·成人教育数学辅导丛书

高等数学攻关

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书为成人教育数学辅导系列丛书之一，由作为全国工科数学教学基地的上海交通大学数学系，组织教学第一线的老教师精心编撰。每章均先给出内容提要、基本要求和重点与难点；再作“例题精解”，均有详解，有的题给出多种解法，对典型题或难题，还专作“分析”、“点评”；“习题精选”则可供读者练习之用，均附“答案与提示”。

附录中收编了几家重点大学成人教育院校近年本科生高等数学试卷五份，均有答案与提示。

本书适合成人教育理、工、农、医科，经济管理和财经类各专业本、专科生阅读，也可作教师的教学参考书。

前　　言

众所周知，大学数学是理、工、农、医、管理等各科各专业共同的基础课，其重要性不言而喻。由于数学本身抽象深奥，使不少学生对学数学有畏惧感，特别是数学考试总有人过不了关，因而数学课历来被学生称为“霸王课”。

怎样才能学好数学呢？数学界的名师、学业有成的学子对此回答不尽相同：

“首先要喜欢数学，喜欢了，自然会下功夫去学好。”

“学数学要勤奋，要多动脑、多动手、多动口。”

“课前要预习，课上认真听，课后要复习，作业必须独立完成。”

上述回答有共同之处：学数学要花时间，要多做习题。我国著名数学家苏步青院士在求学期间就曾做过一万余道微积分题。多做习题自然要多花很多时间，这对成人教育学院的学生来讲难度较大：他们白天工作，夜晚上课，有的学生可能还要照顾家庭、子女，能用来做习题的时间实在不多。若遇难题，无处请教，宝贵的时间在苦思冥想中悄悄流失。向书本请教，也不失为一个好方法，但又难以觅到与教科书配套的辅导书。

呈现在眼前的这套成人教育数学辅导系列丛书，就是作为全国工科数学教学基地的上海交通大学数学系，专为接受成人高等教育的学生而组织编写的，作者都是教学第一线的老教师。他们根据数学教学大纲（本科非数学专业）的要求，精心编选了数百道习题，并对其中一半给予精解，即不但给出解题思路与方法（有的题给出多种解法），还对难点与易错之处进行分析、点评。通过对各种含不同知识点的典型例题的剖析，使读者加深对本课程基本概念、基本理论和基本方法的理解与掌握。每章的“习题精选”供读者练习之用，均给出了答案或提示。附录中收编了几家重点大学成人教育院校近年的试卷，供读者在复习迎

考时作练兵之用(附答案)。

由于非数学专业的每门数学课时都比较少,课堂上教师举例讲解的时间非常有限,所以这套成人教育数学辅导系列丛书,既是对课时不足的一种补偿,也是对学生的课外辅导。编者期望本丛书能使读者用不太多的时间比较扎实地掌握相关课程的基本知识,提高解题能力,闯过考试难关。

本系列丛书由《高等数学攻关》、《线性代数攻关》和《概率论与数理统计攻关》组成。其中《高等数学攻关》,第1,2,7,8章由郑麒海副教授编写,第5,6,9章由汪静副教授编写,第3,4,10章由钱芝蓁副教授编写。

限于编者水平,难免有疏漏与不当之处,敬请同行与读者不吝赐教。

编　者
于上海交通大学
2005年8月

目　　录

第 1 章　函　　数

内容提要

（1）函数的定义

设 D 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，对 D 内每一个 x，根据一确定的法则 f，有唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是一个函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$.

（2）函数的性态

① 单调性：设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，如对 $\forall x_1,x_2\in D(f)$，

当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加；

当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 D 上严格单调减少.

② 有界性：设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，若存在正数 M，使得对 $\forall x\in D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，称函数 f 在 D 上有界.

③ 奇偶性：设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 $D(f)$ 关于原点对称，若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数；

若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数.

④ 周期性：设函数 $y=f(x)$，若存在非零常数 T，使得 $\forall x\in D(f)$，有 $x\pm T\in D(f)$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 f 为周期函数，T 为一个周期.

基本要求

① 知道绝对值不等式 $|x|\leqslant a$ 及 $|x|\geqslant a$ 的含义.

② 掌握函数的定义，能熟练求出函数的定义域.

③ 知道反函数的概念.

④ 掌握基本初等函数（幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数

和对数函数)的定义、定义域、图像及主要性质.

⑤ 知道初等函数的定义.

⑥ 会求复合函数的函数值,会将一个复合函数分解成几个简单函数.

⑦ 会列出比较简单问题的函数关系.

重点与难点

① 利用函数的基本性质的定义来判断函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性.

② 复合函数(包括求复合函数的函数值、分段函数的复合等).

A 例题精解

【1-1】 试求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(2) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\lg(1-2\cos x)$;

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

解 (1) 因为分式的分母不能为零,所以当分母不为零时函数有定义,即 $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\neq 0$,也就是当 $x\neq 1$,且 $x\neq 2$ 时,函数有定义.

故函数的定义域为:$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为对数函数当真数大于零才有定义,即 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$,亦即当 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0\end{cases}$ 时函数有定义.

由 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}$ 解得 $-1<x<1$;

而不等式组 $\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0\end{cases}$ 无解；故函数的定义域为$(-1, 1)$.

(3) $y=\lg(1-2\cos x)$ 是对数函数. 如同上题，函数在 $1-2\cos x>0$ 即 $\cos x<\dfrac{1}{2}$ 时有定义；而当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{5}{3}\pi$ 时，$\cos x<\dfrac{1}{2}$；故函数的定义域为 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}, 2k\pi+\dfrac{5}{3}\pi\right)$，$k$ 为整数.

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$，对于函数$\sqrt{u}$的定义域为 $u\geqslant 0$，$\arcsin u$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$. 此题的定义域为 $3-x\geqslant 0$，且$\left|\dfrac{3-2x}{5}\right|\leqslant 1$，即 $x\leqslant 3$ 且 $|3-2x|\leqslant 5$. 由 $|3-2x|\leqslant 5$ 可有

$$-5\leqslant 3-2x\leqslant 5\Rightarrow -8\leqslant -2x\leqslant 2\Rightarrow 4\geqslant x\geqslant -1.$$

故函数的定义域为$[-1, 3]$.

【1-2】 设 $y=f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$，试求下列函数的定义域：(1) $y=f(x+a)$；(2) $y=f(x-a)$；(3) $y=f(x+a)+f(x-a)$，其中 $a>0$.

解 (1) $y=f(x+a)$ 的定义域为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

(2) $y=f(x-a)$ 的定义域为 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，即 $a\leqslant x\leqslant 1+a$.

(3) $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为

$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$ 解得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，而此式成立必须 $1-a\geqslant a$，即 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数的定义域为$[a, 1-a]$；若 $a>\dfrac{1}{2}$，函数定义域为空集.

【1-3】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解　$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，**以** x **代替式中的** $x+\dfrac{1}{x}$，**即得**　$f(x)=x^2-2$．

【1－4】　设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，**求** $f(x)$．

解　方法1　因为 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=e^{2x}+2e^x+1-(e^x+1)+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$，**以** x **代替式中的** e^x+1，**即得** $f(x)=x^2-x+1$．

方法2　令 $e^x+1=u$，**即** $x=\ln(u-1)$ **代入** $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，**得** $f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$，**故** $f(x)=x^2-x+1$．

【1－5】　设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，**求** $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$．

解　因为 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=1+\left[\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\dfrac{x}{2}\right]=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$，**所以** $f(u)=2(1-u^2)$，**于是** $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$．

【1－6】　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，**求** $f\left(\dfrac{1}{f(x)-1}\right)$ **的表达式和定义域**．

解　因为 $f(x)-1=\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{1}{x-1}$，**故** $\dfrac{1}{f(x)-1}=x-1$，**于是** $f\left(\dfrac{1}{f(x)-1}\right)=f(x-1)=\dfrac{x-1}{(x-1)-1}=\dfrac{x-1}{x-2}$．

其定义域为 $x\neq1$，$x\neq2$，**即** $(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$．

【1－7】　用分段函数表示下列函数：

(1) $y=|3-x|-|2x-4|$；(2) $y=|2x+1|+|1-3x|$．

解　(1) **因为** $|3-x|=\begin{cases}3-x & (x\leqslant3),\\ x-3 & (x>3),\end{cases}$

$$|2x-4|=\begin{cases}2x-4 & (x\geqslant 2),\\ 4-2x & (x<2),\end{cases}$$

于是,当 $x<2$ **时,** $|3-x|-|2x-4|=(3-x)-(4-2x)=x-1$,

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ **时,** $|3-x|-|2x-4|=(3-x)-(2x-4)=7-3x$,

当 $x>3$ **时,** $|3-x|-|2x-4|=(x-3)-(2x-4)=1-x$.

所以

$$|3-x|-|2x-4|=\begin{cases}x-1 & (x<2),\\ 7-3x & (2\leqslant x\leqslant 3),\\ 1-x & (x>3).\end{cases}$$

(2)**因为** $|2x+1|=\begin{cases}-(2x+1) & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right),\\ 2x+1 & \left(x\geqslant-\dfrac{1}{2}\right),\end{cases}$

$$|1-3x|=\begin{cases}1-3x & \left(x<\dfrac{1}{3}\right),\\ 3x-1 & \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right),\end{cases}$$

于是,当 $x<-\frac{1}{2}$ **时,** $|2x+1|+|1-3x|=-(2x+1)+1-3x=-5x$,

当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ **时,** $|2x+1|+|1-3x|=2x+1+1-3x=2-x$,

当 $x>\frac{1}{3}$ **时,** $|2x+1|+|1-3x|=2x+1+3x-1=5x$.

所以

$$|2x+1|+|1-3x|=\begin{cases}-5x & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right),\\ 2-x & \left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}\right),\\ 5x & \left(x>\dfrac{1}{3}\right).\end{cases}$$

【1-8】 求函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ **的值域**.

解　方法1　由 $y(x^2+1)=(x-1)^2\Rightarrow yx^2+y=x^2-2x+1\Rightarrow(y-1)x^2+2x+(y-1)=0$. **函数的值域必须且只须上面关于** x **的方程有解**.

当 $y=1$ **时,方程为** $2x=0$, **得** $x=0$, **故** $y=1$, **方程有解**.

当 $y\neq1$ **时,**x **的一元二次方程有解须** $\Delta=b^2-4ac=4-(y-1)^2\geqslant0$, **即** $(y-1)^2\leqslant1$, $-1\leqslant y-1\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant2$.

故函数的值域为　　　$0\leqslant y\leqslant2$.

方法2　因为 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$, **而由** $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant1$, **即** $-1\leqslant\dfrac{2x}{x^2+1}\leqslant1$, **可得**

$$1-1<y=1-\frac{2x}{x^2+1}<1-(-1),$$

所以　　　$0\leqslant y\leqslant2$.

【1-9】 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, **已知** $f(-2)=11$, $f(0)=1$, $f(2)=7$, **求** $f(x)$.

解　由题设可得

$$\begin{cases}a(-2)^2+b(-2)+c=11,\\ a\cdot(0)^2+b\cdot(0)+c=1,\\ a(2)^2+b\cdot(2)+c=7,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}4a-2b+c=11,\\ c=1,\\ 4a+2b+c=7.\end{cases}$$

解得 $a=2$, $b=-1$, $c=1$, **于是** $f(x)=2x^2-x+1$.

【1-10】 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

解 设对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$，且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\cdot\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

【1-11】 设函数 $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$ 是(　　).

(A) 奇函数； (B) 偶函数；

(C) 非奇非偶函数； (D) 有界函数.

解 因为

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\lg(1+x)-\lg(1-x),\\
f(-x)&=\lg(1-x)-\lg(1+x)\\
&=-[\lg(1+x)-\lg(1-x)]\\
&=-f(x),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 为奇函数. 又当 $x<1$ 无限接近于 1 时，$\frac{1+x}{1-x}$ 趋于无穷大，$\lg\frac{1+x}{1-x}$ 也趋于无穷大，故 $f(x)$ 不是有界函数.

所以应选 A.

【1-12】 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，其中 a 为不等于 1 的正常数，则 $F(x)$ 是(　　).

(A) 奇函数； (B) 偶函数；

(C) 非奇非偶函数； (D) 奇偶性与 a 有关的函数.

解 因为 $f(-x)=-f(x)$，于是

$$
\begin{aligned}
F(-x)&=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{1}{\frac{1}{a^x}+1}-\frac{1}{2}\right)\\
&=-f(x)\left(\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\,\frac{2a^x-(1+a^x)}{2(1+a^x)}
\end{aligned}
$$

$$=-f(x)\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}=-f(x)\frac{a^x+1-2}{2(a^x+1)}$$

$$=-f(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a^x+1}\right)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x).$$

故该函数为偶函数.

【1-13】 证明函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ **为奇函数**.

证 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

所以 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ **是奇函数**.

【1-14】 试判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & (x\geqslant 0),\\ -x^3+1 & (x<0)\end{cases}$ **的奇偶性**.

解 因为 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^3+1 & (-x\geqslant 0),\\ -(-x)^3+1 & (-x<0)\end{cases}=$

$\begin{cases}-x^3+1 & (x\leqslant 0),\\ x^3+1 & (x>0)\end{cases}=f(x)$. **所以** $f(x)$**为偶函数**.

【1-15】 设 $f(x)$**是定义在**$(-l,+l)$**内任一个函数,证明函数** $f(x)+f(-x)$ **是偶函数**, $f(x)-f(-x)$ **是奇函数**.

证 令 $F(x)=f(x)+f(-x)$, $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$, **故** $f(x)+f(-x)$ **为偶函数**.

又令 $G(x)=f(x)-f(-x)$, $G(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$. **所以** $f(x)-f(-x)$ **为奇函数**.

【1-16】 证明:定义在$[-l,+l]$**上的任一个函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和,且表示方式是唯一的**.

证 因为 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

由例1-15 **可知:其中** $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ **是偶函数**, $\frac{1}{2}[f(x)-$

$f(-x)]$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

下面证明表示方法唯一(即假设 $f(x)$ 可表示为一个偶函数与一个奇函数的和,证明偶函数一定为 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,奇函数一定为 $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$).

设 $f(x)=A(x)+B(x)$,其中 $A(x)$ 为偶函数,$B(x)$ 为奇函数,即 $A(-x)=A(x)$,$B(-x)=-B(x)$,则

$$f(-x)=A(-x)+B(-x)=A(x)-B(x).$$

由 $\begin{cases} f(x)=A(x)+B(x), \\ f(-x)=A(x)-B(x) \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \\ B(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]. \end{cases}$

唯一性得证.

【1-17】 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$,$a$ 为常数,证明 $f(x)$ 是奇函数.

证 因为 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$ 对任意的 x 成立,故可用 $\frac{1}{x}$ 替代此式中的 x,得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax$. 由

$\begin{cases} 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}, \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax \end{cases}$ 解得 $f(x)=\frac{2a}{3x}-\frac{ax}{3}$,于是

$$f(-x)=\frac{2a}{3\cdot(-x)}-\frac{a\cdot(-x)}{3}=-\frac{2a}{3x}+\frac{ax}{3}=-\left(\frac{2a}{3x}-\frac{ax}{3}\right)=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

【1-18】 求下列函数的周期:

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\cos(\omega x+\theta)$ (ω，θ 为常数)；

(3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$；(4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

解　(1) 因为 $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，其中 $\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\cos(2\pi+2x)=\frac{1}{2}\cos 2(x+\pi)$ 是以 π 为周期的周期函数,故 $y=\sin^2 x$ 的周期为 π.

(2) 因为 $y=\cos(\omega x+\theta)=\cos(2\pi+\omega x+\theta)=\cos\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\theta\right]$，故函数 $y=\cos(\omega x+\theta)$ 的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

(3) 因为 $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

而 $\frac{1}{4}\cos 4x=\frac{1}{4}\cos(2\pi+4x)=\frac{1}{4}\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期函数,所以　$y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 是以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期函数 .

(4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$，因为 $\sin x$ 的周期为 2π，$\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 π，$\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$. 2π，π，$\frac{2\pi}{3}$的最小公倍数为 2π. 所以函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为 2π.

【1-19】　设 $f(x)=\begin{cases}2x & (x\leqslant 0),\\ 0 & (x>0),\end{cases}$ $\varphi(x)=x^2-1$，求 $f(\varphi(x))$.

解 $$f(\varphi(x))=\begin{cases}2\varphi(x) & (\varphi(x)\leqslant 0),\\ 0 & (\varphi(x)>0),\end{cases}$$

而 $\varphi(x)=x^2-1$ **当** $|x|\leqslant 1$ **时小于零,当** $|x|>1$ **时大于零,于是**

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}2(x^2-1) & (|x|\leqslant 1),\\ 0 & (|x|>1).\end{cases}$$

【1-20】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1),\\ 0 & (|x|>1),\end{cases}$ **则当** $x\in(-\infty,+\infty)$ **时,求** $f(f(x))$.

解 当 $x\in(-\infty,+\infty)$ **时,由** $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1),\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ **可知** $|f(x)|\leqslant 1$, **因此** $f(f(x))=1$.

【1-21】 设 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2 & (1<x\leqslant 2),\end{cases}$ $g(x)=\ln x$, **求** $f(g(x))$ **和** $g(f(x))$.

解 因为当 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$ **时,** $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, **当** $\mathrm{e}<x\leqslant \mathrm{e}^2$ **时,** $1<g(x)\leqslant 2$, **于是**

$$f(g(x))=\begin{cases}2g(x) & (0\leqslant g(x)\leqslant 1),\\ (g(x))^2 & (1<g(x)\leqslant 2)\end{cases}=\begin{cases}2\ln x & (1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}),\\ \ln^2 x & (\mathrm{e}<x\leqslant \mathrm{e}^2).\end{cases}$$

而 $$g(f(x))=\ln f(x)=\begin{cases}\ln 2x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ \ln x^2 & (1<x\leqslant 2).\end{cases}$$

【1-22】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{次}}(x)))$, **若** $f(x)=a+bx$, **证明:**

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x.$$

证 用数学归纳法证明.

(1) $n=1$ **时** $f_1(x)=f(x)=a+bx=a\dfrac{b-1}{b-1}+bx$, **等式成立.**

(2) **设当** $n=k$ **时** $f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^k x$ **成立,则当** $n=$