ 时极限是否存在？

解 当点 P 沿直线路径 $y=kx$ 趋近于原点时，函数的极限为

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

该结果与 k 的值有关，当 k 取不同值时，其极限值也随之变化，故所求的二重极限不存在.

四、多元函数的连续性

一元函数的连续性是通过极限来定义的，同样可利用极限来定义二元函数的连续性.

定义 4 设二元函数的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续.

在定义 2 中，如将常数 A 换成 $f(x_0,y_0)$，就得到函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的“ε-δ”定义.

如果函数在 D 的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 二元连续函数的图形是一个无孔、无缝的曲面.

定义 5 设二元函数的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 P_0 是 $f(x,y)$ 的间断点.

函数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

在点 $(0, 0)$ 处无定义，故 $(0, 0)$ 是这个函数的间断点. 并且，函数在原点处没有极限，故该函数在原点处也间断.

二元函数的间断点也可能是曲线. 如函数

$$f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上无定义，因此圆周上的每一点都是该函数的间断点.

由常数和 x，y 组成的基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成的、且能用 x，y 的一个解析式所表示的函数称为二元初等函数. 与一元初等函数的情形类似，二元初等函数在其定义区域内也是连续的.

一元连续函数在闭区间上的性质，也可推广到二元函数上来.

性质 1（有界性）　如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则函数 $f(x, y)$ 在 D 上必有界，即存在常数 $M>0$，使得

$$|f(x, y)|\leqslant M, \quad (x, y)\in D.$$

性质 2（最大值、最小值定理）　如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则函数 $f(x, y)$ 在 D 上必能取得它的最大值与最小值. 即存在 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2)\in D$，使得

$$f(x_1, y_1)=\min\{f(x, y)\mid (x, y)\in D\},$$
$$f(x_2, y_2)=\max\{f(x, y)\mid (x, y)\in D\},$$

即

$$f(x_1, y_1)\leqslant f(x, y)\leqslant f(x_2, y_2) \qquad (x, y)\in D.$$

性质 3（介值定理）　在有界闭区域 D 上的二元连续函数一定能取得介于最大值、最小值之间的任何值. 也就是说，如果 M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，则当 $m<C<M$ 时，至少存在一点 $(\xi, \eta)\in D$，使得 $f(\xi, \eta)=C$.

上面关于二元函数的连续性、闭区域上连续函数的性质等均可推广到 n 元函数，这里不再赘述.

习题 7-1

1. 已知 $f(x, y)=x+y-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx, ty)$.

2. 试证函数 $F(x, y)=\ln x\ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v).$$

3. 设 $f(x+y, xy)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，求 $f(x, y)$.

4. 若函数 $f(x, y)$ 满足关系式 $f(tx, ty)=t^kf(x, y)$，则称之为 k 次齐次函数. 试证 $f(x, y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$ 是二次齐次函数，并证明 k 次齐次函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y)=x^kF\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

5. 求下列函数的定义域并画出定义域的图形：

(1) $z=\ln(y-2x+1)$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{x-y}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

6．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{xy}{x^2+2}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{y}}$；

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7．证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

8．函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

第二节 偏导数

一、偏导数定义及偏导数求法

在一元函数中，通过研究函数的变化率引入了导数概念．对多元函数也要研究类似问题．但多元函数的自变量不止一个，其变化率较一元函数要复杂．本节里，考虑多元函数关于一个变量的变化率，即只有一个变量变化，而其余变量暂时不变（视为常数）时的情形．例如，对二元函数

$$z=f(x,y)=x^2\sin y,$$

可将 y 暂时固定不变，而将 $z=x^2\sin y$ 看成 x 的一元函数，将其对 x 求导数，结果为 $2x\sin y$．同样，将 x 暂时固定不变，而将 $z=x^2\sin y$ 看成 y 的一元函数，将其对 y 求导，结果为 $x^2\cos y$．按这种方法得到的结果称为偏导数．下面给出偏导数定义．

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，见图 7-6，相应地，函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

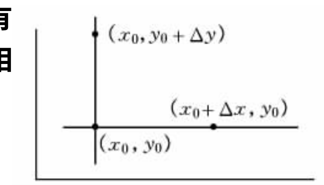

图 7-6

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f_x(x_0,y_0)$，即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

该偏导数也常用下面的符号来表示

$$f_x{}'(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x{}'\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$f_y(x_0,y_0),\ f_y{}'(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_y{}'\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 也可表示为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

原点处的两个偏导数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 可表示为

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x},$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，则这个偏导数就是 x，y 的函数，称之为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数，记为

$$f_x(x,y),\ f_x{}'(x,y),\ f_x,\ f_x{}',\ z_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x}.$$

类似可定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记为

$$f_y(x,y),\ f_y{}'(x,y),\ f_y,\ f_y{}',\ z_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

由偏导函数的概念可知，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值，$f_y(x_0,y_0)$ 就是 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 如同一元函数那样，以后在不会引起混淆的地方也将偏导函数称为偏导数.

偏导数的概念可推广到二元以上的函数. 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

由偏导数定义可知，多元函数对某一个变量的偏导数，是将该变量作为变量，其余变量都看做常量时所得到的导数，因此，一元函数的求导法则也适用于求偏导数.

例 1　求函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　将 y 看成常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times 1+3\times 2=8.$$

将 x 看成常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times 1+2\times 2=7.$$

例 2　求 $u=x^{yz}$ 的偏导数.