高等数学竞赛题解析

陈 仲 编著

东南大学出版社
·南京·

内容简介

本书内容包括江苏省高等学校非理科专业自1991年以来共八届高等数学竞赛试题与解析、南京大学历年大学数学竞赛试题与解析、莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛题选解及思考题.

高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思想.高等数学竞赛试题中既含基本题,这些题目有益于基本技能的练习;又含很多具有较高水平与较大难度的试题,这些题目构思绝妙,方法灵活,技巧性强.

本书可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛题解析/陈仲编著.—南京:东南大学出版社,2008.1

ISBN 978-7-5641-1011-6

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第178549号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编:210096)

出版人:江汉

全国各地新华书店经销 溧阳晨明印刷有限公司印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:16.25 字数:319千

2008年1月第1版 2008年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5641-1011-6/O·60

印数:1～5000册 定价:25.00元

前　言

高等数学(或称大学数学)是所有高等学校一年级大学生通修的基础课. 江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会每两年组织一次全省性的高校非理科专业高等数学竞赛(仅第一届和第二届间隔三年). 参赛学校有东南大学、南京航空航天大学、河海大学、南京理工大学、南京邮电大学、南京工业大学、解放军理工大学、南京农业大学、南京林业大学、南京财经大学、南京审计学院、南京工程学院、扬州大学、苏州大学、江苏大学、江南大学、中国矿业大学、南通大学、三江学院、晓庄学院,各重点高校的二级学院,各类职业技术学院、技术师范学院,各地方工学院、职业大学、高等专科学院等共 72 所,参赛考生在 2006 年达 5500 多人,涉及本科一级、二级、三级、民办本科以及专科等类别. 南京大学不参加全省的高等数学竞赛,校教务处曾组织过多次全校性的大学数学竞赛.

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于本科要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量. 高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思想,它要求学生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间抽象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书汇集了江苏省普通高校非理科专业自 1991 年以来共八届高等数学竞赛试题、南京大学历年大学数学竞赛试题和莫斯科大学等国外高校大学生高等数学竞赛试题,逐题详细解析,并对重要题目进行深入分析研究,总结解题方法和技巧. 这些竞赛试题中既含基本题,它们有益于基本技能的练习;又含很多具有较高水平和较大难度的试题,它们构思绝妙,方法灵活,技巧性强. 编者希望通过对它们的解析,能指导大学生求解竞赛试题,并做到举一反三,触类旁通,提高高等数学学习水平;对于复习准备全国硕士研究生入学考试的大学生,本书也能助你一臂之力,大大提升你的应试能力. 本书最后一篇是思考题.

本书在编写和出版过程中,得到南京大学姚天行教授、许绍溥教授、姜东平教授、陈华钧教授、陈一元教授和东南大学管平教授、黄骏教授、董梅芳教授、徐丰老师等的支持和帮助,编者谨此一并表示衷心的感谢.

陈　仲

2007 年 10 月于南京大学

目　录

第二篇　南京大学历年大学数学竞赛试题与解析

第三篇　莫斯科大学等国外高校大学生高等数学竞赛题选解

第四篇　思考题

第 一 篇

江苏省普通高等学校非理科专业
历届高等数学竞赛试题与解析

第一届(1991 年)竞赛试题与解析

第一届本科竞赛试题

一、填空题(每小题 5 分,共 50 分)

1. 函数 $y=\sin x\,|\sin x|\left(\text{其中} |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为________.

2. 当 $x\to 0$ 时,$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小,则$n=$ ________.

3. 在 $x=1$ 时有极大值 6,在 $x=3$ 时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是________.

4. 设 $P(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$,其中 m,n 为正整数,则 $P(1)=$ ________.

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos(x^2))\sin x\mathrm{d}x=$ ________.

6. 函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 关于 x 的幂级数展开式为________,该幂级数的收敛域为________.

7. 已知微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$有特解 $y=\dfrac{x}{\ln|x|}$,则 $\varphi(x)=$ ________.

8. 直线$\begin{cases}x=2z,\\ y=1\end{cases}$绕 z 轴旋转,得到的旋转面的方程为________.

9. 已知 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量,$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

10. 曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+z=R$ 的交线,从原点看去 C 的方向为顺时针方向,则$\displaystyle\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=$ ________.

二、(7 分)已知数列$\{na_n\}$收敛,$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$也收敛,求证:$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

三、(7 分)一向上凸的光滑曲线连接了$O(0,0)$,$A(1,4)$两点,而$P(x,y)$为曲线上任一点,已知曲线与线段 OP 所围区域的面积为 $x^{\frac{4}{3}}$,求该曲线的方程.

四、(12 分)求由曲面 $x^2+y^2=cz$,$x^2-y^2=\pm a^2$,$xy=\pm b^2$ 和 $z=0$ 围成区域的体积(其中 a,b,c 为正实数).

五、(12 分)一点先向正东移动 a m,然后左拐弯移动 aq m(其中 $0<q<1$),如此不断重复左拐弯,使得后一段移动距离为前一段的 q 倍,这样该点有一极限位

置,试问该极限位置与原出发点相距多少米?

六、(12 分) 已知 $f(x)$ 在$[0,2]$上二次连续可微,$f(1)=0$,证明:

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{3}M$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f''(x)|$.

第一届本科竞赛试题解析

一、填空题

1. 解析　当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$y=\sin^2 x$,$\sin x=\sqrt{y}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$,所以 $x=\arcsin\sqrt{y}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$;当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 时 $y=-\sin^2 x(-1\leqslant y\leqslant 0)$,所以$\sin^2 x=-y$,$\sin x=-\sqrt{-y}$,$x=\arcsin(-\sqrt{-y})=-\arcsin(\sqrt{-y})$ $(-1\leqslant y\leqslant 0)$.
于是所求反函数为

$$y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

注　若利用公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,类似的分析可得所求反函数为

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\arccos(1-2x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\dfrac{1}{2}\arccos(1+2x), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

2. 解析　因 $x\to 0$ 时,应用马克劳林公式,有

$$\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\\&=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x\cdot\cos x&=\frac{1}{2}\sin(2x)\\&=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

于是

$$3x-4\sin x+\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{10}x^5+o(x^5)$$

即 $x \to 0$ **时,原式为** 5 **阶无穷小,故** $n=5$.

3. 解析　因 $x=1$, $x=3$ **时** y **取极值,所以** y' **在** $x=1$ **与** $x=3$ **处等于** 0. **故令** $y'=a(x-1)(x-3)$,**积分得**

$$y=a\int(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+C$$

因 $y(1)=6$, $y(3)=2$,**代入可求得** $a=3$, $C=2$,**故所求最低幂次的多项式为**

$$y=x^3-6x^2+9x+2$$

4. 解析　因为

$$(1-x^m)^n=(1-x)^n\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$$

令 $u(x)=(1-x)^n$, $v(x)=(1+x+\cdots+x^{m-1})^n$,**应用莱布尼兹公式,因** $u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(n-1)}(1)=0$, $u^{(n)}(1)=(-1)^n n!$,**所以**

$$\begin{aligned}P(1)&=v^{(n)}(1)u(1)+nv^{(n-1)}(1)u'(1)+\cdots+v(1)u^{(n)}(1)\\&=0+0+\cdots+0+m^n(-1)^n n!=(-1)^n m^n\cdot n!\end{aligned}$$

5. 解析　因为 $x\sin x$ **为偶函数**,$\cos(x^2)\sin x$ **为奇函数,应用奇、偶函数在对称区间上定积分的性质,知**

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2(x\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

6. 解析　因为 $\ln(1-u)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}u^n$, $-1\leqslant u<1$,**所以**

$$\begin{aligned}\ln(1-x-2x^2)&=\ln(1+x)+\ln(1-2x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n\end{aligned}$$

收敛域为 $-1<x\leqslant 1$ **与** $-1\leqslant 2x<1$ **的交集,即**$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

7. 解析　因 $y'=\frac{\ln|x|-1}{(\ln|x|)^2}$,**代入微分方程得**

$$\frac{\ln|x|-1}{(\ln|x|)^2}=\frac{1}{\ln|x|}+\varphi(\ln|x|)$$

令 $\ln|x|=t$，得 $\varphi(t)=\dfrac{t-1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1-t}{t^2}=-\dfrac{1}{t^2}$，故

$$\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}$$

8. 解析 在所求曲面上任取点 $P(x, y, z)$，过点 P 作平面垂直于 z 轴，该平面与直线交于点 $Q(x_0, y_0, z)$，与 z 轴交于点 $M(0, 0, z)$，则 $|PM|^2=|QM|^2$，即 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，由于 $\begin{cases}x_0=2z,\\ y_0=1,\end{cases}$ 所以所求旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2-4z^2=1$$

9. 解析 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，故 $|\boldsymbol{a}|=1$. 因两向量垂直的充要条件是它们的数量积为 0，所以

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\\ (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=-7,\\ 30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8|\boldsymbol{b}|^2=7\end{cases}$$

由此可解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，$|\boldsymbol{b}|^2=1$，于是

$$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

10. 解析 记 $\Sigma: x+z=R\ (x^2+y^2+z^2\leqslant R^2)$，取上侧，$P=y$，$Q=z$，$R=x$，应用斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-\iint_\Sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-\iint_\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}S\\ &=-\sqrt{2}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2\\ &=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2\quad\left(\text{圆}\Sigma\text{ 的半径为}\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\end{aligned}$$

二、解析 因为级数的部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1} k(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n+1} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} ka_{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} ka_k - \sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k \\ &= (n+1)a_{n+1} - a_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (n+1)a_{n+1} - a_1 - \sum_{k=2}^{n+1} k(a_k - a_{k-1})$$

因为数列$\{na_n\}$收敛,所以$(n+1)a_{n+1} \to A\ (n \to \infty)$;因为级数$\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛,所以其部分和$\sum_{k=2}^{n+1} k(a_k - a_{k-1}) \to B\ (n \to \infty)$. 这里 A, B 均为常数,故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A - a_1 - B$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

三、解析　设所求曲线为 $y = y(x)$,由题意可得

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}xy(x) = x^{\frac{4}{3}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

两边对 x 求导得微分方程

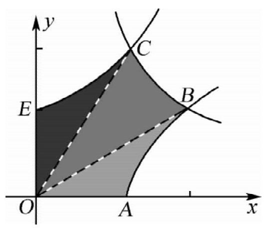
$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{8}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad 0 < x \leqslant 1$$

且 $y(0) = 0$,此为一阶线性方程,其通解为

$$y = x\left(C - \frac{8}{3}\int x^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x\right) = Cx + 4x^{\frac{1}{3}}$$

由于 $y(1) = 4$,代入上式可得 $C = 0$,于是所求曲线为 $y = 4\sqrt[3]{x}$.

四、解析　题中 6 个曲面关于 yz 平面对称,关于 zx 平面也对称,yz 平面与 zx 平面将该区域分为 4 块等体积区域,将第一卦限的一块投影到 xy 平面上得区域 D. 其中区域 $OABO$ 记为 D_1,$\angle AOB = \alpha$;区域 $OBCO$ 记为 D_2,$\angle AOC$ 记为 β(如图所示). $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CE}$ 的极坐标分别为



$$\rho_1^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta},\ \rho_2^2 = \frac{2b^2}{\sin 2\theta},\ \rho_3^2 = \frac{-a^2}{\cos 2\theta}$$

因此立体区域的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= 4\iint_D \frac{1}{c}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}\frac{1}{c}\rho^3\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4}{c}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_1(\theta)}\rho^3\,\mathrm{d}\rho + \frac{4}{c}\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_2(\theta)}\rho^3\,\mathrm{d}\rho + \frac{4}{c}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_3(\theta)}\rho^3\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{c}\int_0^{\alpha}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{c}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{4b^4}{\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{c}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^4}{2c}\tan 2\alpha - \frac{2b^4}{c}\cot 2\theta\Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{a^4}{2c}\tan 2\theta\Big|_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

由于 $\rho_1(\alpha)=\rho_2(\alpha)$，$\rho_2(\beta)=\rho_3(\beta)$，所以

$$\tan 2\alpha = \frac{2b^2}{a^2},\quad \tan 2\beta = -\frac{2b^2}{a^2}$$

于是

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{a^2b^2}{c} - \frac{2b^4}{c}\left(-\frac{a^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^2}\right) + \frac{a^4}{2c}\left(0 + \frac{2b^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{4}{c}a^2b^2
\end{aligned}
$$

五、解析　设出发点为坐标原点 $O(0,0)$，移动 n 次到达点 (x_n, y_n). 根据移动规则得 $x_1=a$，$x_2=a$，$x_3=a-aq^2$，$x_4=a-aq^2$，$x_5=a-aq^2+aq^4$，$x_6=x_5$，$x_7=a-aq^2+aq^4-aq^6$，$x_8=x_7$，…，归纳得

$$x_{2n-1}=a-aq^2+aq^4-\cdots+(-1)^{n-1}aq^{2(n-1)},\qquad x_{2n}=x_{2n-1}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\frac{a}{1+q^2}$$

同样根据移动规则得 $y_1=0$，$y_2=aq$，$y_3=y_2$，$y_4=aq-aq^3$，$y_5=y_4$，$y_6=aq-aq^3+aq^5$，$y_7=y_6$，…，归纳得

$$y_{2n}=aq-aq^3+\cdots+(-1)^{n-1}aq^{2n-1},\qquad y_{2n+1}=y_{2n}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n}=\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\frac{aq}{1+q^2}$$

故极限位置为 $\left(\frac{a}{1+q^2}, \frac{aq}{1+q^2}\right)$，它与原点的距离为

$$d=\sqrt{\left(\frac{a}{1+q^2}\right)^2+\left(\frac{aq}{1+q^2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{1+q^2}}$$

六、解析 $f(x)$ 在 $x=1$ 的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2$$

其中 $x\in[0,2]$,ξ 介于 x 与 1 之间. 上式两边积分得

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= f'(1)\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x\\ &= f'(1)\ \frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^2 |f''(\xi)|(x-1)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}\int_0^2(x-1)^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^2=\frac{1}{3}M\end{aligned}$$

第一届专科竞赛试题

一、填空题(每小题 5 分,共 40 分)

1. 函数 $y=\sin x|\sin x|\left(\text{其中 }|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为________.

2. 已知 m,n 为正整数,则$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=$ ________.

3. 已知α,β为常数,$f(x)$ 可导,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}=$ ________.

4. 当 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$ ________.

5. 在 $x=1$ 时有极大值 6,在 $x=3$ 时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是________.

6. $\int_{-1}^1 x(1+x^{1991})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=$ ________.

7. 已知微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$有特解 $y=\dfrac{x}{\ln|x|}$,则 $\varphi(x)=$ ________.

8. 设 $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ 都是连续函数,已知 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 有三个特解 x, e^x, e^{-x},则此微分方程的通解为________.

二、(8 分) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性(包括发散,条件收敛和绝对收敛).

三、(8 **分**) **设** $x_1=1$, $x_{n+1}+\sqrt{1-x_n}=0$,**试证明数列**$\{x_n\}$**收敛,并求**$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、(8 **分**) **求一连接** $O(0,0)$, $A(1,1)$ **两点的向上凸的连续曲线,使其上任一点** $P(x,y)$ **到** O **的直线** OP **与该曲线所围区域的面积为** x^3.

五、(12 **分**) **设** $f(x)$ **在**$[0,+\infty)$ **上有定义,在**$(0,+\infty)$ **内可导**,$g(x)$ **在**$(-\infty,+\infty)$ **内有定义且可导**, $g(0)=1$,**又当** $x>0$ **时**

$$f(x)+g(x)=3x+2$$
$$f'(x)-g'(x)=1$$
$$f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$$

求 $f(x)$ **与** $g(x)$ **的表达式.**

六、(12 **分**) **设** $f(x)$ **为**$[0,+\infty)$ **上单调减少的连续函数,试证明:**

$$\int_0^x(x^2-3t^2)f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$$

七、(12 **分**) **设** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **为常数,且**

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$$
$$\left|\sum_{j=1}^n a_{n-j+1}\sin jx\right|\leqslant|\sin x|$$

试证明:

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}$$

第一届专科竞赛试题解析

一、填空题

1. 解析　(**同第一届本科级试题一的第** 1 **题,这里从略**)

2. 解析　**令** $x-\pi=t$,**则**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin m\pi\cos mt+\cos m\pi\sin mt}{\sin n\pi\cos nt+\cos n\pi\sin nt}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^m mt}{(-1)^n nt}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\end{aligned}$$

3. 解析 应用导数的定义,有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\alpha\Delta x)-f(x))-(f(x-\beta\Delta x)-f(x))}{\Delta x}\\
&=\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x)}{\alpha\Delta x}+\beta\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\beta\Delta x)-f(x)}{-\beta\Delta x}\\
&=\alpha f'(x)+\beta f'(x)=(\alpha+\beta)f'(x)
\end{aligned}$$

4. 解析 应用 e^x, $\ln(1-x)$ 的马克劳林公式,有

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\\
&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

于是

$$\begin{aligned}
e^x+\ln(1-x)-1&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\\
&\quad-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-1+o(x^3)\\
&=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

故原式是 x 的 3 阶无穷小,$n=3$.

5. 解析 (同第一届本科级试题一的第 3 题,这里从略)

6. 解析 因 $x(e^x-e^{-x})$ 为偶函数,$x\cdot x^{1991}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数,应用奇、偶函数在对称区间上定积分的性质得

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=2\int_0^1 x d(e^x+e^{-x})\\
&=2x(e^x+e^{-x})\Big|_0^1-2\int_0^1(e^x+e^{-x})dx\\
&=2\left(e+\frac{1}{e}\right)-2(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{4}{e}
\end{aligned}$$

7. 解析 (同第一届本科级试题一的第 7 题,这里从略)

8. 解析 应用线性方程解的性质,令 $y_1=x$, $y_2=e^x$, $y_3=e^{-x}$,记原方程为(1),它所对应的齐次方程为(2). 则 $y_2-y_1=e^x-x$, $y_3-y_1=e^{-x}-x$ 是(2)的两个解,且 e^x-x 与 $e^{-x}-x$ 是线性无关的,所以方程(1)的通解为

$$y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{-x}-x)+x$$