

陕西省教育厅重点教材建设项目

高等数学

■ 经管类

主编 / 周家良 王群智



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(经管类) / 周家良, 王群智主编. — 西安: 西北大学出版社, 2006.7
ISBN 7-5604-2162-8

I. 高... II. ①周... ②王... III. 高等数学-高等学校-教材
IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第080167号

高等数学(经管类)	主 编 周家良 王群智
出版发行 西北大学出版社	社 址 西安市太白北路 229 号
电 话 029 - 88303042	邮政编码 710069
经 销 新华书店	印 刷 陕西向阳印务有限公司
版 次 2006 年 7 月第 1 版	印 次 2006 年 7 月第 1 次印刷
开 本 787×1092 1/16	印 张 25
字 数 600 千字	印 数 1—5000
书 号 ISBN 7-5604-2162-8/O · 135	定 价 36.00 元

前言

陕西省教育厅高教处和陕西省独立学院协作组根据陕西省独立学院的发展需要,确定了编写第一批教材的规划,而我们在教学过程中也强烈地感到编写一本适合于独立学院使用的教材非常必要。经过招标、竞争答辩,最后确定经管类高等数学由我们承担编写。针对独立学院学生的特点,我们在总结教学实践经验的基础上,完成了本书的编写工作。本书从以下几个方面充分考虑独立学院经管类等非理工类学生的学习特点:

一、选择材料内容的原则是“以应用为目的,以必须、够用为度”和“因材施教”。

考虑到独立学院经管类专业文理科学学生兼招的实际状况及培养应用型人才的需要,在内容的选择和处理上,以应用为目的,以必须、够用为度,着力于让学生掌握数学的基本思想方法和技能,适当降低起点要求。例题适当增加,尤其注意对某些例题解题思路的分析、引导,多加以点拨。习题分 A, B, C 三部分,其中习题 A 是客观题(原则上不作为作业布置),帮助学生加深对基本概念、基本理论的理解,启发学生发现问题,提出问题,以利于进一步深入学习;习题 B 是基本计算题,题型和题目较多,让学生在分析、对比中熟练掌握;考虑到学生水平差异较大,为了使学得好的或学有余力的学生能在老师指导下进一步提高,书中采用楷体字排版的部分内容,以及习题 C 都是上课不讲,课后不布置而专门为他们配备的。考虑到各个专业需要的内容有所不同,打“*”的内容可供选讲(学)。

二、关于极限概念的处理。

极限是高等数学最基本的工具,我们认为,要教给学生数学的基本思想方法,必须介绍极限的严格定义,即“ ϵ - N ”与“ ϵ - δ ”的定义。但这是学生学习的难点,所以本书在数列的极限定义中用“ ϵ - N ”定义,而且用此定义证明了三个收敛数列的性质,目的是让学生体会如何用数学语言来精确描述“无限趋近”,又是怎样应用此定义去解决问题的,反过来加深对“ ϵ - N ”定义的理解;后面对函数的极限又简单地用“无限趋近”来定义(“ ϵ - δ ”定义用楷体字排版),然后很快进入无穷小量,以后一些需要证明的性质和定理都用无穷小量作为工具加以证明。

三、针对学生的特点,加强学习方法指导,增强学习的信心。

本书在某些章后附有阅读材料,有的材料强调了数学对经管类等非理工类专业的重要性,以期引起学生的充分重视和兴趣;有的材料结合介绍数学小史,简

要介绍了有关的数学大师的业绩、拼搏精神及顽强毅力，以鼓励和激发学生的学习热情。每章之后有本章内容提要，帮助学生总结、提高。内容的编写上，尽量通过实例引入概念，选择例题尽量贴近生活，引入模型来源于实际，并特别注意数学在经济和管理中的应用，以此来提高学生的学习兴趣和应用能力，达到知识和能力的转化。

书末配有两个附录。考虑到独立学院学生的特点，我们在附录 I 中录入了初等数学中常用的代数、几何、三角公式，在附录 II 中介绍了极坐标以及极坐标系中的几种常用曲线，以供读者在学习过程中查阅。

去掉标有“*”和部分楷体字排版的选学内容，本教材约需 144 学时，适合于 128~160 计划学时类型的院校使用。

第 1 章至第 7 章由王群智执笔，第 8 章至第 11 章由乔亚梅执笔，全书由周家良、王群智总纂定稿；于大光、张世梅也参与了部分编写工作。

在编写过程中，我们得到陕西省教育厅高教处及西安市独立学院协作组的指导与协作，得到西安交通大学城市学院的大力支持和资助，得到西安交通大学马知恩教授在教材框架、内容处理等方面的热情帮助与指点，得到西北大学出版社通力合作，在此，对他们表示衷心的感谢。

囿于编者水平，加之时间仓促，书中定有不少缺点与纰漏，恳请教师同仁及广大读者批评指正，俟再版时更臻完善。

编 者

2006-03

第1章 实数与函数

1.1 预备知识	/1
1.1.1 实数及其几何表示(1)	
1.1.2 实数的绝对值及其基本性质(1)	
1.1.3 区间与邻域(3)	
1.2 函数的概念	/4
1.2.1 常量与变量(4)	
1.2.2 函数的定义(4)	
1.2.3 确定函数的两个要素(5)	
1.2.4 函数的表示方法(6)	
1.3 函数的几何特性	/8
1.3.1 单调性(8)	
1.3.2 有界性(8)	
1.3.3 奇偶性(9)	
1.3.4 周期性(10)	
1.4 反函数	/10
1.5 复合函数	/12
1.6 初等函数	/13
1.6.1 基本初等函数(13)	
1.6.2 初等函数(15)	
1.7 几类常见的经济函数简介	/16
1.7.1 需求函数与供给函数(16)	
1.7.2 总成本函数、总收入函数和总利润函数(17)	
本章内容提要	/19
习题1	/21
课外读物 数学与经济	/25

第2章 极限与连续

2.1 数列的极限	/28
2.1.1 数列极限的定义(28)	
2.1.2 收敛数列的性质(30)	
2.2 函数的极限	/34
2.2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限(34)	
2.2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限(35)	
2.2.3 单侧极限(36)	
2.2.4 函数极限的主要性质(37)	
2.3 无穷小量与无穷大量	/38
2.3.1 无穷小量的概念与性质(38)	
2.3.2 无穷小量的比较(39)	
2.3.3 无穷大量(40)	
2.3.4 无穷小量与无穷大量的关系(40)	

2.4	极限的运算	/41
2.4.1	极限的运算法则(41)	
2.4.2	复合函数的极限(44)	
2.4.3	两个重要极限(45)	
2.5	函数的连续性	/50
2.5.1	变量的改变量(50)	
2.5.2	连续函数的概念(51)	
2.5.3	函数的间断点(53)	
2.5.4	初等函数的连续性(55)	
2.5.5	闭区间上连续函数的性质(57)	
	本章内容提要	/59
	习题2	/60
	课外读物 极限的思想及其相关重要人物	/67

第3章 导数与微分

3.1	导数概念	/69
3.1.1	引例(69)	
3.1.2	导数的定义(70)	
3.1.3	可导性与连续性的关系(73)	
3.1.4	几个基本初等函数的导数(75)	
3.2	导数的四则运算法则	/77
3.3	反函数与复合函数的导数	/80
3.3.1	反函数的导数(80)	
3.3.2	复合函数的导数(82)	
3.4	隐函数的导数 对数求导法 高阶导数	/85
3.4.1	隐函数的导数(85)	
3.4.2	对数求导法(87)	
3.4.3	高阶导数(88)	
3.5	微分	/91
3.5.1	微分的概念(91)	
3.5.2	微分的几何意义(92)	
3.5.3	微分的运算法则(93)	
3.5.4	微分在近似计算中的应用(95)	
	本章内容提要	/97
	习题3	/98
	课外读物 话说微积分	/105

第4章 中值定理与导数的应用

4.1	中值定理	/106
4.1.1	罗尔定理(106)	
4.1.2	拉格朗日中值定理(108)	
4.1.3	柯西中值定理(112)	
4.2	罗比塔法则	/113
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式(113)	
4.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(115)	
4.2.3	其他类型的未定式(116)	
4.3	函数单调性判别法	/118

4.4	函数的极值与最值	/121
4.4.1	函数的极值及其求法(121)	
4.4.2	函数的最值(124)	
4.5	曲线的凸性、拐点与渐近线	/127
4.5.1	曲线的凸性与拐点(127)	
4.5.2	曲线的渐近线(130)	
4.6	函数图形的描绘	/131
4.7	导数在经济分析中的应用	/134
4.7.1	边际与边际分析(134)	
4.7.2	弹性与弹性分析(137)	
4.7.3	经济最优化分析(140)	
	本章内容提要	/143
	习题4	/144

第5章 不定积分

5.1	不定积分的概念与性质	/151
5.1.1	原函数(151)	
5.1.2	不定积分的概念(152)	
5.1.3	不定积分的基本性质(153)	
5.1.4	基本积分公式(154)	
5.2	换元积分法	/156
5.2.1	第一类换元积分法(凑微分法)(156)	
5.2.2	第二类换元积分法(变量代换法)(160)	
5.2.3	基本积分公式的扩充(164)	
5.3	分部积分法	/165
*5.4	简单有理函数的积分	/168
5.4.1	有理函数及其简单性质(168)	
5.4.2	有理真分式的分解(168)	
5.4.3	部分分式的积分(170)	
	本章内容提要	/172
	习题5	/174
	课外读物 数e和数学大师欧拉	/178

第6章 定积分

6.1	定积分的概念	/180
6.1.1	引例(180)	
6.1.2	定积分的定义(182)	
6.1.3	定积分的几何意义(183)	
6.2	定积分的基本性质	/185
6.3	微积分基本定理	/187
6.3.1	积分上限函数及其导数(187)	
6.3.2	微积分基本定理(189)	
6.4	定积分的计算方法	/191
6.4.1	定积分的换元积分法(191)	
6.4.2	定积分的分部积分法(194)	
6.5	定积分的应用	/196

6.5.1 微元法(196)	6.5.2 平面图形的面积(197)	6.5.3 立体的体积(201)	6.5.4 定积分在经济方面的应用举例(204)
6.6 反常积分初步	/206		
6.6.1 无穷限积分(206)	6.6.2 无界函数的积分(207)		
*6.6.3 Γ 函数(209)			
本章内容提要	/210		
习题 6	/211		
课外读物 牛顿的伟大成就与数学	/217		

第 7 章 无穷级数

7.1 常数项级数的概念与性质	/219		
7.1.1 常数项级数的概念(219)	7.1.2 收敛级数的基本性质(222)		
7.2 正项级数及其审敛法	/225		
7.2.1 正项级数(225)	7.2.2 正项级数的审敛法(226)		
7.3 任意项级数的审敛法	/231		
7.3.1 交错级数及其审敛法(231)	7.3.2 绝对收敛与条件收敛(233)		
7.4 幂级数	/235		
7.4.1 函数项级数的概念(235)	7.4.2 幂级数及其收敛域(236)		
7.4.3 幂级数的性质(239)			
7.5 函数的幂级数展开	/241		
7.5.1 泰勒公式(241)	7.5.2 泰勒级数(244)	7.5.3 某些初等函数的幂级数展开(244)	
本章内容提要	/248		
习题 7	/249		

第 8 章 多元函数的微分法及其应用

8.1 空间解析几何简介	/255		
8.1.1 空间直角坐标系(255)	8.1.2 空间任意两点的距离(256)		
8.1.3 曲面与方程(257)			
8.2 多元函数的基本概念	/262		
8.2.1 点集与区域(262)	8.2.2 多元函数的定义(263)		
8.2.3 二元函数的极限(265)	8.2.4 多元函数的连续(266)		
8.3 偏导数与全微分	/267		
8.3.1 偏导数(267)	8.3.2 高阶偏导数(271)	8.3.3 全微分(273)	
8.4 多元复合函数及隐函数的微分法	/277		
8.4.1 多元复合函数的微分法(277)	8.4.2 隐函数的微分法(281)		

8.5	多元函数微分法在经济上的应用	/283
8.6	多元函数的极值及其求法	/284
8.6.1	多元函数的极值(284)	
8.6.2	多元函数的最值(286)	
8.6.3	条件极值(288)	
	本章内容提要	/290
	习题 8	/292
第 9 章 重积分		
9.1	二重积分的概念与性质	/298
9.1.1	二重积分的概念(298)	
9.1.2	二重积分的基本性质(300)	
9.2	二重积分的计算	/301
9.2.1	直角坐标系下二重积分的计算(301)	
9.2.2	极坐标系下二重积分的计算(308)	
*9.2.3	无界区域上的反常二重积分简介(312)	
9.3	二重积分的应用	/314
9.3.1	二重积分在几何上的应用(314)	
*9.3.2	二重积分在物理上的应用(315)	
*9.4	三重积分简介	/316
	本章内容提要	/319
	习题 9	/319
第 10 章 微分方程		
10.1	微分方程的基本概念	/324
10.2	一阶微分方程	/327
10.2.1	可分离变量的微分方程(327)	
10.2.2	齐次方程(328)	
10.2.3	一阶线性微分方程(330)	
*10.3	几种可降阶的高阶微分方程	/333
10.3.1	$y''=f(x,y')$ 型的微分方程(333)	
10.3.2	$y''=f(y,y')$ 型的微分方程(334)	
10.3.3	$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(335)	
10.4	二阶常系数线性微分方程	/335
10.4.1	二阶常系数线性齐次方程(335)	
10.4.2	二阶常系数线性非齐次方程(339)	
	本章内容提要	/343
	习题 10	/344
第 11 章 差分方程初步		
11.1	差分及差分方程的基本概念	/348

11.1.1	差分的概念和性质(348)	11.1.2	差分方程的基本概念(350)
11.2	一阶常系数线性差分方程	/351	
11.2.1	一阶常系数线性齐次差分方程(351)	11.2.2	一阶常系数线性非齐次差分方程(352)
11.3	二阶常系数线性差分方程	/355	
11.3.1	二阶常系数线性齐次方程(356)	11.3.2	二阶常系数线性非齐次方程(358)
本章内容提要			
/361			
习题 11			
/361			
附录 I 初等数学中的常用公式			
/364			
附录 II 极坐标及几种常见曲线			
/368			
参考答案			
/371			

第1章 实数与函数

中学时学习的数学是初等数学. 初等数学的研究对象主要是常量, 而高等数学则以变量为其主要研究对象. 反映各变量之间相互依赖关系的函数是高等数学最重要的基本概念之一. 高等数学中对函数的研究主要是在实数范围内进行的. 本章在学习与实数有关的基本知识的基础上, 进一步介绍函数的概念、性质、初等函数和常见的经济函数.

1.1 预备知识

1.1.1 实数及其几何表示

人类最早知道的数是正整数: 1, 2, 3, \dots . 全体正整数通常用 \mathbf{N} 表示. 由于做加法逆运算的需要, 人们又增添了零和负整数, 从而将正整数扩充为一般整数. 通常用 \mathbf{Z} 表示全体整数. 乘法的逆运算又导致了分数的产生, 而分数又称为有理数. 通常用 \mathbf{Q} 表示全体有理数. 也就是说, 任何有理数都可以写成 $\frac{p}{q}$ 的形式(其中 $p, q \in \mathbf{Z}$, 且 $q \neq 0$).

公元前 500 年, 古希腊人发现等腰直角三角形的腰与斜边没有公度^①, 从而证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 这样, 人类首次知道了无理数的存在, 后来人们又发现了更多的无理数, 如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, \dots , 以及 π 与 e 等. 我们知道, 有理数又可以表示成有限小数或无限循环小数. 因此, 可以认为无理数是无限不循环小数.

有理数与无理数统称为实数, 通常用 \mathbf{R} 表示全体实数.

笛卡尔^②引入了坐标的概念, 把实数集合与一条直线上的点集合建立了一一对应的关系. 正像中学所学过的, 我们把规定了原点、方向和单位长度的直线称为数轴. 引入数轴概念以后, 数轴上的任何点都可以看作一个实数; 反之, 实数也可以看作数轴上的一个点. 所以, 我们常常把实数集合 \mathbf{R} 与数轴等同, 把实数与数轴上的点等同, 并把实数 a 称为点 a .

数轴上表示有理数的点称为有理点, 表示无理数的点称为无理点. 有理点具有稠密性, 即数轴上任意两个有理点之间一定存在无穷多个有理点; 同样, 无理点也具有稠密性.

1.1.2 实数的绝对值及其基本性质

定义 1.1 设 x 为一实数, 则 x 的绝对值定义为

^①古希腊有个毕达哥拉斯学派, 他们认为任意两条直线段都有公度, 亦即对于任意给定的长度分别为 a 与 b 的线段, 总存在一条长度为 d 的线段, 使得 $a=md$, $b=nd$, 其中 m, n 均为正整数.

^②笛卡尔 (Descartes, 1596-1650), 法国数学家.

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

x 的绝对值 $|x|$ 在数轴上表示点 x 与原点 O 的距离, 若 y 为任意实数, 则点 y 与点 x 间的距离可用数 $y-x$ 或 $x-y$ 的绝对值来表示

$$|y-x| = |x-y| = \begin{cases} x-y & y < x \\ y-x & y \geq x \end{cases}$$

绝对值有以下基本性质:

设 x, y 为任意实数, 实数 $a > 0$, 则

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| = \sqrt{x^2}$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. $|x| \leq a$ 的充分必要条件是 $-a \leq x \leq a$
6. $|x| \geq a$ 的充分必要条件是 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$
7. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
9. $|xy| = |x| \cdot |y|$
10. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

这里仅证性质 7 和 8, 其余性质可由定义 1.1 很容易证得, 把它们留给读者作为练习.

证 (性质 7) 在此仅就 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 来证明. 由性质 4 有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

两式对应项相加, 可得

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

再由性质 5 即得

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

证 (性质 8) 由性质 7, 有

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

因此

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

将上式中 x 与 y 的位置互换可得

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

即

$$|x| - |y| \geq -|x-y|$$

从而可得

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

即

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

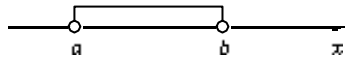
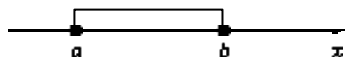
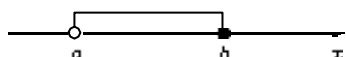
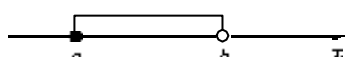
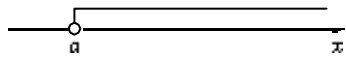
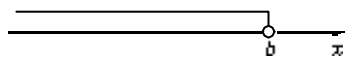
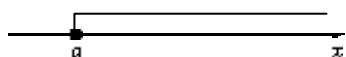
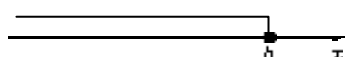
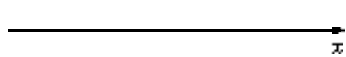
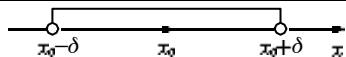
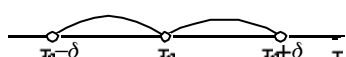
1.1.3 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 根据变量 x 取值范围的不同, 表 1.1 给出了各种区间的名称、符号、意义及区间在数轴上的几何表示.

表 1.1 中, 实数 a 与 b 分别叫做区间的左端点和右端点, 右端点与左端点的差 $b - a$ 叫做区间的长度; 长度有限的区间叫做有限区间, 长度无限的区间叫做无限区间; 数轴上的实点记号 “•” 表示该区间包含端点, 空点记号 “○” 表示该区间不包含端点.

今后当讨论的问题与是否包含区间端点无关, 或与区间是否有限无关时, 通常以 “区间 (a, b) ”, 或用一字母, 如 “区间 I ” 来表示各种区间, 而并不一定仅指开区间.

表 1.1

	名称	符号	意义	几何表示
有限区间	开区间	(a, b)	$a < x < b$	
	闭区间	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
	半开区间	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
	半开区间	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
无限区间	开区间	$(a, +\infty)$	$a < x < +\infty$	
	开区间	$(-\infty, b)$	$-\infty < x < b$	
	半开区间	$[a, +\infty)$	$a \leq x < +\infty$	
	半开区间	$(-\infty, b]$	$-\infty < x \leq b$	
	开区间	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	
邻域	x_0 的 δ 邻域	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$	$ x - x_0 < \delta$	
	去心邻域	$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$	$0 < x - x_0 < \delta$	

以后我们还会经常遇到一种以某点为中心的特殊的开区间, 称为点的邻域. 确切地说, 设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 则称满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

其中 x_0 称为该邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

由不等式 $|x - x_0| < \delta$ 易知, 邻域 $U(x_0, \delta)$ 是以 x_0 为中心, 以 2δ 为长度的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

有时还会遇到把中心 x_0 去掉的邻域, 这种邻域叫做去心邻域. 确切地说, 设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 则称满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的去心的 δ 邻域, 记作

$\dot{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

易知 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 写成区间形式为

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

例如点 2 的 0.01 邻域就是满足不等式 $|x - 2| < 0.01$ 的实数 x 的全体, 即 $1.99 < x < 2.01$, 亦即开区间 $(1.99, 2.01)$, 它表示点 2 的邻近不超过 ± 0.01 的范围, 而点 -2 的去心的 0.01 邻域则指满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的全体, 亦即开区间 $(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

值得一提的是, 邻域的半径虽然没有规定其大小, 但它一般总是取很小的正数, 如果无需指明邻域的大小, 则用 $U(x_0)$ 与 $\dot{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的邻域与去心邻域.

1.2 函数的概念

1.2.1 常量与变量

人们在观察自然现象和社会现象的过程中, 经常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中保持不变, 只取某个固定的数值, 这种量叫做常量; 还有一种量在过程中不断变化, 可以取不同的数值, 这种量叫做变量. 比如商店在一天的营业活动中, 各种商品的价格一般为常量, 而销售量、营业额和商品库存量等均为变量.

一个量是常量还是变量, 要辩证地看, 要具体问题具体分析. 例如, 由于气温的变化会引起机器上的轴热胀冷缩. 当气温变化引起轴的变化不大时, 如果在一般机器(比如自行车)上, 通常把轴长看作常量; 如果在精密仪器上, 尽管轴长变化不大, 但也会影响机器的精度, 这时就应该把轴长看作变量. 再如重力加速度 g , 在地球的纬度变化不大时可看作常量, 在纬度变化较大时则应看作变量.

通常用字母 a, b, c, \dots 表示常量, 用字母 x, y, z, \dots 表示变量.

如果将变量看作是可以在一非空数集中任意取值的量, 则常量可看作是在单元素集合中取值的变量. 从这个意义上讲, 常量可以看作变量的特例.

1.2.2 函数的定义

在研究同一事物或现象的过程中, 涉及的变量往往不止一个, 这几个变量并不是孤立地变化, 而是彼此联系并遵循着一定的变化规律. 这种变量之间的相互依赖关系就是数学上要讨论的函数关系.

例 1 圆的面积 S 与半径 R 有着确定的依赖关系: $S = \pi R^2$, 即对于 $(0, \infty)$ 内任意一个确定的值 R (即半径), 按照把半径平方再乘以 π 的运算方法, 便确定了相应的圆的面积 S .

例 2 某化肥厂生产某种化肥 1000t, 每吨售价 800 元/t. 如果一次销售量不超过 700t, 则按此价格出售; 如果销售量超过 700t, 则对超出部分打 9 折出售. 此时销售总收入 y (元)

与销售量 $x(t)$ 之间的关系可表示为

$$y = \begin{cases} 800x & 0 < x \leq 700 \\ 800 \times 700 + 800 \times 0.9 \times (x - 700) & 700 < x \leq 1000 \end{cases}$$

当 x 在 $(0, 1000]$ 内任意取定一个数值时, 由此关系式便可确定出 y 的相应的值.

例 3 设表 1.2 提供了某公司产品 1996 ~ 2005 各年度的产量资料.

表 1.2

单位: t

年份 T	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
产量 Q	500	650	900	1075	1420	1745	3430	4235	5800	9265

则对 1996 ~ 2005 年期间任一年份 T , 按照表 1.2 都能确定当年产量 Q 的值.

从上面的例子中可以看出, 尽管各例中所涉及问题的背景不同, 反映变量之间相互联系的表达式不同, 但它们却有着相同的本质, 即在某个变化过程中的两个变量是相互联系的, 其中一个变量的变化将会引起另一个变量的变化. 变量之间的这种相互依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 1.2 设有变量 x 与 y . D 是一个给定的实数集合. 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 (或对应规则) f , 总有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量, 实数集 D 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 $D(f)$ 的各个数值时, 对应的函数值的全体组成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域, 记作 $R(f)$, 即

$$R(f) = \{y | y = f(x), x \in D(f)\}$$

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则. 对应法则也可改用其他字母表示, 如 g, h, φ, F 等, 那么函数也就可相应地记作 $g(x), h(x), \varphi(x), F(x)$ 等. 但要强调的是, 同一问题中的同一函数不能用不同的字母表示其对应法则, 比如在同一问题中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示的一定是两个不同的函数.

有时为简化符号, 也将函数关系记作 $y = y(x)$, 此时等式左边的 y 表示因变量, 右边的 y 表示对应法则.

1.2.3 确定函数的两个要素

由定义 1.2 可知, 函数 $y = f(x)$ 是由定义域与对应法则所确定的. 定义域与对应法则完全相同的函数, 本质上是同一函数, 至于同一函数中自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的, 所以定义域与对应法则是确定函数的两个要素.

例 4 判定下列各组函数是否相同.

(1) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

(2) $f(x) = x + 2$ 与 $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = x(\sin^2x + \cos^2x)$

解 (1) 由于 $g(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应关系不同, 所以, 这两个函数不相同.

(2) 由于 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $D(g) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, 两个函数的定义域不相同, 所以, 这两个函数不相同.

(3) 由于 $\sin^2x + \cos^2x = 1$, 这两个函数的定义域与对应法则都相同, 所以是同一函数.

定义域既然是自变量允许取值的范围, 那么当所讨论的问题具有某种实际意义时, 就要根据实际问题来确定定义域. 例如, 例 1 的定义域为 $0 < R < +\infty$, 例 3 中年份 T 只能取 1996 ~ 2005 中的正整数.

对于那些不代表任何实际意义, 仅由解析表达式表示的函数, 其定义域应指使该解析表达式有意义的自变量的取值范围, 这种定义域也称为函数的自然定义域. 求这种自然定义域时, 必须掌握一些常用的函数表达式有意义的条件. 例如, 负数不能开偶次方根; 分式的分母不能为零; 对数的真数必须为正数; 反正(余)弦函数符号下的式子的绝对值不能大于 1; 等等.

例 5 求函数 $f(x) = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须使

$$\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 1+x > 0 \\ 1+x \neq 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x \geq -2 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

由此可得函数的定义域为 $D(f) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

例 6 求函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须使

$$\begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x > 3 \text{ 或 } x < -2 \\ -3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

综上所述可得函数的定义域为 $D(f) = [-3, -2) \cup (3, 4]$ (图 1-1).



图 1-1

1.2.4 函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种, 即图示法、表格法和公式法.

图示法是用坐标平面上的曲线表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数的方法. 例如, 通过自动测温记录仪画出一昼夜的温度变化曲线, 它表示了气温 T 与时间 t 的函数关系. 这条曲线也称为函数 $T=f(t)$ 的图形(图 1-2). 这种表示法的最大特点是明显、直观、便于分析.

表格法是用一系列自变量的值与对应的函数值列成表格表示函数的方法. 例如, 例 3 表

示函数的方法就是表格法，数学工具书中的对数表、三角函数表等也都是用表格法表示函数。用这种方法表示函数，优点是方便、省时，而且可以表示那些难以知道表达式的函数；缺点是往往因为表格所列数据不全，不便于进行理论研究。

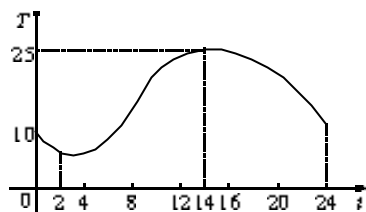


图 1-2

公式法是用数学公式的形式表示函数与自变量关系

的方法。例如，例 1 和例 2 就是用公式法表示的函数。这种表示方法清晰、准确，便于进行理论分析，是最常用的函数表示方法。

在此必须指出的是，在用公式法表示函数时，有时会遇到一个函数在其定义域的不同范围内要用不同的解析式来表示的情形（如例 2）。这种在函数定义域内用多个解析表达式表示的函数称为分段函数。

对分段函数，应注意以下问题：

(1) 绝对不能因为分段函数在不同的区间段内由不同的表达式表示，而误认为是几个函数。不论一个分段函数的表达式有几个，它总归是一个函数。

(2) 在求分段函数的函数值时，要注意自变量所在的区间，自变量在哪个区间取值，就要用该区间所对应的表达式来计算其函数值。

(3) 分段函数的定义域是函数各分段区间的并集。

例 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \\ x^2 - 1 & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$

(1) 在 $x=1$ 处函数是否有定义？为什么？

(2) 求 $f(x)$ 的定义域，并找出其分段点。

(3) 求 $f(-2)$ 、 $f(0)$ 、 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 。

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图形。

解 (1) 由于 $x=1$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处没有定义。

(2) 由于分段函数的定义域是各分段区间的并集，故函数 $f(x)$ 的定义域为

$$D(f) = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$$

分段点为 $x=-1$ 与 $x=1$ 。

(3) 由于 $x=-2$ 在区间 $[-2, -1)$ 上，所以函数值应由表达式 $f(x) = x^2 - 1$ 确定，因此

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$$

由于 $x=0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内，所以函数值由 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 确定，因此

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

由于 $x = \frac{3}{2}$ 在区间 $(1, 2]$ 内，所以函数值由 $f(x) = x^2 - 1$ 确定，因此

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

(4) 函数的图形如图 1-3 所示。

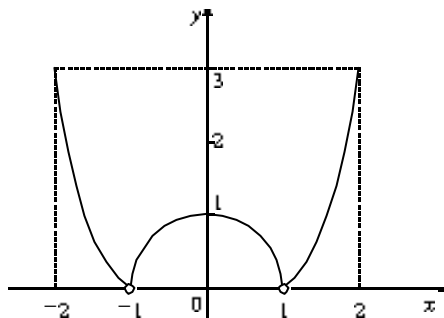


图 1-3