高等数学教材中的常见瑕疵

——献给

一年级大学生和高等数学教师

潘鼎坤

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学教材中的常见瑕疵

——献给一年级大学生和高等数学教师

潘鼎坤

西安交通大学出版社

内 容 提 要

作者根据国际上多种著名数学书籍，经过认真的对比、分析、研究，指出我国高等数学教材中的一些常见瑕疵或不妥之处，并且对每个指出的问题提出具体的修改意见。全书通过摆事实、讲道理，阐述了作者的见解，供学习高等数学课程的本科生、大专生及高等数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教材中的常见瑕疵：献给一年级大学生和高等数学教师/潘鼎坤著. —西安：西安交通大学出版社，2006.4
ISBN 7-5605-2185-1

Ⅰ. 高... Ⅱ. 潘... Ⅲ. 高等数学-教材-研究-高等学校 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 035147 号

书　　名	高等数学教材中的常见瑕疵 ——献给一年级大学生和高等数学教师
编　　著	潘鼎坤
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部) (029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安东江印务有限公司
字　　数	73 千字
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　张	3
版　　次	2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～5 000
书　　号	ISBN 7-5605-2185-1/O·234
定　　价	10.00 元

前　　言

本书所谓的高等数学，是指大学一年级中高等数学课程的内容，主要是微积分学、无穷级数与常微分方程三部分。

解放前我国大学中微积分教材多直接选用西方著名大学中使用的教材，解放初期多直接使用前苏联教材的中译本，因而四十年前我国公开出版的自编高等数学教材不多。近二十多年，公开出版的自编教材才逐渐增多，但由于国外书籍很贵，多数数学教师日常教学工作中能经常直接参阅国外优秀数学教材的机会甚少，所以多数教师编写教材时多以参阅国内已有自编书籍为主，缺乏对比资料，以致一书有差错，就像传染病似的传染开来，难以制止改正。

二十多年来，笔者有幸常与原全国工科数学课程教学指导委员会主任委员、西安交通大学陆庆乐教授，原全国工科数学课程教学指导委员会委员、西北工业大学孙家永教授等在一起开会、审稿，他们常感叹有的教材差错不少，却长期不改，笔者曾数次建议他们著文公开指正，但他们均忙于完成各自的著述计划，可惜无意及此。近十多年间，西安建筑科技大学多次举办青年数学教师教材教学法研讨班，命笔者负责，因而有责任需认真系统地阅读一些广泛流行的高等数学教材，发现有些教材确有彼此雷同的瑕疵，正因为彼此雷同，青年数学教师每不察觉有瑕。为此，笔者不揣冒昧，自忘谫陋，就所知所见所闻，记述30余篇短文，编辑成此小书，其中有少数文章，过去曾公开发表过，或到其他院校作过讲解，读者（或听众）认为读之（或听之）有益，这些小文多是“买货比三家”，参阅多种参考资料后得出的结论，不但指出某些书的瑕疵，同时也提出建设性的修改意见。

希望这本小书能给刚入大学学习的一年级大学生一些启发，即使流行很广、被普遍使用的、认为很成熟的高等数学教材，也有瑕疵之处。尽信书，不如无书。青年学生要探求真知，必须认真阅读，多作比较，找出差异，辨别是非，一入学，便这样去磨砺自己成长。愿此书能引导青年学生如何阅读参考书，如何深入理解教材内容，如何发现教材中的不足与差错。这本小书也让青年学生了解国际上有哪些著名的微积分教材，值得长期参阅。

这本小书也献给担任讲授高等数学课程的教师，书中提供了一些人曾经对某些问题认真思索过留下的烙印，指出曾经遇到过的暗礁。希望现任该课程的教师，备课时少走弯路，讲课时少触暗礁。自然，笔者学识有限，书中所提的问题仅仅是管见所及的一部分，难免挂一漏万，但已足使我们为师者警惕：就是一些十分古典十分普通的问题，稍不谨慎，也会成为教学中的“滑铁卢”，随时随地都要战战兢兢，如履薄冰。笔者在此是抛砖引玉，向同行请教，敬祈不吝赐教。

书名中用了“瑕疵”二字。意谓有些地方笔者确实像吹毛求疵，有些疵比较明显，容易发现，有些疵确实被厚厚的绒毛所覆盖，不吹毛或不拔毛就很难发现皮上有疵，求疵是为了去疵，更臻完善；其次，所以谓之瑕，而不言差或错，窃意瑕不掩瑜，笔者冒昧地指出某些教材有瑕，并不否认瑜的存在，那是瑜上的瑕，只是可惜瑜中有瑕而已，希望加工为无瑕的美瑜！

衷心感谢西安交通大学陆诗娣教授热忱鼓励与大力支持，没有她的推动，这本小书很难面世。还要特别感谢西安交通大学龚冬保教授和吴寿锽教授仔细地审阅了本书原稿，并提了多条建设性的珍贵意见，笔者把他们的意见直接吸收在书中，使本书增色不少。也感谢李敬桃同学在百忙中为笔者制作多幅插图。

最后要特别声明，书中不妥之处，恐不能免，竭诚欢迎多多批评指正，不胜感激。

潘鼎坤
2005年12月15日

目　　录

如何解释“多值函数”这个名词？

目前，在很多数学教材中，关于函数的定义是按下面的方式叙述的：

“设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$……”. 定义中“确定的数值”是指有唯一的数值，现代的函数定义都是作这样的解读的，也就是说，所谓函数都是指单值函数. 那末，为什么在不少数学教材中，仍出现“多值函数”这一个名词呢？这个名词不是自相矛盾的吗？现代函数概念源于德国数学家狄利克雷（Dirichlet）在 1837 年给出的单值函数的定义（实际上 1834 年俄国数学家罗巴契夫斯基（Лобачевский Н. И）已给出同样普遍的函数定义，但未引起西方学者的注意）. 在狄利克雷、罗巴契夫斯基之前，把函数理解为解析表达式. 欧拉（Euler）区分了显函数与隐函数，单值函数与多值函数，并把多值函数当成两个变量的高阶方程的根，如方程 $x^2+y^2=a^2$ 在欧拉时代确定出一个二值函数，故多值函数这个名词在 18 世纪和 19 世纪上半叶十分流行，反映了人们当时对函数的认识状况. 自狄利克雷、罗巴契夫斯基之后，所谓函数均应理解为单值函数，多值函数应视为一个过时的、历史上的数学名词了，像方程 $x^2+y^2=a^2$ 应视为在区间$[-a,a]$上确定了两个单值连续函

数：一为 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，另一为 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. 实际上若按狄利克雷的函数定义，龚冬保指出方程 $x^2+y^2=a^2$ 能确定的函数有无穷多个：将 $[-a,a]$ 任意分成两无公共点的集合 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M_1\cup M_2=[-a,a]$，作

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & x\in M_1;\\ -\sqrt{a^2-x^2}, & x\in M_2.\end{cases}$$

显然有 $x^2+y^2=a^2$.

现在我们自然明白：把两个在不同世纪中出现的数学概念混作一谈，怎能不令人困惑？！怎么能自圆其说？！欧拉说的“多值函数”与狄利克雷说的“函数”当然是各说各的一套，各持各的理，不求统一. 到了 20 世纪、21 世纪，凡说函数均指单值函数，让“多值函数”这个名词进入数学历史博物馆展览，供人回顾而已.

“分段函数”能自立家门吗？

“分段函数”这个名词现在越来越流行了，请看在一本流行的高等数学教材上如下写着：

“……有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.”

具有某一名称的函数，应是指该函数（或函数类）满足某一条十分特殊的性质，如有界函数、单调函数、连续函数、可微函数、有理函数等等，给出一个函数我们总可判断它是或不是某一类函数.但“分段函数”的条件不具备这种属性，如

$$f(x)=1 \qquad (-\infty,+\infty).$$

按上述定义它不是“分段函数”，但这同一个函数又可表示为

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2 x+\sin^2 x, & -\infty<x\leqslant 1;\\ \log_x x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

这又似乎成为“分段函数”了.

又如 $f(x)=\sqrt{x^2} \qquad (-\infty,+\infty)$，

这应不是“分段函数”，但它又可写成

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0;\\ 0, & x=0;\\ x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

此时又成为所谓的“分段函数”了.

我们通常见到的初等函数,哪一个不可以把它表示为“分段函数”呢?仔细一想,都是可以分段表示的.

确定一个函数的关键是对应关系及定义域,至于用什么式子表示,是分段表示还是不分段表示,甚至用什么方式(图形、式子、语言……)表示,这些都不是本质的,无关重要的.

在此,“分段函数”不能自立家门,它不能把哪一个普通的函数拒之于大门之外,一个可以自由出入的“门”,不能关闭的门,设立这样的“门”有什么意义呢?

存在分段表示的函数,这是表示函数的一种方式. 表示同一函数的方式可以多种多样, 如正弦函数,可解析表示为 $y=\sin x$,又可用图线表示,也可列表表示,亦可用级数表示为

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\qquad(-\infty,+\infty),$$

当然,若不怕麻烦,把它分段表示为

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\leqslant 0;\\ \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

也是没有错的呀!

所以不能用表示函数的方式不同,来区分函数类. 在外文(如英文、俄文)中有分段单调函数、分段光滑函数、分段连续函数等词条,但未见把“分段函数”作为专门的数学术语,个中原因或许就是如上所指出的吧.

也要指出,“分段函数”虽不能自立家门,但在数学上,特别地研究分段表示的函数在其定义域的区分点处的连续性和可导性能帮助初学者深入地了解函数极限、连续、导数等概念的实质是不可否认的.

一个会给人以错觉的标题:“函数的几种特性”

不少教材在讲解了函数概念之后,紧接着来一小节,小节的标题为“函数的几种特性”. 这一小节中各大段的标题依次为“函数的有界性”,“函数的单调性”,“函数的奇偶性”,“函数的周期性”.

这些大小标题都传达给读者以错误的消息. 就字面的涵义来说,以为每个函数都有有界性、单调性、奇偶性以及周期性!以为每个函数都具有这几种特性!众所周知,事实上不是. 奇怪的是在中文数学教材中这样的标题十分常见,因而我曾怀疑是否我理解错了. 我就把我手头有的外文书翻阅了一遍,发现外文同类书籍讲解同样内容时都未冠以如上的标题. 笔者建议把“函数的几种特性”改为“具有某种特性的函数”,“函数的有界性”改为“有界函数”,其余依此类推,这样就准确地表达了书的作者想表达的意思. 若标题为“具有某种特性的函数”,则显然为依次去介绍只具有某一种特性的函数,一段介绍一类函数,全小节共介绍具有不同性质的几类函数,可见这两个标题涵义不同,原标题易被理解为每一函数都具有几种特性,新标题才准确表达要介绍的内容为具有不同特性的几类函数:如有界函数、单调函数、周期函数以及奇(偶)函数, 这样,标题与内容才相互配合.

关于反双曲函数的错误记法剖析

在华罗庚所著《高等数学引论》的第一卷第一分册 p. 135 上有

“$y = \mathrm{ch}x$， $(-\infty < x < +\infty)$；

$x = \mathrm{arcch}y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$， $(y \geqslant 1)$”

还有 “$\mathrm{arcsh}y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$；

$\mathrm{arcth}y = \dfrac{1}{2}\log(y + \sqrt{y^2 + 1})$， $(|y| < 1)$；

$\mathrm{arccth}y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{y+1}{y-1}$， $(|y| > 1)$”

等等公式.

以上公式中的 arcchy，arcshy，arcthy，arccthy 均应分别改为 archy，arshy，arthy，arcthy 才对. 这个 ar 是英文 area（面积）的前两个字母，过去在反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\mathrm{arctg}x$，$\mathrm{arcctg}x$ 中的 arc 是弧的意思. 如图 1 中，$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，记 $x = \cos\alpha$，$y = \sin\alpha$，$\alpha = \arcsin y$，其中 α 恰为圆心角 α 所对圆弧的弧长 α，即 $\sin\alpha = BC$ 之长，OA 长 $= 1$，$\alpha =$ 圆弧，$\overset{\frown}{AC}$之长

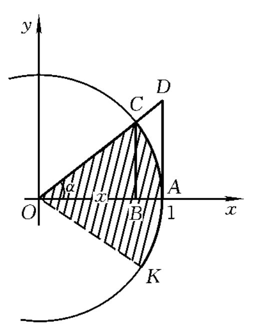

图 1

$=\angle AOC$ 的 α 弧度.

在双曲函数理论中,情况就不同了. 今设双曲线方程为 $x^2-y^2=1$,引入参数 $x=\text{ch}t$, $y=\text{sh}t$, 显然有

$$\text{ch}^2 t-\text{sh}^2 t=1,$$

现在来探求这个参数 t 的几何意义.

计算图 2 中由直线 OK,OC 及一段双曲线弧$\overset{\frown}{CAK}$所围成曲边

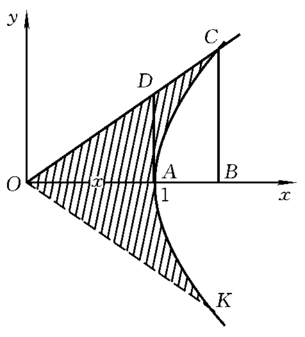

图 2

三角形的面积 S 的一半:

$$\frac{1}{2}S=\triangle OBC \text{ 的面积} - \text{曲边三角形 } ABC \text{ 的面积}$$

$$=\frac{1}{2}xy-\int_1^x y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\int_1^x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \qquad (\text{因 } x^2-y^2=1)$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]\Bigg|_{x=1}^{x=x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{y^2+1}+y) \qquad (\text{因 } x^2-y^2=1),$$

故有 $$S=\ln(y+\sqrt{y^2+1}). \qquad ①$$

但另一方面，$y=\operatorname{sh}t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，即$(e^t)^2-2ye^t-1=0$，这个方程的根为

$$e^t=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$ （因 $e^t>0$，根号前的负号舍去），

从而得 $$t=\ln(y+\sqrt{y^2+1})=\operatorname{arsh}y, \qquad ②$$

由①，②得 $$t=s=\operatorname{arsh}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1}). \qquad ③$$

可见 $y=\operatorname{sh}t$ 中的参数 t 表示双曲线弧段 $x^2-y^2=1$ 与直线 OK，OC 所围成的区域的面积. 由图 2，有

$$y=\operatorname{sh}t=BC \text{ 之长}，\qquad x=\operatorname{ch}t=OB \text{ 之长}，$$

$$\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\frac{BC}{OB}=\frac{AD}{OA}=AD=\operatorname{th}t \quad （\text{因 } OA \text{ 长}=1）.$$

其次，反双曲函数

$$\operatorname{arch}y，\operatorname{arsh}y，\operatorname{arth}y$$

也可分别记作

$$\operatorname{Arch}y，\operatorname{Arsh}y，\operatorname{Arth}y.$$

这两种记号是同一涵义，没有像反三角函数那样有主值一说，因 $y=\operatorname{sh}t$ 及 $y=\operatorname{th}t$ 均是在$(-\infty,+\infty)$上的单调增加函数，它们的反函数是在$(-\infty,+\infty)$上被唯一确定的，根本不存在主值一说. 唯有 $y=\operatorname{ch}t$，对于$(1,+\infty)$上同一 y 值，有两个 t 值 t_1，t_2（$t_2=-t_1$）与之对应，亦即它确定了两个连续的单值支的反函数：

$$\operatorname{arch}y=\pm\ln(y+\sqrt{y^2-1}), \qquad y\geqslant 1,$$

或写作 $$\operatorname{arch}y=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1}), \qquad y\geqslant 1.$$

可见 $\operatorname{arch}y$ 一般没有被作为该函数的主值. 请参阅《苏联数学百科全书》卷三 p. 1134（俄文版）以及柯朗（Courant）著的《微积分》卷一 p. 188（英译本）等著作.

无穷小阶的比较的正确解释

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称变量$\alpha(x)$当$x\to x_0$时为无穷小量．若变量$\alpha(x)$，$\beta(x)$当$x\to x_0$时，均为无穷小量，且有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则当$x\to x_0$时，称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小．于是有的教材解释说："两个无穷小量之比的极限的各种不同情况反映了不同的无穷小量趋于零的'快慢'程度……"例如"在$x\to 0$时的过程中，$x^2\to 0$比$3x\to 0$'快些'，反过来$3x\to 0$比$x^2\to 0$'慢些'……"．什么叫"快"？"快"即"速率大"，"慢"即"速率小"．现设有两个质点，它的位置函数分别为$x_1=3t$，$x_2=t^2$，其中t表示时间变量，即于某时刻t时，二质点在同一数轴上位置坐标分别为$3t$及t^2．当$t\to 0$时，显然x_1，x_2均为无穷小，且因$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x_2}{x_1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{3t}=0$，$x_2$是比$x_1$高阶的无穷小．但速率$\dot{x}_1=\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=3$，$\dot{x}_2=\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=2t$，不难发现当$0<t<\dfrac{3}{2}$时，$0<\dot{x}_2=2t<\dot{x}_1=3$，$\dot{x}_1$的数值反比$\dot{x}_2$的数值大．可见两无穷小阶的比较，并不反映两无穷小趋于零的"快慢"程度，只能说高阶无穷小比低阶无穷小离开零更近一些．换句话说，两个无穷小阶的比较只反映两个无穷小与零的差距的远近的比较：高阶无穷小

与零的差距数值小,而低阶无穷小与零的差距数值大.由高阶无穷小的定义可直接证得这一结论如下:

设当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小,由定义有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0,$$

再据极限的定义,$\forall\varepsilon>0$(取 $0<\varepsilon<1$),$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}-0\right|<\varepsilon,\quad \text{亦即}\,|\beta(x)|<\varepsilon|\alpha(x)|<|\alpha(x)|.$$

所以只要 $0<|x-x_0|<\delta$,便有

$$|\beta(x)-0|<|\alpha(x)-0|,$$

即 $\beta(x)$ 与零的距离比 $\alpha(x)$ 与零的距离更近一些.

请参阅下文:

申兰珍.质疑无穷小比较的一种解释.高等数学研究,2004,(5):26