21 世纪高等学校本科数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

(经 管 类)

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（经管类）／石辅天，杨中兵，肖筱南主编. — 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
（21世纪高等学校本科数学规划教材）

ISBN 7-81102-286-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①石…②杨…③肖…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第096669号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：14
字　　数：368千字
出版时间：2006年8月第1版
印刷时间：2006年8月第1次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：章　丽
责任出版：秦　力

定　　价：23.00元

《高等数学（经管类）》编写人员

主　　　　编：石辅天　杨中兵　肖筱南

副　主　编：徐志敏　何江华　王天宝　黄　坚

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

艾艺红　伊斯拉木江　项立群

姜德民　费罗曼　　崔凤蒲

前　　言

进入21世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步．目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，我们已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这本适合于经管类本科生各专业使用的高等数学教材．

本书依据教育部制订的“高等数学课程教学基本要求”（文中简称“基本要求”）编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了高等数学课程教学时数减少的趋势．本书具有以下特色：

第一，突出高等数学的基本思想和基本方法．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握高等数学的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的本质和高等数学的价值．

第二，加强基本能力培养．本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

第三，贴近实际应用．本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出．例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学知识解决实际问题的能力．

第四，考虑到部分学生“考研”需求和其他需要，本书适当地编写了一些不被“基本要求”包含的内容，供选学之用，文中以星号“*”记之．

本书内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程．各节后均配有习题，各章后面配有总习题，书后附有全部习题的参考答案．

本书是多所院校合作的结晶，参加编写的院校有（以校名首字笔画为序）：大连交通大学信息工程学院、天津商学院宝德学院、天津师范大学津沽学院、东北大学、江西师范大学科学技术学院、安徽工程科技学院、南昌大学共青学院、重庆工商大学派斯学院、桂林电子科技大学信息科技学院、莱阳农学院、朝阳师范高等专科学校、新疆农业大学科学技术学院、厦门大学嘉庚学院．

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者不吝赐教．

作　者

2006年2月

目　　录

第一章　函数的极限与连续

初等数学研究的对象是常量，而高等数学研究的对象是变量．变量之间的依赖关系称为函数．极限方法是研究变量的一种基本方法．本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本内容．

第一节　函数与极坐标

一、区间和邻域

设实数 a 和 b，且 $a<b$，则数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记为 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\};$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记为 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地，称

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$$

与

$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

为半开半闭区间．

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$．从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段．此外，还有所谓的无限区间．引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大），例如

$$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}.$$

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无穷区间．

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

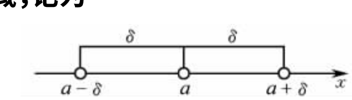

图 1-1

称为点 a 的去心 δ 邻域，见图 1-1，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函　数

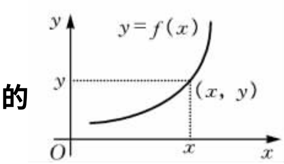

图 1-2

定义　设 D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，对每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应关系 f 为定义在D 上的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f. 集合 $R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域. R_f 也记成 $f(D)$.

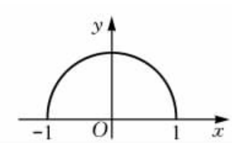

图 1-3

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 的图像，见图 1-2.

下面举几个函数的例子.

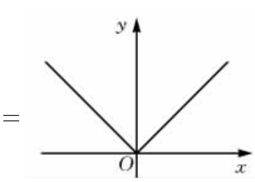

图 1-4

例 1　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域、值域，并画出其图像.

解　定义域为 $1-x^2\geqslant 0$，即 $D=[-1,1]$；值域 $R_f=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 图像为半圆，见图 1-3.

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图像见图 1-4.

例 3　符号函数

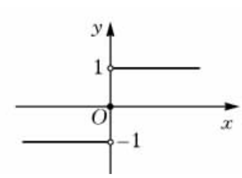

图 1-5

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的图像见图 1-5.

例 4　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数，图像见图 1-6. 如 $[1.25]=1$，$[-3.5]=-4$，$[-1]=-1$.

由例 2 到例 4 可以看到，有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应关系用几个不同式子表示的函数，称为分段函数.

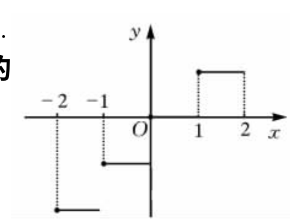

图 1-6

三、初等函数

1. 基本初等函数

初等数学对下面六类函数的定义域、值域及函数的性态进行了讨论：

常数函数　$y=C$ (C 为常数)；

幂函数　$y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbf{R})$；

指数函数　$y=a^x$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$；

对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0$，且 $a\neq 1)$；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这六类函数统称为基本初等函数.

2．反函数

在函数的定义中，如果 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射，则它的逆映射 f^{-1} 称为函数 f 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$．显然，f^{-1} 的定义域为 R_f，值域为 D.

例如，函数 $y=x^3$，$x\in\mathbf{R}$ 是一一映射，所以它的反函数存在，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$．习惯上写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

一般地，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$．把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 是对称的，见图 1-7.

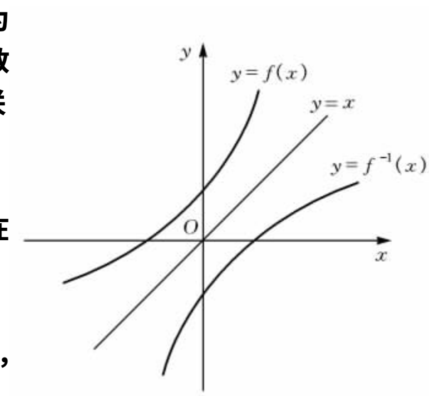

图 1-7

3．复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)),\ x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 能构成复合函数的条件是：函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域内，即 $g(D)\subset D_f$．否则，不能构成复合函数．多个函数能够构成复合函数的过程叫函数的复合运算.

例 5　函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 可以看成由函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 和 $u=g(x)=x^2-1$ 复合而成的函数．$y=f(u)$ 的定义域 $U_0=\{u\,|\,|u|\leqslant 1\}$，$u=g(x)$ 的定义域 $D=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$，复合函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 的定义域为 $\{x\,|\,-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

4．四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别为 D_1，D_2，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\varnothing$（$\varnothing$ 是空集），在 D 上，通过加、减、乘、除四则运算可定义新的函数

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

5．初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的可用一个式子表示的函数称为初等函数．例如

$$y=ax^2+bx+c,\ y=\sin\frac{1}{x},\ y=\mathrm{e}^{-x^2}$$

等都是初等函数.

四、函数的性质

1．有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在数 M_1，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界，M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界. 如果存在数 M_2，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界，M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界. 如果存在数 M，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；$y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界，如定义域取有限区间，则它也是有界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于 D 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的 如果恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调减少的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、极坐标

在平面上由一定点和一条定轴所组成的坐标系称为极坐标系，其中定点称为极点，定轴称为极轴. 见图 1-8. 坐标系中的点 P 用有序数 (r,θ) 表示. 其中 r 表示点 P 到极点 O 的距离，θ 表示射线 OP 与极轴正向的夹角. 这里 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

若取极点作为原点，极轴作为 x 轴建立直角坐标系，可以得到极坐标与直角坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \tag{1}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2}，\theta=\arctan\frac{y}{x}. \tag{2}$$

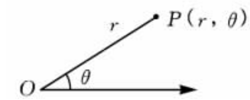

图 1-8

建立 r 与 θ 关系的等式称为极坐标方程，如

$$r=1$$

表示圆心在极点，半径为 1 的圆.

利用式(1)，式(2)可以把直角坐标方程和极坐标方程进行互化.

例 6　将极坐标方程

$$r=2\cos\theta$$

化为直角坐标方程，并说明它表示什么曲线.

解　方程两边同乘以 r 得

$$r^2=2r\cos\theta.$$

由式(1)有

$$x^2+y^2=2x，$$

即

$$(x-1)^2+y^2=1，$$

它表示圆心为(1，0)，半径为 1 的圆.

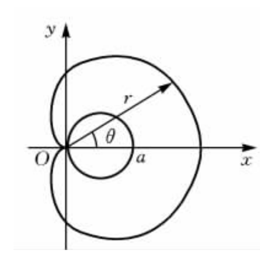

图 1-9

下面给出几个特殊曲线的极坐标方程.

(1) 心形线(外摆线的一种，见图 1-9)的极坐标方程为

$$r=a(1+\cos\theta)，$$

化为直角坐标方程为

$$x^2+y^2-ax=a\sqrt{x^2+y^2}.$$

(2) 双纽线(见图 1-10)的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos2\theta，$$

化为直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

(3) 阿基米得螺线(见图 1-11)的极坐标方程为

$$r=a\theta.$$

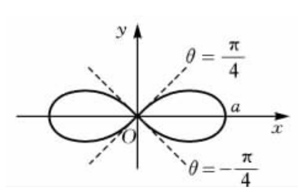

图 1-10

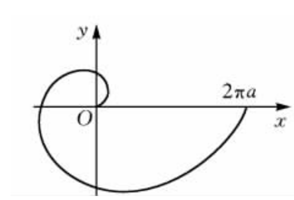

图 1-11

习题 1-1

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\dfrac{-5}{x^2+4}$；(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(5) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；(6) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

2．设

$$f(x)=\frac{x}{1-x},$$

求 $f(f(x))$ 和 $f(f(x))$.

3．将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，并做出函数的图形.

4．求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$.

5．判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$；(2) $y=x^2(1-x^2)$.

6．在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定此函数的定义域.

7．某化肥厂生产某产品 1 000t，每吨定价为 130 元，销售量在 700t 以内时，按原价出售；超过 700t 时，超过的部分打 9 折出售. 试将销售总收入与总销售量的函数关系用数学表达式表示.

8．把

$$r=\frac{3}{1-2\cos\theta}$$

化为直角坐标方程.

9．求过点 $\left(3,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 且垂直于极轴的直线的极坐标方程.

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

数列极限的概念是从求某些实际问题的精确值而产生的. 早在公元 3 世纪，我国数学家刘徽就利用圆的内接正多边形的面积推算出圆的面积.

设有半径为 R 的圆，作它的内接正六边形，面积记为 S_1，再作内接正十二边形，其面积记为 S_2，再作内接正二十四边形，其面积记为 S_3，……，作内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形，其面积记为 S_n，……这样，就得到一系列内接正多边形的面积：

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots.$$

当 n 无限增大时，正多边形的面积无限接近于圆的面积. 这个圆的面积值就是数列 S_1，S_2，…，S_n，… 当 $n\to\infty$ 时的极限.

对于数列的概念，在初等数学中都进行了介绍，现在所讨论的是无穷数列（以后简称数列）. 如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}^+$，对应着一个确定的实数 x_n，把这些实数排列起来，

得到

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots,$$

称其为数列，记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为通项．例如

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, \cdots.$$

现在要讨论的是：当 n 无限增大时，对应的 x_n 是否能无限接近于某个确定的数值．如果能的话，这个确定的值是多少．

对于数列 $\{x_n\}$，如果从某一位置开始，x_n 与某一常数 a 越来越接近，而两个数的接近程度可以用这两个数之差的绝对值来表示，即当 x_n 无限接近 a 时，$|x_n-a|$ 无限的小，要多小就有多小．例如，对于数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，因为

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1},$$

随着 n 无限增大，$\frac{1}{n+1}$ 可以小于任意给定的一个正数．如给定正数 $\frac{1}{100}$，则只要 $n>99$，即从第 100 项起，都有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \frac{1}{100}.$$

所以，可以猜想 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的极限为 1．

定义　设 $\{x_n\}$ 是一给定数列，a 是一个常数，如果对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

恒成立，那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的．

收敛数列的几何意义：将常数 a 及数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 在数轴上表示出来，再在数轴上取以 a 为中心，ε 为半径的一个开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，见图 1-12．当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（至多只有 N 个）在这个区间之外．由于 ε 的任意性，区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 的长度 2ε 可以任意小．但无论长度多么小，一定会从某一项开始，数列 x_n 都落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内．

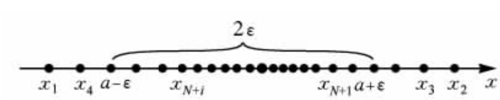

图 1-12

为了书写方便，数学上常用“$\forall$”表示“任意给定的”，用“$\exists$”表示“存在”，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立．

例 1　证明数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限为 1.

证

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}.$$

对$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-1|<\varepsilon$，只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

故

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

在利用定义证明极限存在时，重要的是，对$\forall\varepsilon$，只要存在一个正整数N就可以了，并不一定去求最小的N. 如例 1 中取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，结论仍然成立.

例 2　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+9}=0$.

证

$$\left|\frac{n}{2n^2+9}-0\right|=\frac{n}{2n^2+9}<\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}.$$

对$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{n}{2n^2+9}-0\right|<\varepsilon$，只要

$$\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

故

$$n>\frac{1}{2\varepsilon}.$$

取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{n}{2n^2+9}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+9}=0.$$

例 3　设$|q|<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证

$$|q^n-0|=|q|^n.$$

对$\forall\varepsilon>0$，要使$|q^n-0|<\varepsilon$，只要