高等数学教程

（下册）

上海大学理学院数学系　编

上海大学出版社

内 容 提 要

本书是按照全国高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写而成的，分上、中、下三册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分. 中册的内容为定积分、定积分的应用、级数、微分方程. 下册的内容为空间解析几何与向量代数、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分.

本册力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用，并根据学生学习的需求，在书中每节安排了习题(A)、(B)，在每章安排了总复习题，以供学生系统地练习与复习. 本册逻辑推理严谨清晰，叙述通顺浅显，例题典型面广，适合学生自学，可供综合性大学、高等师范院校的非数学理工类及管理类的本科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程. 下册 / 上海大学理学院数学系编. 上海：上海大学出版社，2006.2
ISBN 7-81058-951-2

Ⅰ. 高... Ⅱ. 上... Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 015775 号

责任编辑 王悦生
封面设计 孙 敏

高等数学教程(下册)
上海大学理学院数学系 编
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)
(http://www.shangdapress.com 发行热线 021-66135110)
出版人：姚铁军
*
上海市印刷七厂印刷 各地新华书店经销
开本 890×1240 1/32 印张 10.75 字数 302,000
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
印数：0 001—5 100 册
ISBN 7-81058-951-2/O·035
定价：21.00 元

序　言

微积分是人类最伟大的创造发明之一. 在微积分诞生的三百多年间,它已为阐述和解决现实世界中所提出的各种问题提供了强有力的工具. 微积分作为“高等数学”课程的核心内容,也已成为人才培养必须掌握的重要内容.

上海大学是一所全面实行短学期制、学分制和选课制的高等学校,“我们希望学生来到学校是为掌握一种正确的学习方法、工作方法和思想方法,也就是辩证唯物主义的方法. 所学课程也好,专业也好,仅仅是一种载体,通过这个载体使大家掌握这种方法.”因此,结合学校的办学理念、体制和机制,编写出一本既反映学习内容和思想方法,同时又能满足学校人才培养目标的教材,是我校培养高素质人才战略的重要组成部分.

“高等数学”是上海大学理工类和管理类大学生的必修课程,微积分中的“以直代曲、先分后合”的这种综合分析方法的辩证思想,其作为一种科学研究方法正逐渐成为各专业大学生必须掌握的一种思想方法,因此“高等数学”也逐步成为其他专业学生的必修或选修课程,它已在我校人才培养中占据极其重要的地位.

教育的目的是培养人,教学应以学生为中心,因此在教学过程中仅仅是教师的讲解是不够的. 一个好的教学过程应该是教师和学生共同构建的互动的整体,充分发挥教师在教学中的核心指导作用,教学为学生着想,学生在学习中能够不断地有所反应和互动,这样的教学才会富有成效. 本教材即在以上这些方面作了一些有益的尝试和实践.

上海大学理学院数学系拥有一批长期活跃在教学与科研第一线的教师,他们结合我校教育教学改革的特点,在教学过程进行了许多探索和实践,今天编写完成的《高等数学教程》一书,就是他们长期坚持将教

学和科研相结合的结晶. 本教材结合微积分的思想,并试图把数学建模的思想和方法有机地融入到《高等数学教程》的课程教学之中,这是对大学“高等数学”教学改革的初步尝试. 它也许能使学生通过对《高等数学教程》的学习,逐步掌握起一种用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力,更能使学生在学习“高等数学”的过程中提高学习兴趣和学习主动性,同时能起到提高学生的自学能力的作用.

在本教材出版之际,我借此机会衷心感谢我校理学院数学系广大教师所发挥的聪明才智和爱岗敬业的精神,为基础理论课程的教学工作所做出的探索和创新. 同时也希望使用本教材的广大老师们对教材中存在的不足提出批评和意见,为进一步提高“高等数学”的教学质量,为培养高素质人才做出贡献.

上海大学副校长叶志明

2005 年 7 月 19 日于上海大学新校区

前　言

本书是为综合性大学、高等师范院校的非数学理工类、管理类本科学生编写的高等数学教程，是上海大学组建十多年以来，为满足广大学生后续学习要求，经过多年的教学实践而编写完成的公共基础课教材.

20 世纪后半叶，信息技术获得了超乎想像的发展，数学的应用空前地向一切领域渗透，数学教学的需求也随之不断地扩大. 如何以学生为中心，满足他们后继课程的需要，编写出一本与时俱进的教材是我们努力追求的目标.

本书力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用. 此外根据学生不同的需求，精心设计了课后习题(A)、(B)和总复习题. 习题(A)是为本课程所有学生准备的必须进行且必须掌握的训练内容，习题(B)是为继续深造的学生准备的训练内容.

本书根据上海大学实行短学期制(一学年三个教学学期、一个实践学期)的特点而编写，分上、中、下三册. 上册主编唐一鸣，中册主编俞国胜，下册主编屠立煌. 全书由邬冬华统稿.

本书的第一、第二、第三章由唐一鸣执笔完成；第四、第五章由应立毅、唐一鸣执笔完成；第六章由应立毅、屠立煌执笔完成；第七章由吴寿柏、屠立煌执笔完成；第八、第九章由俞国胜执笔完成；第十章由姜勤执笔完成；第十一、十二章由任亚娣执笔完成. 书中的数学建模的内容由邬冬华、屠立煌编写。研究生范莉霞、庞莉莉、严侃等同学帮助打印了本书中、下册的大部分内容。各节习题由吴东红、任亚娣、姜勤、应立毅编写完成. 潘宝珍、刘彬清、岳洪、郭伟娟、耿辉、沈裕华、金石明、吴牧、何龙敏等和编写本书的作者一起参加了为编写本教程举行的多次教研活动，他们献计献策，为本书的出版做出了重要贡献.

在本书出版过程中，得到了上海大学校领导和教务处领导的大力支持；同时也得到了理学院和数学系领导的鼓励和支持；上海大学出版社王悦生编辑为本书出版做了诸多卓有成效的工作，在此一并表示深深的谢意.

编写一本适合时代需求的高质量的高等数学教程实非易事，我们虽然做了一些探索，但限于作者水平，不妥和谬误之处在所难免，希望各位专家和广大师生不吝指正.

编　者

于 2005 年盛夏

符 号 说 明

符号	表示的意义
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A\Rightarrow B$	由 A 得到 B
$f: A\rightarrow B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x\in A$	x 是集合 A 的元素
$A\subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$C=A\cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C=A\cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x\in A\cup B$	$x\in A$ 或 $x\in B$
$x\in A\cap B$	$x\in A$ 且 $x\in B$
$C=A\setminus B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x\in A\setminus B$	$x\in A$ 但 $x\notin B$（x 不属于 B）
$f\in C[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上连续的函数类
$f\in C^1[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上具有一阶连续导数的函数类
$f\in R[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上黎曼可积的函数类

目　　录

第九章　向量代数与空间解析几何

近代数学本质上可以说是变量数学. 文艺复兴以来资本主义生产力的加速发展,对科学技术提出了全新的要求: 机械的普遍使用促进了对机械运动的研究;世界贸易的高速增长促使航海事业的迅速发展,而测定船舶位置问题需要精确地研究天体运行的规律;武器的改进激发了对弹道问题的探讨的热情,芸芸众众到了 16 世纪,对运动与变化的研究已变成为自然科学的中心问题. 这就迫切地需要一种新的数学工具,从而导致了变量数学亦即近代数学的诞生.

变量数学的第一个里程碑是解析几何的发明. 解析几何的基本思想是在平面上引进所谓"坐标"的概念,并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对(x, y)之间建立一一对应的关系. 每一对实数(x, y)都对应于平面上的一个点;反之,每一个点都对应于它的坐标(x, y). 以这种方式可以将一个代数方程 $f(x, y)=0$ 与平面上一条曲线对应起来,于是几何问题便可归结为代数问题,并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果.

借助坐标来确定点的位置的思想在古代已出现过,古希腊的阿波罗尼奥斯关于圆锥曲线性质的推导,阿拉伯人通过圆锥曲线交点求解三次方程的研究,都蕴涵着这种思想. 解析几何最重要的先驱是法国数学家奥雷斯姆,他在《论形态幅度》这部著作中提出了形态幅度原理(或称图线原理),书中已接触到函数的图像表示,在这里,奥雷斯姆借用了"经度"、"纬度"这两个地理学术语来描述他的图线,相当于横坐标与纵坐标. 不过他的图线概念是模糊的,至多是一种图表,还未形成清晰的坐标与函数图像的概念.

解析几何的真正发明要归功于法国的另外两位数学家笛卡儿与费马. 他们工作的出发点不同,但却殊途同归.

笛卡儿 1637 年发表了著名的哲学著作《更好地知道推理和寻求科学真理的方法论》，该书有三个附录：《几何学》、《屈光学》和《气象学》，解析几何的发明包含在《几何学》这篇附录中. 笛卡儿的出发点是一个著名的希腊数学问题——帕波斯问题. 笛卡儿建立了世界上第一个倾斜坐标系，在《几何学》第三卷中，笛卡儿给出了直角坐标系的例子.

与笛卡儿不同，费马工作的出发点是竭力恢复失传的阿波罗尼奥斯的著作《论平面轨迹》，他为此写了一本题为《论平面和立体的轨迹引论》的书，书中清晰地阐述了费马的解析几何原理.

近代数学中，总的趋势是把一切都建立在数的概念的基础上. 解析几何，从仅仅是几何推理的一种工具发展成这样一门学科：在这里，对运算及其结果的直观的几何解释，不再是最终的、惟一的目标. 几何直观更主要是起着引导的作用，帮助启发和理解分析上的结果. 几何的含义的这种变化是在历史的进程中逐渐出现的，它大大的扩大了经典几何的范围，同时促使几何与代数几乎是完美有机的结合.

本章先介绍向量和向量运算，用向量这工具讨论平面、直线的问题，介绍一些常见的曲面与曲线，为学习多元函数微积分作些准备工作.

第一节　向量及其线性运算

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量称为向量（或矢量）.

在数学上，用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，如图 9－1.

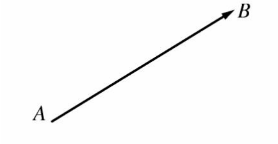

图 9－1

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示

的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 向量可用斜黑体字母表示，也可用上加箭头的书写体字母表示，例如，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$等等.

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，通常称这种向量为自由向量，简称为向量. 因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

定义 1

向量的模　向量的大小称为向量的长度(或模). 向量 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$.

单位向量　长度等于 1 的向量称为单位向量.

零向量　长度等于 0 的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量是长度为零的惟一向量，也是惟一一个没有确定方向的向量.

负向量　设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$. 向量$\overrightarrow{AB}$的负向量是$\overrightarrow{BA}$.

两向量的平行　两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此，两向量平行又称两向量共线.

向量的共面　设有 $k(k\geqslant 3)$个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 2　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所构成的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法称为向量加法的三角形法则.

利用平行四边形法则也可以作出两向量之和. 方法如下:

当向量 a 与 b 不平行时，平移向量使 a 与 b 的起点重合，以 a、b 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 a 与 b 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 9－2.

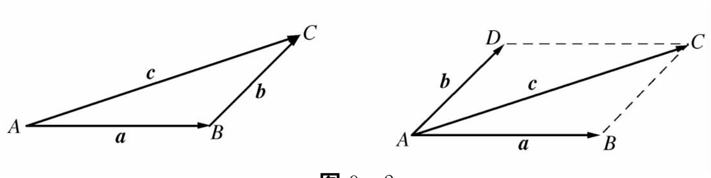

图 9－2

向量的加法符合下列运算规律.

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) 零向量：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) 负向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量 a_1，a_2，…，a_n，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求 n 个向量的和. 以三个向量为例，见图 9－3.

定义 3　两个向量 b 与 a 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

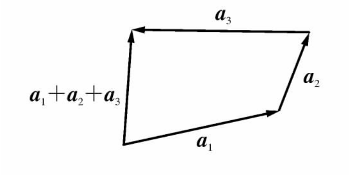

图 9－3

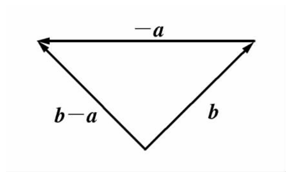

图 9－4

即把向量$-a$ 加到向量 b 上，如图 9－4.

特别地，当 $b=a$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

因此，若把向量 a 与 b 移到同一起点 O，则从 a 的终点向 b 的终点所引向量便是向量 b 与 a 的差 $b-a$，如图 9－5.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

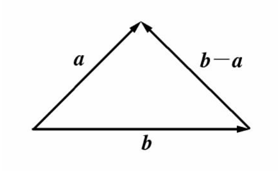

图 9－5

其中等号在 b 与 a 同向或反向时，即 $a/\!/b$ 时成立.

2. 向量与数的乘法（数乘）

定义 4 向量 a 与实数 λ 的乘法记作 λa，规定 λa 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 a 相同，当 $\lambda<0$ 时与 a 相反（图 9－6）. 当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 λa 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

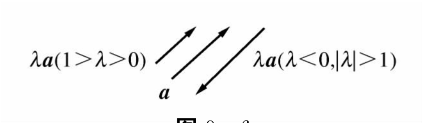

图 9－6

对任意实数 λ，有 $(\lambda a)/\!/a$.

数乘有以下运算规律.

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

(2) $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

(3) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$.

(4) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$;

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\ (\lambda\in\mathbf{R}).$$

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$（图 9－7）. 试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

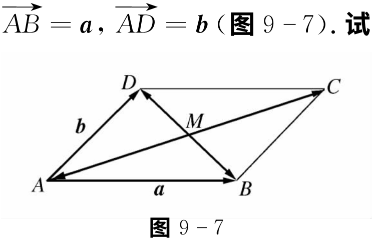

图 9－7

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，

于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

对非零向量，利用数乘运算可以构造与原向量同方向的单位向量. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 e_a. 于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|e_a$.

定理 1 设向量 $a\neq 0$，那么，向量 b 平行于 a 的充分必要条件是存在惟一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 定理的充分性是显然的，下面证明定理的必要性.

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，此时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向，且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\left|\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\right||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向且模相等，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，类似可证 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证明数 λ 的惟一性. 如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\text{，即 }|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

三、空间直角坐标系

给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，对于 Ox 轴上任一点 P，有对应的一个向量$\overrightarrow{OP}$. 由于$\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 1，必有惟一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 称为轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值），从而轴上的点 P 与实数 x 具有一一对应的关

系. 据此,定义实数 x 为 Ox 轴上点 P 的坐标.

由此可知,Ox 轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是:$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 下面我们引入向量的另外一种具体的表示形式.

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系(图 9-8).

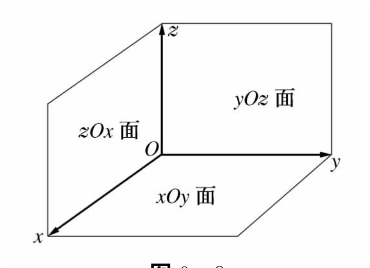

图 9-8

注 (1) 通常三个数轴应具有相同的长度单位.

(2) 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线.

(3) 数轴的正向通常符合右手规则.

定义 5 在空间直角坐标系中,任意两个坐标轴可以确定一个平面,这种平面称为坐标面. 由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面,此外的另两个坐标面分别是 yOz 面和 zOx 面.

定义 6 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为卦限,含有三个正半轴的卦限称为第一卦限,它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方,按逆时针方向(从上往下看)排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方,与第一卦限对应的是第五卦限,按逆时针方向(从上往下看)排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

向量的坐标分解式 任给向量 $\boldsymbol{r}$,平移至坐标原点 O 为起点. 终点对应点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体,则有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量（图 9－9）.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量，进而确定了 x，y，z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x，y，z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x，y，z 之间有一一对应的关系. 有序数 x，y，z 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$ 中）的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$；有序数 x，y，z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$ 中）的坐标，记为 $M(x,\ y,\ z)$.

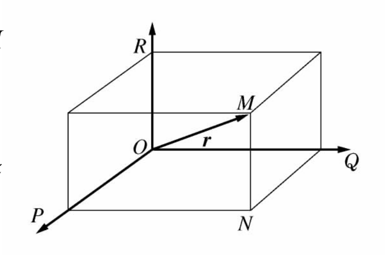

图 9－9

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 $(x,\ y,\ z)$ 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 平面上的点，$y=0$；在 xOy 平面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 y 轴上，则 $z=x=0$；在 z 轴上，则 $x=y=0$；如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

设

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\ \boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z).\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$