

21 世纪高职高专系列教材

# 高等数学 分层教学教程

主 编 李 瑞(苏州工业园区职业技术学院)

主 审 卫 国(美国北卡罗莱纳大学)

副主编 宋延奎(南京师范大学)

吴焕芹

编 者 李 瑞 宋延奎 吴焕芹

翁幼珍 柳 杰

西北工业大学出版社

**【内容简介】** 本书共分 11 章,其中包括一元函数微积分学、多元函数微积分学以及线性代数、拉普拉斯变换等部分工程数学的教学内容。该教程的特点是分层教学,针对不同专业和学习基础的学生提供相应的教学内容,有利于教学和自学。书末附有希腊字母的英文读音对照表、常用数学符号的英文名称和习题答案。

本书在向读者介绍高等数学的同时,力求帮助读者建立起唯物主义的世界观,使读者能够用科学的思想方法和观点去从事科学研究和技术工作。

本教材适用于高职高专院校、成人高校的学生使用。对于普通高校的本、专科学生,也是一本很好的教学参考书。本书既可作为工科高等数学教材,也可作为经济、管理类高等数学教学用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学分层教学教程/李瑞主编. —西安:西北工业大学出版社,2004.6  
(21 世纪高职高专系列教材)

ISBN 7-5612-1757-9

I. 高… II. 李… III. 高等数学—高等学校;技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 019108 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-88493844

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西兴平市印刷厂印装

开 本:787 mm×960 mm 1/16

印 张:22.75

字 数:397 千字

版 次:2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1~5 000 册

定 价:30.00 元

# 序

高等职业教育是在我国高等教育大发展的浪潮中崛起的一个新的教育类型,是职业教育的高等阶段,是高等教育的重要组成部分。高等职业教育以培养适应生产、建设、管理、服务第一线需要的高等技术应用型专门人才为根本任务,以适应社会需要为目标,以培养技术应用能力为主线来设计教材的内容、结构和培养方案。高等职业教育由于其毕业生应具有基础理论适度、技术和应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点,因而在我国高等教育事业中占有重要的地位,在我国社会主义现代化建设事业中发挥着重要的作用。随着社会的发展、科技的进步,我国的高等职业教育必将进一步发展、壮大。

教材建设是高等学校建设的一项基本内容,培养和造就适应生产、建设、管理、服务第一线需要的高等技术应用性专门人才,要求我们必须重视高等职业教育教材改革与建设,编写和出版一批具有高等职业教育自身特色的高质量教材。

目前,我国的高等职业教育正在蓬勃发展,部分学校已经取得了一些成功的经验,并逐渐形成了自己的办学特色,但高等职业教育的教材建设明显跟不上发展的要求。针对高等职业教育教材的现状,根据教育部提出的近5年内“编写出版一批有特色的基础课程和专业主干课程教材”的工作目标,西北工业大学金叶信息技术学院和西北工业大学出版社密切配合,共同策划,在深入调查、认真研究的基础上,大胆创新,推出了一系列针对性强、难易适中、具有高等职业教育特色的教材。该系列教材具有如下特点。

## 1. 内容新颖,体现先进性

在研究国内外同类教材的基础上,汲取了有用的养料,并根据专业实际,适当介绍相关科技领域的新进展、新方法、新技术。

## 2. 体系独特,体现新观念

本系列教材以能力培养为主,所涉及的基础理论深浅适度。教材重在加强学生的基本实践能力与操作技能、专业技术应用能力与专业技能、综合实践能力与综合技能的培养,书中介绍的基础理论,以“必需、够用”为度。

## 3. 品种多样,体现全面性

本系列教材将教科书、教学参考书、实验教材和视听教材配套,便于教师教学,也便于学生自学。

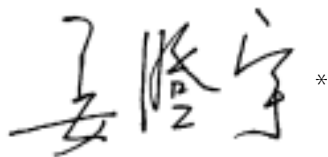
## 4. 作者实力强大,体现高水平

西北工业大学金叶信息技术学院一直注重培养与高职教育相适应的“双师型”的教师队伍。本系列教材的作者均具有多年的施教经验,现在仍活跃在教学第一线。

## 5. 编写形式多样,体现新思路

网络化、电子化、数字化是当今社会的特色,本系列教材倡导电子讲稿和多媒体课件的配套出版,以给作者和读者提供一个更加广阔的发展空间。

该系列教材首批推出 12 种,所有书稿几经修改,并经同行专家审定,内容选材新颖、实用,重在对本概念的启发、理解和提高高职生分析问题、解决问题的能力,因而我热情地向大家推荐这一系列教材,希望它能对广大读者的学习有所帮助,更期望它能在强化素质教育、推动高等职业教育方面起到积极的作用。

A handwritten signature in black ink, reading '姜澄宇' (Jiang Zhengyu), followed by a small asterisk symbol.

2003 年 1 月

---

\* 姜澄宇,西北工业大学校长,教授,博士生导师。

# 21 世纪高职高专系列教材 编委会

- 顾 问 姚书志(陕西省教育厅高教处处长)  
王润孝(西北工业大学党委副书记、副  
校长)
- 主任委员 张 渤(西北工业大学金叶信息技术学  
院副院长)
- 副主任委员 冯学廉  
张近乐(西北工业大学出版社社长)
- 委 员 宋金书 张水平 张会生 辛 柯  
安德利 高光涛 褚泓阳 张 云  
李 辉

# 前 言

本书是 21 世纪高职高专系列教材之一,它是根据教育部对高职高专的教育目标和高等数学的教学要求而编写的。

目前,高职高专院校的高等数学教材仍处于改革和探索之中。面对新专业的不断涌现以及学生学习基础的参差不齐,高等数学教师在教学过程中碰到了前所未有的困难。面对这样的局面,苏州工业园区职业技术学院从 2002 年起,在副院长王颖教授的指导下,开展了分层教学的教学研究,其中包括两个方面:一是针对专业需要,从数学教学上分出三个层次:1. 管理类,2. 机电类,3. 信息类;二是针对学生的学习基础,与其按统一的教学标准要求全体学生,导致一部分学习基础差的学生放弃学习,还不如对学生进行分层管理,对基础差的学生在教学要求上降一个台阶,让他们也能上得去、有成就感,从而能学到一定的知识。于是按专业把学生大体上分为三个层次:1. 其就业领域对高等数学的知识要求不高的专业,如现代物流和商务管理等;2. 对高等数学知识有一定要求的专业,如机械类(精密、模具)等;3. 一些对高等数学(包括工程数学)知识要求较高的专业,如信息类(通讯、光电)等。针对不同专业及层次的学生,按照不同的教学标准进行教学和管理。对于同一专业的学生,实行分层不分班,即同堂上课,分别要求和管理。

本书几乎涵盖了高职高专院校所需的数学内容,适用于高职高专院校及成人高校的学生使用。全书共分三个部分:一元函数微积分、多元函数微积分和工程数学,共 11 章。各章之间既相互独立,又有内在的联系。本书的篇幅写到大专的程度,但又细分出不同专业及层次所需要的教学内容。各专业可根据自己的实际教学需要灵活选取、组合所需章节。例如,管理类只讲一元函数微积分,有些专业可以不讲目录中打星号的内容。我们在每章开头先明确对不同层次学生的基本教学要求(把学生按其专业要求及学习基础从低到高分成 B, A, A<sup>+</sup> 三个层次),把教学材料分为基本内容、一般内容和提高内容三个部分,其中把基本内容和一般内容放在一块编排,在每节的“本节提示”中,说明主要教学内容或对不同层次学生的具体教学要求。另外用与正文不同的字体编排提高部分的内容作为选学内容,此外提高部分还包括书中打星号的章节,例如,\*6.5 方向导数与梯度等。教师可根据教学对象选讲或不讲。

习题部分也作了相应的编排,分为基本题、一般题、提高题三部分。其中,基本题是要求 B 级学生必须掌握的教学内容;基本题和一般题是要求 A 级学生应该掌握的教学内容;提高题是留给 A<sup>+</sup> 级学生做的题目,这类题目属于选学或有教学难度的内容,教师可灵活掌握是否让学生做这个部分的题目。总的来说,习题数量不多,难度适中,目的是给教师有更大的教学自由度,让学生通过做精选过的为数不多的题目,就能掌握基本教学要求的概念和方法。

本书在保持数学课程的系统性、逻辑性的基础上,适当地介绍了一些数学在工业、农业、航天、军事等现代科技生活中的应用,引导学生学数学、爱数学,增强学生用数学的意识。本书还试图通过高等数学的教学,拓展学生的思维,使读者能够用科学的思想方法和观点去从事技术工作。

本书涉及的许多数学词汇,我们都给出了英文注释,帮助学生从源头上理解有关的概念。如导数,英文为 derivative,而原函数则是 anti-derivative,即反导数。又如自然对数的英文是 natural logarithm function,因此它的数学符号是  $\ln x$ ,即  $\log_e x$ 。此外,熟悉了这些英文词汇后,有助于我们的学生(未来的高级技术工人)读懂有关的英文作业指导书或说明书中的有关概念,例如平行度、对称度等。这一点对从事技术性较强的工科学生是比较重要的。

在本书的编写过程中,得到了苏州工业园区职业技术学院院长单强教授的指导与支持,在此,我们对单强院长表示衷心的感谢!

北京航空航天大学李心灿教授要求我们组织少而精的队伍把本书写好,并提供了许多实例和丰富的材料,我们谨向李教授表示深深的谢意!

美国北卡罗莱纳大学彭布罗克分校(The University of North Carolina at Pembroke)概率论与统计学博士卫国先生细心地审阅了书稿,修正了英文注释,并提供了许多非常有意义的资料和例子,大大地丰富了教材内容。在此对他表示特别的感谢!

西北工业大学出版社社长张近乐先生对本书的出版给予大力支持,在此深表谢意!

本书第 1,3,7,10,11 章由李瑞副教授编写,并为全书编配了习题及答案;第 2,8,9 章由宋延奎副教授编写;第 4,5,6 章由吴焕芹副教授编写;翁幼珍、柳杰老师对全书进行了校对并提供了一些有用的素材。

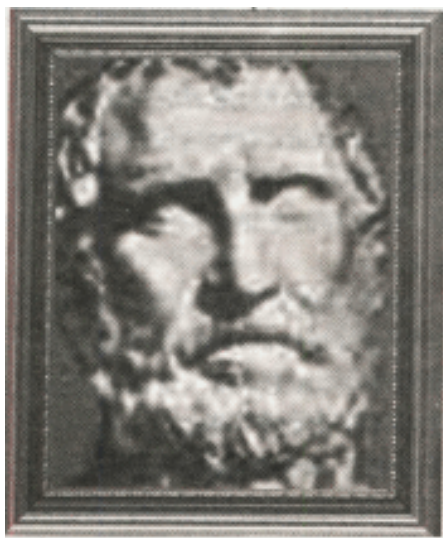
由于作者水平有限,谬误之处在所难免,敬请读者及专家同行不吝斧正,以便使我们不断地完善本教程,为我国高等职业教育事业做出贡献。

编者

2004 年 3 月于苏州

“数学中的转折点是笛卡儿的变数,有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了。”

——恩格斯



芝诺(Zeno, 约公元前 495—435 年),希腊哲学家、数学家

“大圆的面积是我的知识,小圆的面积是你的知识.我的知识比你们多.但是,这两个圆圈的外面就是你们和我无知的部分.大圆圈的周长比小圆圈的周长更长,因而我接触的无知的范围比你们更大.这就是我为什么常常怀疑自己的知识的原因。”

——芝诺

芝诺生于意大利半岛南端的埃利亚(Elea).据说他是一个自学成才的乡村孩子,后来成了哲学家巴门尼德(Parmenides,约公元前 460 年)的门徒,是埃利亚学派的代表人物.

——摘自李心灿教授的《微积分的创立者及其先驱》

# 高等数学简介

高等数学是大多数大专院校各专业开设的一门公共基础课。在大学的数学系里,大学生要学习数学分析、高等代数、解析几何、常微分方程、拓扑学、实变函数、复变函数、偏微分方程等一二十门课程。虽然面向非数学系学生的高等数学只讲大学数学系课程中的一部分教学内容,但这些内容却涉及上述课程的许多方面,而且对一定的内容(应用方面)还要求强化训练。

高等数学要研究什么问题?

大家知道,在初等数学里面,我们会研究这样的问题:如果一辆汽车用 3.5 h 行驶了 245 km 路程,那么由初等代数容易求得该车的平均时速为  $v = 245 \text{ km} \div 3.5 \text{ h} = 70 \text{ km/h}$ 。这里,时间、距离、速度都是常量。初等数学研究的对象是常量。

然而在行驶过程中,汽车的速度是时常改变的,速度表上显示的速度不一定是 70 km/h,有时可能是 50 km/h,有时却可能是 100 km/h,或者是其他数值。

假如我们知道汽车在每一时刻的位置,即是说已知位置函数  $s(t)$ ——这里  $t$  是时间变量,如何确定它在任一时刻的速度  $v(t)$  呢?这里涉及微分学中的一个基本概念:导数(derivative),也就是物理学上求瞬时速度(instantaneous velocity)的问题,或在几何上,求函数图形在一点的切线斜率(slope of tangent line)。在微分学中,函数  $v(t)$  叫做函数  $s(t)$  的导函数或简称为导数。从函数  $s(t)$  计算导函数  $v(t)$  的过程称做求导(微分)。

让我们继续考虑上述问题。若我们知道的是汽车在每一时刻的速度,也就是说已知速度函数  $v(t)$ ,又如何确定它在任一时刻的位置  $s(t)$  呢?这是前面问题的一个逆问题。为了解决这样的问题并找到位置函数  $s(t)$ ,我们将介绍另一个叫做积分的概念(运算),积分是积分学中最基本的概念。在积分学中, $s(t)$  叫做  $v(t)$  的一个原函数(anti-derivative)。从函数  $v(t)$  求原函数  $s(t)$  的计算过程叫做求积(积分)。积分运算实际上是求一个函数,使它的导函数恰是给定的函数,因而积分运算是微分运算的逆运算。积分概念也最早来源于求平面图形的面积和立体图形的体积。

微分学和积分学统称为微积分学。我们将看到微分和积分这两个核心概念(运算)被微积分基本定理巧妙而深刻地联系在一起;它表明微分和积分是两个互逆的运算。值得注意的是,上述  $s(t)$  和  $v(t)$  都是随时间  $t$  而变化的量,故这里所研究的是变量与变量之间的关系。高等数学要研究的问题是不断变化着的量与量之间,即变量之间的关系问题。因此,高等数学研究的对象是变量,处理问题的思想方法是用变化(或运动)的观点去分析、去研究、去解决问题。读者将会在高等数学这门课程中反复体会到这个思想方法的运用。

数学分析(微积分是其基本部分),拓扑学(也就是由研究物体几何形状的几何学发展而成的点集几何学)和抽象代数(线性代数是其一部分,另外还包括群、环、域、理想、模的结构等)是现代数学的三大基础。另一方面,这三个数学分支之间又是紧密相关和相互影响的,当你在用数学的方法建立模型、求解模型并最终解决一个应用问题的时候,你将会真正地体会到这一点。几何的基本知识对进一步学习微积分(特别是多元函数微积分学)是必要的,并且这些基本知识在整个数学中也扮演着重要角色。类似地,代数的基本方法和结果一是使用微积分解决应用问题的必要工具,二是它们在全部数学中扮演着基础的角色,起着独特的作用。

常微分方程和积分变换是比微积分更高层次的独立课程,属于叫做工程数学的范围,其中我们将会看到微积分在许多工程问题上有很好的、成功的应用,我们也会看到解决实际问题的思想是直接地、紧密地和成功地与微积分相联系。线性代数也是属于工程数学的一门独立的课程,它为了解决实际问题提供了必要的代数方法和工具。把无穷级数化归为工程数学是因为许多工程问题的解通常以种种无穷级数的形式表现。

具有上述内容的一本书叫做高等数学是因为它(或多或少地)覆盖了数学的三大基础和工程数学的几个分支。

高等数学的核心教学内容主要由两部分组成:微分学和积分学(differential calculus and integral calculus),简称微积分学,所以与高等数学相应的英美教材名称是 CALCULUS(微积分学)。微积分在现代科技生活中有着广泛的应用。例如,牛顿(Newton)的三大运动定律可以用微分方程的形式来表达。这些定律改变了人们对宇宙的认识方式。再如,麦克斯韦(Maxwell)微分方程组(或积分方程组)是对电磁场结构和电磁场理论的最优美和最准确的一个描述。高等数学的教学范围也包括一定的工程数学内容。

高等数学教学的意义,不仅在于能给读者提供一个从事专业课程学习及进行科学研究的工具,而且更为重要的是它能够向读者提供一种思维方式(甚

至是哲学层面的东西,例如物质、时空的概念),开拓读者的思维,帮助读者建立起唯物主义的世界观,使读者能够用科学的思想方法和观点去从事科学研究和技术工作。

通过高等数学的学习,可以培养读者的抽象思维能力、空间想像能力,养成办事具有条理性的习惯,使学习者享用终生。

# 目 录

## 第一部分 一元函数微积分学

第 1 章 函数的极限与连续性	3
1.1 初等函数回顾	4
1.2 数列的极限	13
1.3 函数的极限	17
1.4 无穷小与无穷大	22
1.5 极限运算法则	26
1.6 两个重要极限与无穷小的比较	30
1.7 函数的连续性	36
第 2 章 导数及其应用	43
2.1 导数的概念	44
2.2 函数的求导法则(一)	50
2.3 函数的求导法则(二)	57
2.4 函数的微分	62
2.5 中值定理与洛必达法则	67
2.6 函数的极值	75
2.7 曲线的凹凸性与作图	79
第 3 章 不定积分	84
3.1 不定积分的概念	85
3.2 凑微分法	90
3.3 变量代换法	95

3.4	分部积分法 .....	100
* 3.5	积分方法小结 .....	105
<b>第 4 章</b>	<b>定积分及其应用</b> .....	<b>110</b>
4.1	定积分的概念与性质 .....	111
4.2	微积分基本定理 .....	115
4.3	定积分的换元积分法与分部积分法 .....	119
4.4	广义积分 .....	122
4.5	定积分在几何上的应用 .....	128

## 第二部分 多元函数微积分学

<b>第 5 章</b>	<b>空间解析几何</b> .....	<b>135</b>
5.1	空间直角坐标系与向量的概念 .....	136
5.2	向量的坐标表示式与运算 .....	140
5.3	平面与空间直线方程 .....	144
5.4	二次曲面与空间曲线 .....	149
<b>第 6 章</b>	<b>多元函数微分学</b> .....	<b>155</b>
6.1	多元函数的基本概念 .....	156
6.2	偏导数与全微分 .....	160
6.3	多元复合函数及隐函数的求导法 .....	164
* 6.4	偏导数的几何应用 .....	169
* 6.5	方向导数与梯度 .....	172
* 6.6	多元函数的极值 .....	177
<b>第 7 章</b>	<b>多元函数积分学</b> .....	<b>182</b>
7.1	二重积分的概念与性质 .....	183
7.2	二重积分的计算法 .....	185
* 7.3	三重积分的计算法 .....	193

* 7.4	对弧长的曲线积分 .....	197
* 7.5	对坐标的曲线积分 .....	201
* 7.6	格林公式及其应用 .....	206

## 第三部分 工程数学

<b>第 8 章</b>	<b>无穷级数 .....</b>	<b>215</b>
8.1	常数项级数的概念与性质 .....	216
8.2	常数项级数的审敛法 .....	220
8.3	函数项级数与幂级数 .....	226
8.4	函数展开成幂级数 .....	232
* 8.5	傅里叶级数 .....	236
* 8.6	正弦级数与余弦级数 .....	239
* 8.7	周期为 $2l$ 的函数展开成傅里叶级数 .....	244
<b>第 9 章</b>	<b>常微分方程 .....</b>	<b>247</b>
9.1	常微分方程的基本概念 .....	248
9.2	一阶线性微分方程 .....	253
9.3	二阶常系数线性微分方程 .....	257
<b>第 10 章</b>	<b>线性代数 .....</b>	<b>264</b>
10.1	行列式的定义及性质 .....	265
10.2	克莱姆法则 .....	271
10.3	矩阵及其运算 .....	275
10.4	逆矩阵与矩阵的秩 .....	281
10.5	初等变换 .....	284
10.6	线性方程组的求解问题 .....	288
<b>第 11 章</b>	<b>拉普拉斯变换 .....</b>	<b>296</b>
11.1	拉普拉斯变换的概念 .....	297

11.2	拉普拉斯变换的性质	301
11.3	拉普拉斯逆变换	305
11.4	拉普拉斯变换的应用	308
附录		313
附录 I	常用积分表	313
附录 II	拉氏变换的性质	316
附录 III	常用函数的拉氏变换公式	317
附录 IV	希腊字母的英文读音对照表	318
附录 V	常用数学符号的英文名称	319
习题答案		320
参考文献		344

# 第一部分

## 一元函数微积分学



牛顿(Newton, Isaac, 1642—1727年),英国数学家、物理学家、天文学家

“如果我之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩膀上的缘故。”

——牛顿

牛顿出身于农民家庭，幼年颇为不幸：他是一个遗腹子，又是早产儿，3岁时母亲改嫁，把他留给外祖父母，从小过着贫困孤苦的生活。他在条件较差的地方学校接受了初等教育，中学时也没有显示出特殊的才华。1661年考入剑桥大学三一学院，由于家庭经济困难，学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费。由于他学习勤奋，并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导，认真钻研了加利略、开普勒、沃利斯、笛卡儿、巴罗等人的著作，还做了不少实验，打下了坚实的基础，1665年获学士学位。

1665年，伦敦地区流行鼠疫，剑桥大学暂时关闭。牛顿回到伍尔索普，在乡村幽居的两年中，终日思考各种问题、探索大自然的奥秘。他平生三大发明，微积分、万有引力定律、光谱分析，都萌发于此，这时他年仅23岁。后来牛顿在追忆这段峥嵘的青春岁月时，深有感触地说：“当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时期更专心致志于数学和科学。”并说：“我的成功当归功于精力的思索。”“没有大胆的猜想就作不出伟大的发现。”

牛顿临终时说：“我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过像一个在海边玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无崖的真理的大海，却还在我面前未曾被我发现。”

——摘自李心灿教授的《微积分的创立者及其先驱》