高等数学复习指南

(题型·思路·方法·技巧)

党四善　编著

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学复习指南：题型·思路·方法·技巧/党四善编著. —北京：中国轻工业出版社，2005.6

ISBN 7-5019-4730-9

Ⅰ.高… Ⅱ.党… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 008739 号

责任编辑：王　淳

策划编辑：王　淳　　责任终审：孟寿萱　　封面设计：邱亦刚

版式设计：丁　夕　　责任校对：燕　杰　　责任监印：胡　兵

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编：100740）

印　　刷：

经　　销：各地新华书店

版　　次：2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 6 月第 1 次印刷

开　　本：787×1092　1/16　　印张：22

字　　数：507 千字

书　　号：ISBN 7-5019-4730-9/O·006

定　　价：32.00 元

读者服务部邮购热线电话：010-65241695　85111729　传真：85111730

发行电话：010-65141375　85119845

网　　址：http://www.chlip.com.cn

Email：club@chlip.com.cn

40035J4X101ZBW

前　言

高等数学是理工科院校的一门重点基础课，它是每年升入各类大专院校的广大新生必须跨跃的一道门坎。高等数学又在全国硕士学位研究生考试中被指定为统考科目，它是广大考生取得高分的主要障碍。为了使广大新同学有一本合适的学习参考书，也为了使广大考研族有一本切实有效的复习资料，我们殚思极虑，以独特的构思、独特的笔调、独特的布局奉献给广大读者这本《高等数学复习指南》。它是编者三十多年"高等数学"课教学经验的凝聚，是对二十几年来各类考试题和考研题的研究心得，是任教考研辅导班特别是指导所任本科班级在屡次考试中取得优异成绩的实战经验的升华。我们的理念就是要创新、出奇，写出一本既贴近书本、贴近学生，又立意新、方法妙、技巧奇的好书，以帮助读者以较少的投入，获取最大化的效益。

本书初稿经过近一两年试用，学生反映条理清楚，题型经过精选，概括性强、覆盖面大，思路、方法、技巧清晰、多变、奇特，其表述方式凝炼、简洁、易为学生掌握。在多次高等数学统考中，所任班级同学都能以较短的时间，轻松地完成答卷，并获得优异的成绩。

同济大学主编的《高等数学》是我国高等学校使用量最大的一本经典数学教材，并被许多院校指定为研究生考试的复习教材。近年来，同济大学又新编了《微积分》教材。本书就是配合这些教材并依照《全国工科高等数学教学大纲》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》而编写的。书中的大量"例题"和"类题"都选自同济大学的《高等数学》(第四版)。此外，我们还紧扣历届考研试题，书中编入了相当数量的考研原题。考研题都在题号后加括号予以注明，如(91－1)就表示1991年考研试题(一)中的题。

本书编写的指导思想是：

用"联系"的观点观察问题；用"转化"的手法处理问题。

本书的编写从题型→思路→方法→技巧四个层面上展开。全书以"题型"为纲，体现了对高等数学课程内容的整体性把握。这是用"联系"的观点对其观察、分析、提炼的结果。"思路"、"方法"、"技巧"则主要体现"转化"手法。其中既有程序性、一般性、通用性的处理，又有极富灵活性、特殊性和简捷性的点拨，使读者经过训练之后能迅速找到解题途径，领悟解题诀窍，构建应试策略。

1. 题型

我们以联系的观点考察教材内容和各类习题，从中提炼出二十六个专题，分列二十六章。每章就是一个大的题型。对每一个专题，在该章开始有一个"本章概述"，提纲挈领地论述其中各部分之间的逻辑关系、解题思路分析、列举方法一揽、解题关键、应试策略、易错辨析等。每章下列几个小节，每节就是一个小题型。每小节先有一个"本节要点"，对该小题型进行扼要的点拨。然后进入本节的"例题剖析"，因为例题都经过精选，具有代表性、示范性、典型性，且在剖析时注意一题多解，所以该节题型的方方面面在此就基本探讨清楚了。而对于一些不常见的、特殊的或偏难的题型则放在每章的"思考题·综合题·杂题"中。经过这样的有区别、有层次的编写，各种题型基本上都包罗书中了。

2. 思路和方法

对每一专题，从每一小题型乃至每一道题都力争剖明其解题思路和方法。我们的目的不

仅在于教学生“把题做出来”,还要教学生懂得“如何把题做出来”。强调一题多解、多解中选优解,其中不少独到的解题思路和方法都是作者自己的心得。

3. 技巧

本书在解题技巧上颇下了一番功夫。首先结合各个专题列举了相关的基本技巧,同时又予以拔高和阐发(如多元积分学中的奇偶对称性、轮换对称性、代入技巧);有的是我们提炼出来的(如格林公式和高斯公式中的匹配性,定积分计算中的渐延分部积分公式等);此外,对每一题型乃至每一个题目,都尽量指明其独特的解题技巧。所有这些都可以使读者大大提高解题速度和准确性。

本书的编写特点是:

(1) 由于是配合同济大学“高等数学”(第四版)而编写的复习指导书,为节省篇幅,不再列出“内容提要”,学生只要翻阅教材就行了。

(2) 为了兼顾读者中的不同要求和其必然存在的水平上的差异,本书采用了“爬缓坡,攀高峰”的布局,表现在题目的选取上是由易到难的方式:

例题剖析→类题训练→思考题·综合题·杂题。

这样做,既使初学者和久已遗忘者牢牢掌握基本、夯实基础,又可使大学新生和考研族中的佼佼者以扎实的功底去披艰履险,获得更优异的成绩。

(3) 本书不完全拘泥于教材的章节次序,以“统一”的视野统帅、组织材料。比如“几何图形求积”、“奇偶对称性·轮换对称性·代入技巧”、“转动惯量·重心·引力”、“绝对值与算术根”、“证不等式”等专题的提炼与写作,以统一的思路,提炼出统一的方法,给出各专题的统一的公式,既新颖别致,又简明易学,是我们的独创。

本书共分二十六章,由陕西科技大学党四善教授编著。在本书编写过程中,田蕊莲同志付出了辛勤的劳动,做了大量的具体工作,没有她的支持和帮助,本书的完成是不可能的。王德华、常秦君、何鹏同志对本书的构想提出了宝贵意见;党高健、简郁洁、吕众、戴玉振同志对本书的图和表的处理做了大量工作;郭立童、孙勇、唐晶等老师为本书的编写提供了宝贵的资料;郭蔚、唐凌红、杨朝初、仲伟聪、魏洁、蒋旻、孟庆标、周康宁等对本书选用的题目进行了计算和校对;此外,还得到了李良星、孙媛媛、周耀辉、李萍、王莹等老师的大力协助,在此表示衷心的谢意。

由于时间仓促,书中难免存在某些缺点、错误,恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 9 月

目　　录

第 1 章　一元函数(数列)极限求法

本章概述

求极限不仅是高等数学运算的基本功，而且题型杂、方法多、技巧性强. 读者应在此加强练习，为今后的学习打下坚实的基础.

我们着力讲解的基本题型是：各种未定式的极限、求极限式中的参数、求无穷小的阶及递推数列求极限.

未定式的极限求法是极限运算中的核心部分，对它们的剖析最能体现“联系”的观点和“转化”的手法. 各类未定式之间有如下的逻辑关系(图 1 − 1).

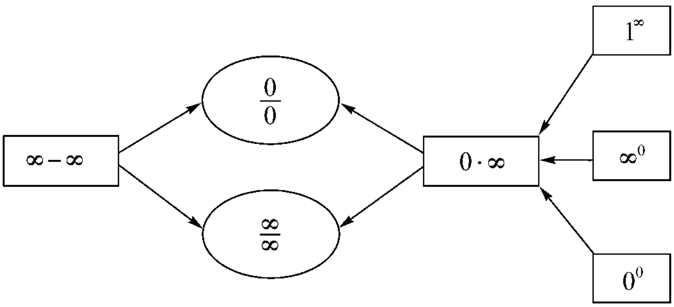

图 1 − 1

“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式是未定式中基本的形态，特别是前者更为基本. 图 1 − 1 表明，其它类型的未定式均可化为以上两种基本形态. 具体说来，有：

(1) “$0\cdot\infty$”型　通过变乘为除或变除为乘化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”.

(2) 三个幂指式未定式 1^∞，∞^0，0^0　均可通过取对数或翻到 e 上写成 $e^{\ln\square}$ 而化为“$0\cdot\infty$”型，再用(1)的方法化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型.

(3) “$\infty-\infty$”型　可通过通分、有理化分子、提因子等三种方法化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型.

本章求极限所用的主要方法有：

①消去化零因子；②利用洛必达法则；③利用无穷小代换；④利用两个重要极限；⑤利用极限存在的充要条件*；⑥利用夹逼准则；⑦利用单调有界准则；⑧利用导数定义；⑨利用定积分定义；⑩利用中值定理；⑪利用泰勒展开式；⑫利用积分中值定理；⑬利用幂级数和函数求极限.

本章求极限所用的主要技巧有：

①有理化分子、分母；②因式分解；③加某式减某式；④乘某式除以某式；⑤拆项；⑥把幂指式翻到 e 上；⑦提因子；⑧数列极限化为函数极限**；⑨通分；⑩利用三角恒等变形公式；⑪利用代数恒等变形公式.

我们将结合例题介绍这些方法和技巧.

* 极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

(2) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ ($\lim\alpha=0$，lim 表示自变量的任一变化过程.)

** 数列极限与函数极限的关系

(1) 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,又设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域 D 中的这样一个数列,它满足 $x_n\neq x_0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(2) 设 $x_n=f(n)$,且 $f(x)$ 在 $x>0$ 时有定义,则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在的充分条件是:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在,即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} f(n)=A.$$

§1.1 "$\dfrac{0}{0}$"型未定式

一、本 节 要 点

"$\dfrac{0}{0}$"型未定式是未定式中最基本的形式,所用的求极限方法亦较多且技巧性强,宜重点复习.

求解方法主要有:

(1) 消去化零因子 (有理分式一般通过因式分解,无理分式一般通过有理化分子或分母).

(2) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及其衍生形态 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$;利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及其衍生形态 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ 等.

(3) 利用等价无穷小代换.

(4) 利用洛必达法则.

(5) 利用导数定义.

(6) 利用泰勒公式.

(7) 利用中值定理 (主要是拉格朗日中值定理).

技巧很多,在例题中逐一介绍.

若干说明:

(1) 对于用上述方法 (1)、(2)、(3) 做的题原则上都可以用洛必达法则去做,且往往是简便的. 但为了练习运算基本功,这一部分的例题我们只讲它特有的做题方法和技巧,而不用洛必达法则做了.

(2) 使用等价无穷小代换求极限时,一定要注意只能对未定式整个分子或分母或它们的因子进行代换,不可对代数和中的项分别进行代换. 此外,记住以下几个等价无穷小链,对做题是很有帮助的.

当 $x\to0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1$;$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x$;$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\neq1)$.

此处,应熟练掌握以下运算规律:

关于无穷小的阶的运算规律 (m、n 均为正整数)

设当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小,则

① 当 $m>n$ 时,$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小;

② 当 $m=n$ 时,$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 是 x 的不低于 n 阶的无穷小;

③ $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 为 x 的 $m\cdot n$ 阶无穷小;

④ 当 $m>n$ 时,$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 为 x 的 $m-n$ 阶无穷小.

关于高阶无穷小的运算规律

① $0(x^n)\pm0(x^n)=0(x^n)$;

② 当 $m>n$ 时,$0(x^m)\pm0(x^n)=0(x^n)$;

③ $0(x^m)\cdot0(x^n)=0(x^{m+n})$;

④ $0(kx^n)=0(x^n)$ $(k\neq0)$.

(3) 不管是两个重要极限以及由它们衍生出来的公式,还是上述等价无穷小链中的公式,都可以通过变量

代换而大大扩展其应用范围.例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可扩展为 $\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$，$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ 可扩展为 $\ln(1+\square)\sim\square\ (\square\to 0)$.

(4) 当表达式比较复杂时，即使用洛必达法则去求“$\frac{0}{0}$”型极限也不是易事.这时可以使用带皮亚诺余项的泰勒公式(又叫局部泰勒公式)(例6).

(5) 请熟记公式

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}).$$

此公式无论在有理式的因式分解，还是无理式的有理化方面用处都很大，甚至用它来求等比级数前 n 项和时，也比用等比级数前 n 项和公式简捷.

二、例 题 剖 析

例1 (01-2)* 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

方法 消去化零因子 $x-1$.

技巧 分子有理化、分母因式分解.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

方法 利用重要极限(一).

技巧 利用三角恒等变形.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

例3 求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}\ (x>0)$.

方法 利用重要极限(二)之变形 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

技巧 利用代数恒等变形.

解 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x^2-h^2)-\ln x^2}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln\left[1-\left(\frac{h}{x}\right)^2\right]}{-\left(\frac{h}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

方法 等价无穷小代换.

技巧 代数恒等变形.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to +0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{2}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-(1+x)^b}{x}\quad(a\neq b)$.

方法 利用 $(1+x)^\mu-1\sim\mu x$.

---

* 2001年考研试题(二)中的题.

技巧 加 1 减 1.

解 **原式**$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^b-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{x}=a-b$.

例 6 **设** $F(x)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+\pi t)-f(x)}{t^2}\cdot\ln\left(1+\dfrac{t}{x}\right)$,**其中** $f'(x)$ **存在,试求** $F(x)$.

方法 **利用导数定义.**

技巧 **代数恒等变形.**

解 $F(x)=\pi\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+\pi t)-f(x)}{\pi t}\cdot\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(x+t)-\ln x}{t}=\pi f'(x)(\ln x)'=\dfrac{\pi}{x}f'(x)$.

例 7 **求** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

方法 **利用带皮亚诺余项的麦克劳林公式.**

思路 **利用间接法展开** $e^x\sin x$ **并注意到高阶无穷小的运算法则.**

技巧 **注意到分母是** x^3,**故只需把** e^x **展开到** x^2 **项**,$\sin x$ **展开到** x^3 **项.**

解 **原式**$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+0(x^2)\right]\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+0(x^3)\right]-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{3}x^3+0(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

例 8 **求** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.

方法 ①**利用等价无穷小代换;**②**利用导数定义;**③**利用拉格朗日中值定理.**

解 1 **原式**$=\lim\limits_{x\to0}e^{\tan x}\dfrac{e^{x-\tan x}-1}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x-\tan x}=1$.

解 2 **原式**$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-e^0}{h-0}=(e^x)'|_{x=0}=1\quad(h=x-\tan x)$.

解 3 **对函数** $f(x)=e^x$ **在区间** $[\tan x,x]$ **上用拉格朗日中值定理知**

$$\text{原式}=\lim_{\xi\to0}e^{\xi}=1.$$

例 9 **求** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{x\sin^2x}$.

方法 **利用洛必达法则.**

技巧 **提出极限为已知数的因子** e^x,**等价无穷小代换后再用洛必达法则.**

解 **原式**$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x+x-2e^x+2}{x^3}\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x+e^x+1-2e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x+1-e^x}{3x^2}\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x+e^x-e^x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

例 10 **求** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

方法 **连用两次洛必达法则.**

技巧 **求** $(x^x)'$ **时把** x^x **翻到** e **上变成** $e^{x\ln x}$.

解 **原式**$\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-x^x(\ln x+1)]}{-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(\ln x+1)}{-x+1}$

$\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}(-1)\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^x\dfrac{1}{x}}{-1}=2$.

例 11 **设** $f''(x_0)$ **存在,证明**

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

思路 **第一步用洛必达法则,第二步用定义.**

技巧 **加某式减某式.**

解　原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]-[f'(x_0-h)-f'(x_0)]}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

易错辨析　洛必达法则是把极限 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ **转化为** $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$. **但转化是有条件的**. **在本题中由** $f''(x_0)$ **存在**$\Rightarrow f(x)$ **在** x_0 **的某邻域内存在一阶导数** $f'(x)$，**但却推不出** $f''(x)$ **在** x_0 **的某邻域内存在**. **所以在求到极限** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$ **时，就不能再用洛必达法则了**. **此题提醒我们：使用洛必达法则求极限一定要注意条件，不可不顾条件而滥用之！**

例 12　**求** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2/n^2}-e^{(3n+1)/n^3}}{\dfrac{1}{n^2}}$.

思路　把数列极限转化为函数极限.

方法　利用洛必达法则.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-e^{(3x^2+x^3)}}{x^2}\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4xe^{2x^2}-(6x+3x^2)e^{(3x^2+x^3)}}{2x}=-1$.

所以　原式$=-1$.

三、类题训练（§1.1）

1. **求** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.　　2. **求** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

3. **求** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n\in Z^+)$. **提示　令** $t=\sqrt[m\cdot n]{x}$.

4. **求** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.　　5. **求** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$.

6. **求** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

7. **求** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$. **提示　利用** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

8. **求** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$. **提示　利用** $(1+x)^\mu-1\sim\mu x$ **及** $e^x-1\sim x$ **作等价无穷小代换**.

9. **利用等价无穷小代换求下列极限：**①$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{\ln x}$；②$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$. **提示　令** $x-1=t$. **此外还可用两个重要极限做此题**.

10. **求** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$. **提示**　$x^x=e^{x\ln x}$.

11. **设** $f'(a)$ **存在，求** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)}{f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)\Big/n}$. **提示　可用导数定义或令** $\dfrac{1}{n}=x$ **化为函数极限但不能使用洛必达法则**.

12. **求** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

13．求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$．提示　可用洛必达法则或写 $a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$ 用麦克劳林公式（带皮亚诺余项的）．

14．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-x-\cos x}{\arcsin^2 x}$．提示　先用 x^2 代替分母中的 $\arcsin^2 x$，再把分子用带皮亚诺余项的麦克劳林公式表示出来．

15．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$．　　16．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}$．

17．求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$．

18．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a-2t)}{2t}$．提示　利用导数定义，不能用洛必达法则．

§1.2 "$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式

一、本节要点

求解方法：(1) 利用洛必达法则．(2) 消去分子、分母的无穷大主项．

二、例题剖析

例 1　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^{15}(2x+1)^{20}}{(3x-5)^{35}}$．

思路　分子、分母同乘以 $\dfrac{1}{x^{35}}$．

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{15}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{20}}{\left(3-\dfrac{5}{x}\right)^{35}}=\dfrac{2^{20}}{3^{35}}$．

例 2（97－2）*　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$．

技巧　从根号中提出 $|x|$ 或分子分母同乘以 $\dfrac{1}{x}$．

注意　算术根概念．

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$．

例 3　$\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln\tan\dfrac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$．

解　原式 $\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to1-0}\left[\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2}x}\cdot\sec^2\dfrac{\pi}{2}x\cdot\dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{-1}{1-x}}\right]=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\pi(x-1)}{\sin\pi x}\overset{(洛)}{=\!=}\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\pi}{\pi\cos\pi x}=-1$．

---

* 1997 年考研试题（二）中试题．

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$ $(\lambda,\mu>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}\xlongequal{(洛)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\mu x^{\mu-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mu x^{\mu}}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\xlongequal{(洛)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}}\xlongequal{(洛)}\cdots$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-[\mu])}{\lambda x^{[\mu]+1}\mathrm{e}^{\lambda x}x^{[\mu]+1-\mu}}=0$. 这里，$[\mu]$ 表示不超过 μ 的最大整数.

结论 此题的结论可以简述为

$$\ln x\ll x^{\mu}\ll\mathrm{e}^{\lambda x}\quad(\lambda,\mu>0;x\to+\infty).$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+\mathrm{e}^{3x})}{\ln(3+\mathrm{e}^{2x})}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\ln(2\mathrm{e}^{-3x}+1)}{2x+\ln(3\mathrm{e}^{-2x}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x}\ln(2\mathrm{e}^{-3x}+1)}{2+\dfrac{1}{x}\ln(3\mathrm{e}^{-2x}+1)}=\dfrac{3}{2}$.

三、类题训练（§ 1.2）

1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+2+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

2．求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$. **提示** 分子、分母同除以 $\sqrt{x}$.

3．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$. **提示** 分子、分母分别提出 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$.

§ 1.3 “∞ − ∞”型未定式

一、本节要点

思路 化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型.

方法 ①通分；②分子有理化；③提因子；④利用泰勒公式.

二、例题剖析

例 1 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

方法 通分后用“洛”.

技巧 尽量用等价无穷小代换局部因子.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{(洛)}2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

例 2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)$.

题型 表面上是 $\infty+\infty$，实为“$\infty-\infty$”型.

方法 ①有理化分子（分母看成 1）；②提因子.

解 1 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(a+b)-\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(-\dfrac{x+a}{x}\right)\left(-\dfrac{x+b}{x}\right)}+1}=-\frac{a+b}{2}.$$

评注 $\because x\to-\infty$,所以上边倒数第二步是用 $-\frac{1}{x}$ 乘分子、分母.此时注意,$-\frac{1}{x}\sqrt{(x+a)(x+b)}=\sqrt{\left(-\frac{1}{x}\right)^2(x+a)(x+b)}$.若用 $\frac{1}{x}$ 同乘分子、分母,则有 $\frac{1}{x}\sqrt{(x+a)(x+b)}=-\sqrt{\left(-\frac{1}{x}\right)^2(x+a)(x+b)}$.

解 2 **原式** $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-x\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}}{\frac{1}{x}},$$

再令 $t=\frac{1}{x}\to-0$ 解之.

例 3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

方法 ①提因子后用"洛";②利用泰勒展开.

技巧 变量替换.

解 1 **原式** $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to+0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$\xlongequal{(洛)}\lim_{t\to+0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

解 2 **利用泰勒展开**,$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x-x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2}+x^2\cdot 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$,

$\therefore$**原式** $=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{0\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

三、类题训练(§1.3)

1. **求** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sinh x}-\cot x\right)$. **提示** 通分后分母 $\sinh x\cdot\sin x\sim x^2$,用后者代换之再用"洛".
2. **求** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$. **方法** 通分. **技巧** 利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
3. **求** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$. **提示** 参见例 2.
4. **求** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.
5. **求** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.
6. **求** $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$. **提示** 4、5、6 题均先通分再用"洛".

§1.4 "$0\cdot\infty$"型未定式

一、本 节 要 点

思路

(1) 化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型,这是最基本做法.注意,若化为"$\frac{0}{0}$"型做不出则应改换为"$\frac{\infty}{\infty}$"型,反之亦然.

