陕西省教育厅重点教材建设项目

高等数学

理工类

主编／邓建中　李广民

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(理工类) / 邓建中，李广民主编. —西安: 西北大学出版社，2006.7
ISBN 7－5604－2161－X

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①邓... ②李... Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第080168号

高等数学(理工类)		**主　　编**	邓建中　李广民
出版发行	西北大学出版社	**社　　址**	西安市太白北路229号
电　　话	029 － 88303042	**邮政编码**	710069
经　　销	新华书店	**印　　刷**	陕西向阳印务有限公司
版　　次	2006年7月第1版	**印　　次**	2006年7月第1次印刷
开　　本	787×1092　1/16	**印　　张**	25
字　　数	600千字	**印　　数**	1—7000
书　　号	ISBN 7－5604－2161－X/O · 134	**定　　价**	36.00元

编写说明

本教材是在陕西省教育厅领导和组织下，为应用型理工科本科学生编写的教材。

本书取材以培养应用型人才为目的，以必须、够用为度。从打好基础、兼顾后续课程需要出发，按照本科生基本要求确定内容。学时较少的院校，可以删去带*号的部分.

本书针对学生的实际基础，注意复习中学数学、物理知识，讲述详细，例题较多，论证结合几何直观，力求通俗易懂，极限的ε定义、寻找辅助函数的技巧等被弱化。例题与习题选择紧扣基本概念、基本理论和基本方法，数量也较多；希望通过讲授、课堂练习与讨论，引导学生认真阅读教材，独立完成作业，掌握基本要求。综合题与带*号的习题，供学生进一步钻研参考。各章多处附注，章末附带小结、自测题、综合题，用来帮助学生理清思路、抓住重点、避免误解、出错，掌握学习方法，培养自学能力。另外，还安排了近年的部分考研题，用于学生自学之用。

本书不追求严格论证，但仍注意培养学生抽象思维、逻辑推理、空间想象与表示、分析解决实际问题的能力。重要概念均从实例引出，重视几何与物理意义。例题与习题中实例较多，以期提高学生兴趣。强调几何作图，注意从图形引出结论。重要定理的证明注意简化，分散难点。如由左右导数定义引出费马定理，使罗尔定理成为显然，再用简单辅助函数推出拉格朗日、柯西中值定理。

本书推介的方法力求有效、统一。如强调用微元法建立积分式与微分方程；强调用等价无穷小求极限、推导求导公式、看待微分与近似计算、判断级数敛散；强调用复合函数求导法统帅隐函数、反函数、参数式函数的求导法；强调用试探法统帅线性微分方程通解、特解的求法；强调用函数的单调性证明不等式与恒等式，放弃直接使用拉格朗日、柯西中值定理；强调用比值法既判断正项级数的敛散性，也求幂级数的敛区，淘汰了幂级数收敛半径公式。

学校是德育教育的阵地。本书特别介绍了十多位数学家的生平业绩，推荐其格言、名句；用以激励学生爱国、奉献、自强、勤奋、诚实、严谨的品德。

本书主审是西安交通大学龚冬保教授。他对高等数学理论和国内外教材作过深入、独到的研究。为保证本书的质量，在酷署中龚教授带病辛苦工作，提出了很多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

本书主编为邓建中、李广民教授，于大光、张宇萍、柴伟文、任春丽、陈慧婵、张晓清等副教授各编写一或两章。由于时间仓促，水平有限，缺点和错误一定不少，恳请读者批评指正。

编　者

2006-03

CONTENTS

目录

第 1 章　函数、极限与连续

第一节　函数的概念与性态 ………… /1

习题 1-1 ………… /13

第二节　数列的极限 ………… /14

习题 1-2 ………… /19

第三节　函数的极限 ………… /19

习题 1-3 ………… /29

第四节　无穷小量和无穷大量 ………… /30

习题 1-4 ………… /34

第五节　函数的连续性 ………… /34

习题 1-5 ………… /40

本章小结 ………… /41

数学家简介 ………… /42

自测题（一）………… /44

综合题（一）………… /45

第 2 章　导数和微分

第一节　导数的概念 ………… /48

习题 2-1 ………… /53

第二节　导数的四则运算法则 ………… /53

习题 2-2 ………… /55

第三节　复合函数求导法 ………… /56

习题 2-3 ………… /63

第四节　高阶导数 ………… /64

习题 2-4 ………… /65

第五节　微分 ………… /66

习题 2-5 ………… /70

本章小结 ………… /71

数学家简介……………………………………………………………………/71
自测题（二）……………………………………………………………………/72
综合题（二）……………………………………………………………………/73

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理……………………………………………………/75
习题 3-1 ……………………………………………………………/79
第二节 洛必达法则……………………………………………………/80
习题 3-2 ……………………………………………………………/84
第三节 函数单调性与不等式的证明……………………………………/84
习题 3-3 ……………………………………………………………/86
第四节 函数极值、最值及应用…………………………………………/87
习题 3-4 ……………………………………………………………/91
第五节 函数的凹凸和函数图形的描绘…………………………………/92
习题 3-5 ……………………………………………………………/96
第六节 曲线的弧微分与曲率……………………………………………/96
习题 3-6 ……………………………………………………………/98
本章小结…………………………………………………………………/98
数学家简介………………………………………………………………/99
自测题（三）……………………………………………………………/100
综合题（三）……………………………………………………………/101

第 4 章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质…………………………………………/102
习题 4-1 ……………………………………………………………/105
第二节 第一换元积分法…………………………………………………/106
习题 4-2 ……………………………………………………………/109
第三节 第二换元积分法…………………………………………………/110
习题 4-3 ……………………………………………………………/113
第四节 分部积分法………………………………………………………/113
习题 4-4 ……………………………………………………………/116
第五节 几类初等函数积分法……………………………………………/116
习题 4-5 ……………………………………………………………/121
本章小结…………………………………………………………………/121
自测题（四）……………………………………………………………/123
综合题（四）……………………………………………………………/124

第 5 章　定积分

第一节　定积分的概念与性质 …………………………… /125

习题 5-1 …………………………… /130

第二节　微积分基本公式 …………………………… /131

习题 5-2 …………………………… /135

第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 …………………………… /136

习题 5-3 …………………………… /141

第四节　广义积分 …………………………… /141

习题 5-4 …………………………… /145

第五节　定积分的几何应用 …………………………… /146

习题 5-5 …………………………… /154

第六节　定积分的物理应用 …………………………… /154

习题 5-6 …………………………… /157

本章小结 …………………………… /158

数学家简介 …………………………… /159

自测题（五）…………………………… /159

综合题（五）…………………………… /161

第 6 章　向量代数与空间解析几何

第一节　向量及其运算 …………………………… /162

习题 6-1 …………………………… /168

第二节　向量的数量积与向量积 …………………………… /168

习题 6-2 …………………………… /173

第三节　空间平面与直线 …………………………… /173

习题 6-3 …………………………… /179

第四节　空间曲面及其方程 …………………………… /180

习题 6-4 …………………………… /184

第五节　空间曲线及其方程 …………………………… /185

习题 6-5 …………………………… /188

本章小结 …………………………… /189

自测题（六）…………………………… /189

综合题（六）…………………………… /190

第 7 章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念与极限 …………………………… /192

习题 7-1 …… /198
第二节　偏导数…… /199
习题 7-2 …… /202
第三节　全微分及其应用…… /203
习题 7-3 …… /206
第四节　复合函数与隐函数求导法…… /206
习题 7-4 …… /212
第五节　方向导数与梯度…… /213
习题 7-5 …… /216
第六节　微分法在几何上的应用…… /217
习题 7-6 …… /219
第七节　多元函数的极值及其求法…… /219
习题 7-7 …… /224
本章小结…… /225
自测题（七）…… /225
综合题（七）…… /226

第 8 章　重积分

第一节　二重积分的概念与性质…… /228
习题 8-1 …… /232
第二节　二重积分的计算…… /232
习题 8-2 …… /240
第三节　二重积分的应用…… /242
习题 8-3 …… /245
第四节　三重积分的概念及计算…… /246
习题 8-4 …… /254
本章小结…… /255
自测题（八）…… /256
综合题（八）…… /257

第 9 章　曲线积分与曲面积分

第一节　对弧长的曲线积分…… /259
习题 9-1 …… /264
第二节　对坐标的曲线积分…… /264
习题 9-2 …… /269
第三节　格林公式及其应用…… /270

习题 9-3 …………………………………………………… /278
第四节　对面积的曲面积分 ………………………………… /279
习题 9-4 …………………………………………………… /283
第五节　对坐标的曲面积分 ………………………………… /284
习题 9-5 …………………………………………………… /289
第六节　高斯公式与斯托克斯公式 ………………………… /289
习题 9-6 …………………………………………………… /295
本章小结 ……………………………………………………… /296
数学家简介 …………………………………………………… /296
自测题（九）…………………………………………………… /297
综合题（九）…………………………………………………… /298

第 10 章　微分方程

第一节　微分方程的基本概念 ……………………………… /300
习题 10-1 ………………………………………………… /302
第二节　一阶微分方程的解法 ……………………………… /303
习题 10-2 ………………………………………………… /311
第三节　可降阶的高价微分方程 …………………………… /312
习题 10-3 ………………………………………………… /315
第四节　高阶线性微分方程 ………………………………… /315
习题 10-4 ………………………………………………… /318
第五节　二阶常系数线性微分方程 ………………………… /318
习题 10-5 ………………………………………………… /327
本章小结 ……………………………………………………… /328
数学家简介 …………………………………………………… /329
自测题（十）…………………………………………………… /329
综合题（十）…………………………………………………… /330

第 11 章　无穷级数

第一节　常数项级数的概念和性质 ………………………… /331
习题 11-1 ………………………………………………… /334
第二节　常数项级数的审敛法 ……………………………… /335
习题 11-2 ………………………………………………… /342
第三节　幂级数 ……………………………………………… /343
习题 11-3 ………………………………………………… /348
第四节　函数展开成幂级数 ………………………………… /348

习题 11-4 ………………………………………………………… /356
第五节　傅里叶级数……………………………………………… /356
习题 11-5 ………………………………………………………… /363
本章小结…………………………………………………………… /364
数学家简介………………………………………………………… /365
自测题（十一）…………………………………………………… /365
综合题（十一）…………………………………………………… /366
习题参考答案……………………………………………………… /368

第1章 函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是常量. 而高等数学的研究对象则是变量，主要是变量之间的依赖关系——函数，特别是连续函数，研究的基本方法是极限. 本章主要介绍变量、函数、极限和函数的连续性等概念及基本性质.

第一节　函数的概念与性态

一、集合　常量与变量

1. 区间

高等数学中涉及的数，一般均指实数。

区间是用得比较多的一类数集. 开区间(a, b)用集合表示是$\{x \mid a<x<b\}$，用不等式表示是$a<x<b$，在数轴上则是以a, b为端点但不包含端点a和b的一条线段.

闭区间$[a, b]$用集合表示是$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，用不等式表示是$a \leqslant x \leqslant b$，在数轴上则是以$a, b$为端点，且包含端点$a$和$b$的一条线段.

半开区间$[a, b)$用集合表示是$\{x \mid a \leqslant x<b\}$，用不等式表示是$a \leqslant x<b$，在数轴上则是以$a, b$为端点，且包含左端点$a$的一条线段. 类似的有$(a, b]$.

以上这些端点为有限值的区间称为有限区间，$b-a$称为区间长度. 此外，还有无限区间，引入记号$+\infty$（正无穷大）和$-\infty$（负无穷大），即可表示无限区间. 无限区间主要有以下几种：$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$，表示大于$a$的全体实数的集合；$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，表示大于或等于$a$的全体实数的集合；$(-\infty, a)=\{x \mid x<a\}$，表示小于$a$的全体实数的集合；$(-\infty, a]=\{x \mid x \leqslant a\}$，表示小于或等于$a$的全体实数的集合；$(-\infty,+\infty)=\{x \mid-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数，在几何上表示整个数轴.

需要注意的是，∞只是一个记号，它不是一个数，因此与之相伴的一定是圆括弧.

在学习本课程时经常会提到“邻域”的概念. 含有点a的任何开区间称为点a的邻域，记为$U(a)$. 点a的δ邻域是指以a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta, a+\delta)$，记作$U(a, \delta)$，即$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，点$a$称为该邻域的中心，$\delta$称为该邻域的半径，在数轴上的表示如图 1-1 所示.

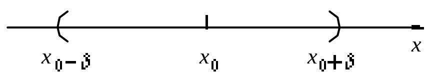


图 1-1

有时需要用到不含中心 a 的邻域. 把点 a 的 δ 邻域中心 a 去掉后, 称为点 a 的去心 δ 邻域. a 的去心 δ 邻域可用不等式 $0<|x-a|<\delta$ 表示.

应当指出, 邻域的半径虽然没有明确规定其大小, 但一般都是取很小的正数.

2. 常量与变量

在任何一个生产过程或科学实验过程中, 总要涉及这样或那样的量, 像体积、质量、温度、距离、速度、电流等, 其中有些量在过程中是变化的, 而另一些量在过程中则保持不变. 例如, 在火车的行驶过程中, 火车离开车站的距离不断在变化, 而火车所载的货物质量保持不变. 我们把在某一过程中变化的量称为变量, 而把在这一过程中始终保持不变的量称为常量.

一个量是常量还是变量, 不是绝对的, 要根据具体过程做具体分析. 例如, 重力加速度 g, 严格地说, 它的数值是随着与地心距离的不同以及所处位置的纬度不同而变化的, 因而它是变量. 而当精确度要求不高时, 在地面附近一般取 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$, 这就是常量了.

在高等数学中, 通常用字母 x, y, z 等表示变量, 用字母 a, b, c 等表示常量.

初等数学, 就其总体来说, 是"常量的数学", 而高等数学可以说是"变量的数学"了.

二、函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量同时变化. 但这几个变量不是彼此孤立变化的, 而是相互有联系、遵从一定规律变化的.

现在考虑两个变量的简单情形.

例 1　自由落体问题. 设物体下落的时间为 t, 下落距离为 h, 假定从 $t=0$ 时刻开始下落, 那么 h 与 t 之间的依赖关系由公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 给出, 其中 g 为重力加速度. 在这个关系中, 下落距离 h 随时间 t 的变化而变化. 若物体落地的时刻为 $t=T$, 则当时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任取一值时, 由上式即可确定下落距离. 例如, 当 $t=1\mathrm{s}$ 时, $h=\frac{1}{2}g$, 当 $t=2\mathrm{s}$ 时, $h=2g$, 等等. 其特点是, 当下落时间 t 取定一个值时, 对应距离 h 的值也就确定了.

例 2　圆的面积问题. 考虑圆的面积与它的半径之间的依赖关系: $A=\pi r^2$. 当圆的半径 r 取定某一正的数值时, 圆的面积 A 也就随之确定了. 当半径 r 变化时, 其面积 A 也变化.

例 3　图 1-2 是气温自动记录仪记录的某一天内的气温变化曲线, 它给出了时间 t 和温度 T 之间的依赖关系.

时间 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$, 当 t 在该范围内任取一值时, 从图中即可找到气温的对应值, 例如 $t=10$ 时, 温度 $T=16$℃.

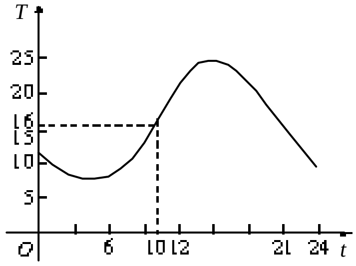


图 1-2

例 4　一块钢坯从温度为 1 000℃ 的炉中取出后, 放入温度为 0℃ 的冷水中冷却. 每隔 1min 测量一次钢坯的温度, 得到如下的数据:

时间/min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
温度/℃	607	367	223	135	82	50	30	18	11	6	4	2.5	1.8	1.3	0.9	0.6

从这个表格可以清楚地看出钢坯的温度随时间变化的规律：随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近冷水的温度.

上述几个例子描述的问题各不相同，但当抽出所考虑的量的具体含义后，它们却有共同的特征，每个问题都表达了两个变量之间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内变化时，另一个变量就按一定的法则有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

还应注意，在上面的几个例子中，两个变量的取值都有一定的范围. 例如在例 1 中，t 和 h 都不能取负值. 自然地，在不同的问题中，变量的取值范围也会是不同的. 下面给出函数的定义.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果按照某种一定的法则（或关系），对于每个 $x\in D$，都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为此函数的定义域，而因变量 y 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的值域.

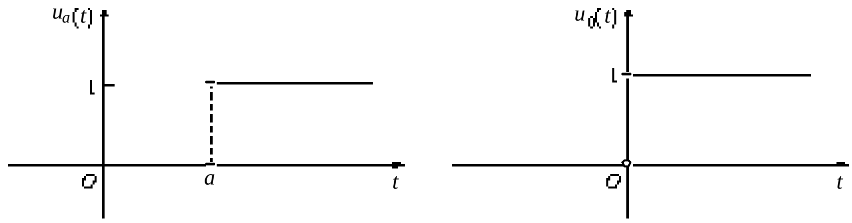
函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用 φ 或 F 等其他字母表示，此时函数记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等.

在函数的定义中有两个要素，一个是自变量的定义域，另一个是确定自变量 x 与因变量 y 之间对应关系的法则. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如在例 1 中，定义域 $D=[0,T]$；在例 2 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；在例 3 中，定义域 $D=[0,24]$. 如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域是 $[-2,1)\cup(1,2]$. 一般情况下，求函数的定义域应把握以下几点：分母不为零；偶次根号下非负；$\log_a(h(x))$ 中 $h(x)>0$；$\arcsin(h(x))$ 和 $\arccos(h(x))$ 中的 $|h(x)|\leqslant 1$. 当然，在实际应用问题中还应考虑实际问题的因素，如价格不能小于零、质量不能为负值等.

由于函数的对应法则是多种多样的，所以表示一个函数要采取适当的方法. 一般表示一个函数主要采用解析法、表格法和图示法. 这几种方法在中学都比较熟悉了. 以上的例 1 和例 2 采用的就是解析法，例 3 采用的是图示法，例 4 用的是表格法. 在高等数学中还常常用到分段函数，即用几个式子分段来表示一个函数.

例 5　函数 $u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$. 此函数在电子技术中经常遇到，称为单位阶跃函数. 这个函数的特点是不能用一个解析式表示，这种用两个

以上解析式表示的函数称为分段函数．该函数的图形如图 1-3 所示．



(a)　　　　(b)

图 1-3

例 6　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数．其图形如图 1-4 所示，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1．它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为所有整数．这个函数的特点是，与 x 相对应的函数 y 值为不超过 x 的最大整数，例如，$\left[\dfrac{4}{9}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[-4.2]=-5$．

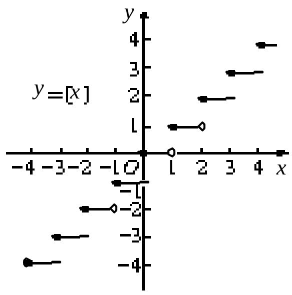


图 1-4

例 7　设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+9, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(0.5)$，$f(1)$，$f(3)$，$f(4)$ 的值．

解　因 $x=0.5$，$x=1$，$x=3$，$x=4$ 分别属于不同区间，故分别求出其函数值为

$$f(0.5)=\frac{1}{2}x\Big|_{x=0.5}=0.25\qquad f(1)=x\Big|_{x=1}=1$$

$$f(3)=x^2-6x+9\Big|_{x=3}=0\qquad f(4)=x^2-6x+9\Big|_{x=4}=1$$

表示函数还可用其他方法．例如，可用一句话表示 $y=[x]=$ 不超过 x 的最大整数，还可用方程表示函数，如方程 $x=\lg y$ 可表示成 $y=e^x$．

三、函数的简单性态

下面介绍今后经常遇到的几种关于函数的简单性态．

1．函数的单调性

假定函数 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数，如果对属于区间 $I\subset D$ 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-5)；若当 $x_1<x_2$ 时，总有不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-6)．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．从图形上看，单调增加函数表现为曲线从左到右上升，而单调减少函数的图形则表现为从左到右下降．例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$单调增加，在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$单调减少；余弦函数$y=\cos x$在区间$(0,\pi)$单调增加，在区间$(-\pi,0)$单调减少. 正切函数$y=\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$单调增加. 再如, 当$\alpha>0$时，幂函数$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$单调增加；当$\alpha<0$时，$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$单调减少.

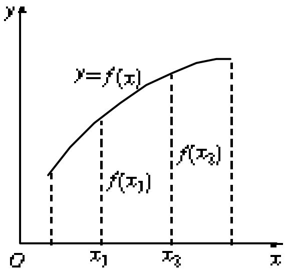


图 1-5

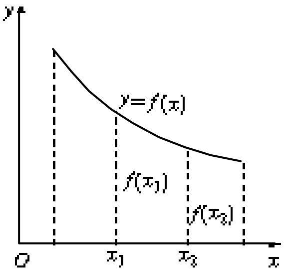


图 1-6

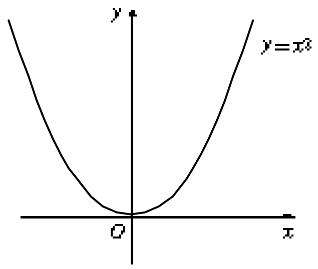


图 1-7

如果能作出函数的图象，那么这个函数的单调性很容易得到，如$y=x^2$是一条抛物线（图 1-7），从图形上很容易看出，它在$(-\infty,0)$上单调减少，在$(0,+\infty)$上单调增加. 以后利用导数作为工具能很方便地判断函数的单调性.

例 8　确定函数$y=x^3$的单调区间.

解　函数$y=x^3$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，在其中任取两点x_1和x_2，设$x_1<x_2$，并设与之对应的函数值分别为y_1和y_2，则

$$y_2-y_1=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)[(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2]$$

显然，$x_1<x_2$时始终有$y_1<y_2$. 因此由函数单调性的定义知，函数$y=x^3$在其定义域$(-\infty,+\infty)$内单调增加，是一个单调增加函数. 从图形上易知该函数单调增加(图 1-8).

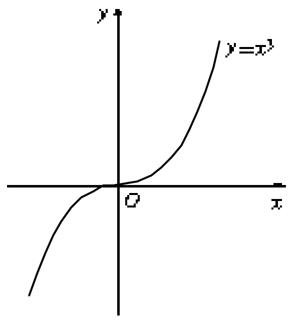


图 1-8

2. 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，且对于属于D的任何x值，恒有$f(-x)=f(x)$成立，则称函数$f(x)$为偶函数；如果恒有$f(-x)=-f(x)$成立，则称函数$f(x)$为奇函数.

从函数图形上看，偶函数的图形是关于y轴对称的，奇函数是关于原点对称的（图 1-9）.

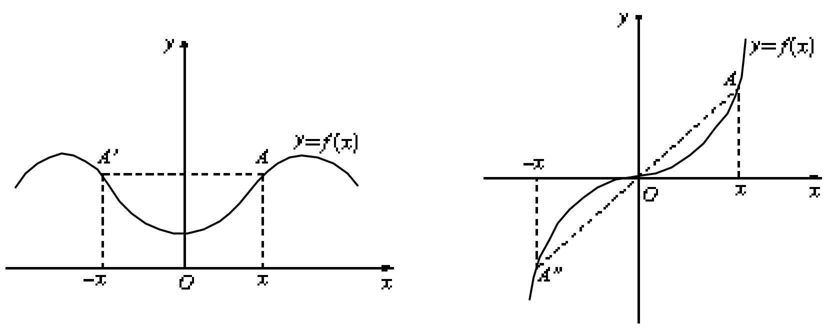


图 1-9

例如，对于函数 $y=x^3$，由于 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以它是奇函数；而对于函数 $y=x^4$，由于 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$，所以它是偶函数. 一般地，x 的奇次幂是奇函数，x 的偶次幂是偶函数.

除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇非偶函数. 可以证明，任何一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数一定能写成一个奇函数和一个偶函数之和. 实际上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则容易验证，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，并且 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数.

读者自证 两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数与偶函数的积是奇函数.

3\. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零数 l，使对于任意 x，$x\pm l\in D$ 时总有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，其最小正周期均为 2π. 正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，其周期为 π.

4\. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对属于区间 $I\subset D$ 上的任意 x 值，如果存在正数 M 使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界. 函数无界是指无论对于任何正数 M，总存在 $x_1\in I$，使得 $|f(x_1)|>M$.

若对属于区间 $I\subset D$ 上的任意 x 值，存在正数 K_1 使得 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界，而正数 K_1 称为函数 $f(x)$ 的一个上界. 如果存在正数 K_2 使得 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有下界，而正数 K_2 称为函数 $f(x)$ 的一个下界.

关于函数的有界性，有结论：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界.（此结论读者可自行证明）

四、反函数和复合函数

1\. 反函数

在自由落体运动过程中，物体下落距离 h 可表示为时间的函数：$h=\frac{1}{2}gt^2$，在其定义域内任意确定一个时刻 t，即可由该函数得到下落的距离 h. 如果考虑此问题的逆问题，即已知下落距离 h，求时间 t，此时有 $t=\sqrt{\frac{g}{2h}}$. 在这里，原来的因变量和自变量进行了交换，这样将自变量和因变量交换所得到的新函数即为原来函数的反函数.

一般地，对于函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，则变量 x 是变量 y 的函数，把这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数

$y=f(x)$称为直接函数. 显然, 如果$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数, 那么$y=f(x)$也是$x=\varphi(y)$的反函数.

习惯上, 我们把自变量用x表示, 因变量用y表示, 因此可将$x=\varphi(y)$写成$y=\varphi(x)$. 由于函数的实质是自变量和因变量的对应关系, 至于x和y仅仅是记号而已, $x=\varphi(y)$和$y=\varphi(x)$中表示对应关系的符号φ并没有改变, 这就表示它们是同一个函数.

下面分析互为反函数的两个函数图形的关系. 如图 1-10 所示, 此时$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$表示同一函数, 其图形为同一曲线. 设函数$y=f(x)$的反函数为$y=\varphi(x)$, $P(a,b)$为函数$y=f(x)$图形上的任一点, 则有$b=f(a)$, 因而$a=\varphi(b)$, 即反函数$y=\varphi(x)$的图形上必有一点$Q(b,a)$与$P(a,b)$对应. 而P, Q两点是关于直线$y=x$对称的 (即直线$y=x$垂直平分线段PQ). 同样可以说, 反函数$y=\varphi(x)$图形上的任意一点也必有函数$y=f(x)$图形上的一点与之对应, 并且这两点同样是关于直线$y=x$对称的. 因此, 可得到关于反函数的一条性质: 在同一个坐标平面内, 函数$y=f(x)$的图形与其反函数$y=\varphi(x)$的图形关于直线$y=x$是对称的.

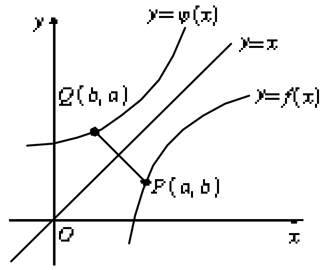


图 1-10

2. 复合函数

在实际问题中, 经常会遇到一个函数和另一个函数发生联系. 例如, 球的体积V是其半径的函数: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 由于热胀冷缩, 随着温度的改变, 球的半径也会发生变化. 根据物理学知道, 半径r随温度T变化的规律是$r=r_0(1+\alpha T)$, 其中, r_0, α为常数, 将这个关系代入球的体积公式, 即得到体积V与温度T的函数关系$V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+\alpha T)]^3$. 这种将一个函数代入另一个函数得到的函数称为上述两个函数的复合函数.

一般来说, 若y是u的函数$y=f(u)$, 其定义域为$D(f)$, 同时u又是x的函数$u=\varphi(x)$, 它的值域为$R(\varphi)$, 则当$D(f)$和$R(\varphi)$的交集非空时, 可以确定一个函数$y=f(u)=f[\varphi(x)]$, 这个函数称为由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$构成的复合函数.

在复合函数的定义中, 为什么要求$y=f(u)$的定义域和$u=\varphi(x)$的值域的交集非空? 请读者自行说明.

例如, 设$y=\cos u$, $u=x^2$, 则由这两个函数复合而成的函数为$y=\cos x^2$, 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

再如, 由三个函数$y=\cos u$, $u=v^2$, $v=x+1$ 复合而成的函数是$y=\cos(x+1)^2$, 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

需要注意的是, 有些函数是不能复合的, 例如, 函数$y=\sqrt{1-u^2}$, $u=x^2+2$就不能复合. 这是因为, 函数$y=\sqrt{1-u^2}$的定义域为$[-1,+1]$, 而函数$u=x^2+2$的值域为$[2,+\infty]$, 二者的交集为空, 根据上面的说明, 这两个函数无法复合.