

高等数学大讲堂 同步版

(配同济大学·高等数学四、五版)

王丽燕 编著

大连理工大学出版社

© 大连理工大学出版社 2004

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大讲堂·同步版 / 王丽燕编著. —大连: 大连理工大学出版社, 2004. 9

ISBN 7-5611-2646-8

I. 高… II. 王… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086918 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:17.75 字数:660千字

印数:1~8 000

2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

责任编辑:吴孝东

责任校对:高继巍

封面设计:佟涤菲

定 价:22.80元

致读者的一封信

——代前言

亲爱的读者朋友：

您好！

当您打开本书时，我已在默默地感谢您了，感谢您对我的信任与支持！在这里我想对信任与支持我的读者朋友们说点心里话。

我刚过四十，是一名数学博士，从事高等数学教学已有二十个年头，从这个意义上说，我已是个“老”教师了。从我自身的学习体会及教学经验，我认为，学好高等数学的关键不是做了多少道难题，而是要真正掌握其基础知识，这是你的内力！如果你缺乏这种内力，就永远发不出功来，学好高等数学只能成为你的一种奢望和梦想。教学大纲和考研大纲都要求“基本概念、基本理论、基本方法”就是这个原因。

2000年，我曾与浙江大学秦禹春教授合编了我的第一本高等数学辅导书——《高等数学全程学习指导》。此书出版后，没曾想得到广大读者的普遍喜爱，许多同行都告诉我，他们那里的学生几乎人手一册，成为许多高校“指定”的必备书。经数次修订，发行总量已超过十万册。

目前书店里关于高等数学方面的辅导书很多，但大都忽略了“基础”。我曾遇到一位学生，手里拿着一大摞考研辅导书，整天钻研，但连续三年考研都名落孙山。经过交谈，我很快发现，他的问题就出在“基础”太差。我让它扔掉所有的辅导书，跟我听课，从“基础”入手，结果在今年的考研中取到了令他自己都意想不到的高分，并顺利地考上了一所很好的大学的研究生。

《高等数学全程学习指导》，以章为单位组织结构，更多地考虑到了期中、期末的复习。教学中学生普遍反映没有一本“同步辅导”的参考书。因此，借博士答辩结束，博士后尚未入站的一段时间，动笔写成此书。落脚点就在“基础、同步”上。

你读完这本书，必将感到再难的数学题也都是基础知识的有机堆积，期末考试将不在话下，考研题也不再可怕，甚至可以轻松作答！

本书的每一章都分为宏观调控和微观精讲两大板块。宏观调控部分包括“为你导航”、“知识脉络”和“应记应背”三部分。“为你导航”介绍本章的主要内容所在的章节、相互联系、重点难点等；“知识脉络”则将本章的知识以及相互联系用图的形式直观展现，一目了然；“应记应背”是将那些在学习的过程中常用，应该背住的公式集中列出，理解并记住这些公式将大大提高你的解题效率。这些内容将指导大家如何总结、精炼与提高，是学习中的“由多到少”的过程。微观精讲则细致到每一章节，除指出该掌握的基本知识外，还告诉大家应该注意之处，让大家更透彻、深入地理解基本概念、基本理论，这是对课堂的补充，是“弦外之音”。本部分还强调了大家普遍容易出错之处、出错原因以及怎样才能避免出错。对于基本计算则给出了做题的具体步骤。许多读者都觉得基本知识都懂，就是不会做题，这实质上还是基础知识差的表现。为了解决这一问题，我们对典型例题进行了剖析，通过剖析来指导读者如何分析问题和解决问题。每一节配备了少量的自我测试题，是为读者进一步巩固提高而设的，你还可以通过每一章后的单元测验，检验一下自己掌握本章内容的程度，少量的“*”题是献给挑战者们的。每一章都构成了完备的知识体系和几乎全部的题型。这是一个“由少到多”的过程。

高等数学一般都是几个小班的合堂课，任课教师除了上几门课外还要进行一定的科研工作，他们大多没有精力对学生作业进行全批全改，为了方便读者对照和分析自己完成作业的情况，本书几乎给出了《高等数学》(同济大学四、五版)书中全部习题的解。为方便读者使用本书，“教材重要习题解析”部分的题号仍以第四版的序号编

排,第五版的题号标在括号内。由于有详细的原题,练习和对照都很方便。

为了能将平日的学习与考研有机联系,书中有针对性地选用了大量考研真题,并采用“年代/类别/分值”的标注方式,如“040106”说明此题是2004年数学一的考题,分值6分。

本书虽然按同济大学编《高等数学》第四版的章节顺序编写,但自成体系。无论你学的是何种版本的教材,本书都可以给你有力的指导。

本书内容是我本课教学二十余年的经验积累,在考研第一轮辅导班也讲过,反响很好,学员们觉得自己进步很大,成绩提高很快。

如果本书对你确有帮助,希望你能告诉你的同学和学弟学妹们,让他们也尽快摆脱困境,与你共同进步。如果你发现了本书的错误或不足之处,希望你能通过出版社转告我,或直接与我联系,我将十分感谢你,正是因为你而使我不断提高!

限于编者的水平,本书观点必存不成熟之处,诚恳期望同行和读者不吝批评指正,共同进步!最后祝愿各位读者学习进步,学业有成!

王丽燕

2004年6月

目 录

第一章 函数与极限

为你导航/1	本章知识脉络图/2	应记应背/3
第一节 函数		
助学/3	教材重要习题解析/5	自我测试/6
第二节 初等函数		
助学/7	教材重要习题解析/8	自我测试/11
第三节 数列的极限		
助学/12	教材重要习题解析/12	自我测试*
第四节 函数的极限		
助学/14	教材重要习题解析/16	自我测试/18
第五节 无穷小与无穷大		
助学/18	教材重要习题解析/19	自我测试*
第六节 极限运算法则		
助学/20	教材重要习题解析/22	自我测试/23
第七节 极限存在准则	两个重要极限	
助学/24	教材重要习题解析/26	自我测试/28
第八节 无穷小的比较		
助学/29	教材重要习题解析/30	自我测试/31
第九节 函数的连续性与间断点		
助学/32	教材重要习题解析/34	自我测试/36
第十节 连续函数的运算和初等函数的连续性		
助学/36	教材重要习题解析/37	自我测试/38
第十一节 闭区间上连续函数的性质		
助学/39	教材重要习题解析/40	自我测试/41
总习题解析/41	单元测试/47	

第二章 导数与微分

为你导航/49	本章知识脉络图/50	应记应背/50
第一节 导数的概念		
助学/52	教材重要习题解析/54	自我测试/57
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则		
助学/58	教材重要习题解析/58	自我测试/60
第三节 反函数的导数及复合函数的求导法		
助学/60	教材重要习题解析/62	自我测试/65
第四节 初等函数的求导法 双曲与反双曲函数的导数		
助学/65	教材重要习题解析/65	自我测试/67

第五节 高阶导数		
助学/67	教材重要习题解析/68	自我测试/70
第六节 隐函数的导数	由参数方程所确定的函数的导数	相关变化率
助学/70	教材重要习题解析/73	自我测试/77
第七节 函数的微分		
助学/77	教材重要习题解析/79	自我测试/80
第八节 微分在近似计算中的应用		
助学/80	教材重要习题解析/80	自我测试/84
总习题解析/84	单元测试/89	
第三章 中值定理与导数的应用		
为你导航/91	本章知识脉络图/92	应记应背/92
第一节 中值定理		
助学/93	教材重要习题解析/97	自我测试/100
第二节 洛必达法则		
助学/101	教材重要习题解析/103	自我测试/105
第三节 泰勒公式		
助学/106	教材重要习题解析/108	自我测试/112
第四节 函数单调性的判定法		
助学/113	教材重要习题解析/115	自我测试/118
第五节 函数的极值及其求法		
助学/118	教材重要习题解析/120	自我测试/122
第六节 最大值、最小值问题		
助学/122	教材重要习题解析/124	自我测试/127
第七节 曲线的凹凸与拐点		
助学/128	教材重要习题解析/129	自我测试/132
第八节 函数图形的描绘		
助学/132	教材重要习题解析/133	自我测试/134
第九节 曲率		
助学/135	教材重要习题解析/135	自我测试/137
第十节 方程的近似解		
助学/137	教材重要习题解析/137	自我测试*
总习题解析/138	单元测试/146	
第四章 不定积分		
为你导航/148	本章知识脉络图/149	应记应背/149
第一节 不定积分的概念和性质		
助学/150	教材重要习题解析/152	自我测试/153
第二节 换元积分法		
助学/154	教材重要习题解析/157	自我测试/159
第三节 分部积分法		
助学/160	教材重要习题解析/163	自我测试/166

第四节 几种特殊类型的函数的积分		
助学/167	教材重要习题解析/170	自我测试/174
第五节 积分表的应用		
助学/175	教材重要习题解析*	自我测试*
总习题解析/175	单元测试/182	
第五章 定积分		
为你导航/183	本章知识脉络图/184	应记应背/184
第一节 定积分的概念		
助学/184	教材重要习题解析/186	自我测试/188
第二节 定积分的性质	中值定理	
助学/188	教材重要习题解析/190	自我测试/191
第三节 微积分基本公式		
助学/191	教材重要习题解析/194	自我测试/197
第四节 定积分的换元法		
助学/198	教材重要习题解析/201	自我测试/204
第五节 定积分的分部积分法		
助学/205	教材重要习题解析/207	自我测试/209
第六节 定积分的近似计算/209		
第七节 广义积分		
助学/209	教材重要习题解析/211	自我测试/213
第八节 广义积分的审敛法 Γ -函数		
助学*	教材重要习题解析/214	自我测试*
总习题解析/215	单元测试/223	
第六章 定积分的应用		
为你导航/225	本章知识脉络图/226	应记应背/226
第一节 定积分的元素法		
助学/228	教材重要习题解析/	自我测试*
第二节 平面图形的面积		
助学/229	教材重要习题解析/232	自我测试/236
第三节 体积		
助学/237	教材重要习题解析/240	自我测试/244
第四节 平面曲线的弧长		
助学/245	教材重要习题解析/246	自我测试/248
第五节 功、水压力和引力		
助学/248	教材重要习题解析/251	自我测试/255
第六节 平均值		
助学/256	教材重要习题解析/256	自我测试*
总习题解析/258	单元测试/261	
第七章 空间解析几何与向量代数		
为你导航/262	本章知识脉络图/263	应记应背/263

第一节 空间直角坐标系		
助学/266	教材重要习题解析/267	自我测试/267
第二节 向量及其加减法 向量与数的乘法		
助学/268	教材重要习题解析/269	自我测试/269
第三节 向量的坐标		
助学/270	教材重要习题解析/271	自我测试/272
第四节 数量积 向量积 混合积		
助学/272	教材重要习题解析/274	自我测试/277
第五节 曲面及其方程		
助学/277	教材重要习题解析/278	自我测试/279
第六节 空间曲线及其方程		
助学/279	教材重要习题解析/280	自我测试/282
第七节 平面及其方程		
助学/282	教材重要习题解析/284	自我测试/285
第八节 空间直线及其方程		
助学/286	教材重要习题解析/291	自我测试/295
第九节 二次曲面		
助学/296	教材重要习题解析/296	自我测试*
总习题解析/297	单元测试/303	
第八章 多元函数微分法及其应用		
为你导航/305	本章知识脉络图/306	应记应背/306
第一节 多元函数的基本概念		
助学/307	教材重要习题解析/308	自我测试/310
第二节 偏导数		
助学/311	教材重要习题解析/313	自我测试/314
第三节 全微分及其应用		
助学/315	教材重要习题解析/317	自我测试/318
第四节 多元复合函数的求导法则		
助学/319	教材重要习题解析/321	自我测试/324
第五节 隐函数的求导公式		
助学/325	教材重要习题解析/326	自我测试/328
第六节 微分法在几何上的应用		
助学/329	教材重要习题解析/331	自我测试/332
第七节 方向导数与梯度		
助学/333	教材重要习题解析/335	自我测试/336
第八节 多元函数的极值及其求法		
助学/337	教材重要习题解析/340	自我测试/342
第九节 二元函数的泰勒公式		
助学/343	教材重要习题解析/343	自我测试*
第十节 最小二乘法		

助学/344	教材重要习题解析*	自我测试*
总习题解析/344	单元测试/350	
第九章 重积分		
为你导航/352	本章知识脉络图/353	应记应背/353
第一节 二重积分的概念与性质		
助学/354	教材重要习题解析/357	自我测试/358
第二节 二重积分的计算法		
助学/359	教材重要习题解析/363	自我测试/367
第三节 二重积分的应用		
助学/368	教材重要习题解析/371	自我测试/373
第四节 三重积分的概念及其算法		
助学/374	教材重要习题解析/375	自我测试/376
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分		
助学/377	教材重要习题解析/381	自我测试*
第六节 含参变量的积分		
助学/386	教材重要习题解析*	自我测试*
总习题解析/386	单元测试/394	
第十章 曲线积分与曲面积分		
为你导航/395	本章知识脉络图/396	应记应背/396
第一节 对弧长的曲线积分		
助学/398	教材重要习题解析/401	自我测试/403
第二节 对坐标的曲线积分		
助学/404	教材重要习题解析/406	自我测试/409
第三节 格林公式及其应用		
助学/410	教材重要习题解析/415	自我测试/418
第四节 对面积的曲面积分		
助学/419	教材重要习题解析/421	自我测试/423
第五节 对坐标的曲面积分		
助学/424	教材重要习题解析/426	自我测试/427
第六节 高斯公式 通量与散度		
助学/428	教材重要习题解析/432	自我测试/433
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度		
助学/434	教材重要习题解析/437	自我测试/438
总习题解析/439	单元测试/448	
第十一章 无穷级数		
为你导航/450	本章知识脉络图/451	应记应背/451
第一节 常数项级数的概念和性质		
助学/453	教材重要习题解析/455	自我测试/457
第二节 常数项级数的审敛法		
助学/458	教材重要习题解析/462	自我测试/464

第三节 幂级数		
助学/465	教材重要习题解析/469	自我测试/471
第四节 函数展开成幂级数		
助学/472	教材重要习题解析/473	自我测试/476
第五节 函数的幂级数展开式的应用/477		
第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质/477		
第七节 傅里叶级数		
助学/477	教材重要习题解析/479	自我测试/482
第八节 正弦级数和余弦级数		
助学/482	教材重要习题解析/484	自我测试/486
第九节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数		
助学/486	教材重要习题解析/487	自我测试/490
第十节 傅里叶级数的复数形式/490		
总习题解析/490	单元测试/498	
第十二章 微分方程		
为你导航/500	本章知识脉络图/501	应记应背/501
第一节 微分方程的基本概念		
助学/502	教材重要习题解析/502	自我测试*
第二节 可分离变量的微分方程		
助学/503	教材重要习题解析/504	自我测试/507
第三节 齐次方程		
助学/508	教材重要习题解析/509	自我测试/510
第四节 一阶线性微分方程		
助学/511	教材重要习题解析/514	自我测试/518
第五节 全微分方程		
助学/519	教材重要习题解析/521	自我测试/524
第六节 欧拉-柯西近似法/525		
第七节 可降阶的高阶微分方程		
助学/525	教材重要习题解析/527	自我测试/530
第八节 高阶线性微分方程		
助学/531	教材重要习题解析/531	自我测试*
第九节 二阶常系数齐次线性微分方程		
助学/532	教材重要习题解析/534	自我测试/536
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程		
助学/537	教材重要习题解析/540	自我测试/544
第十一节 欧拉方程		
助学/544	教材重要习题解析/545	自我测试/549
总习题解析/550	单元测试/554	

注 标“*”的部分内容省略。

第一章 函数与极限

为你导航

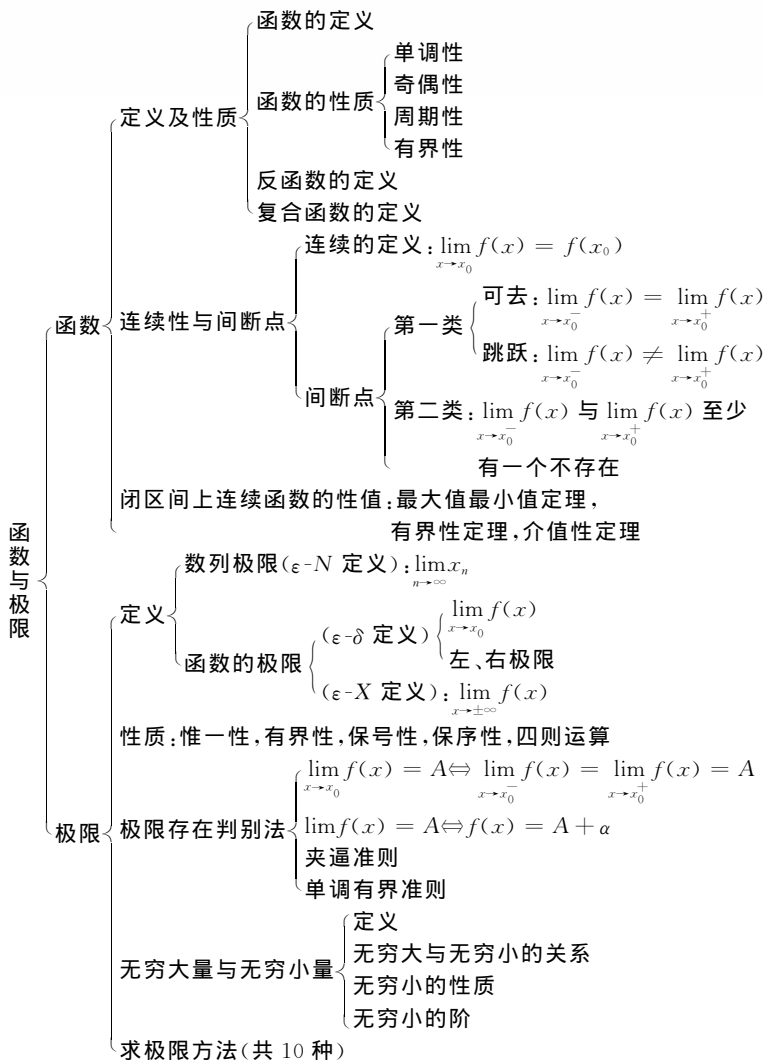
本章的第一节和第二节内容主要是复习中学数学已学过的知识,重点在于理解函数的概念,并了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性,对于中学数学中没有学过而又是本章的一个难点的有界性,我们将在本书的第一节作详细的讲解。在第二节中提到的复合函数、初等函数的概念是本章的第二个重点与难点内容,准确地进行复合函数的复合与分解是进一步学习复合函数的导数与积分的前提。

第三节至第五节都属于介绍极限概念的内容,要求加深理解,要了解极限的性质,在考研中常出现用保号性定理确定有无极值的问题(参见第三章第五节例3),但新大纲并不要求做给出 ϵ 求 N 或 δ 的习题。

第六、七节重在介绍计算极限的方法,本章共总结出十种方法供读者参考,第八节介绍的利用等价无穷小代换求极限也在其中,当然高阶无穷小与等价无穷小的概念也很重要。

第九节至第十一节是函数的连续性问题,要理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念,了解函数间断点的概念,会判断间断点的类型,了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理。

本章知识脉络图



应记应背

1 初等函数恒等式

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad (f[f^{-1}(x)] = x)$$

2 常用极限公式

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

3 常用的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$,
 $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1+x)^a - 1 \sim ax$, $a^x - 1 \sim x \ln a$.

第一节 函 数

助学

函数与反函数的概念,以及函数的单调性、奇偶性、周期性等在中学数学中就已经很熟悉了,这里不再赘述,我们重点讲函数的有界性。

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在数 k , 对于所有的 $x \in X$, 恒有

$$f(x) \leq k \quad (f(x) \geq k)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的。如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界, 则称它在 X 上有界, 否则称它在 X 上无界。

假设 $f(x)$ 在 X 上有上界 k_1 , 下界 k_2 , 即 $k_2 \leq f(x) \leq k_1$, 取 $M = \max\{|k_1|, |k_2|\}$, 则必有 $|f(x)| \leq M$. 反之, 若存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 这说明 $f(x)$ 有上界 M 和下界 $-M$. 由此可得函数 $f(x)$ 在 X 上有界的一个充要条件是: 存在一个正数 M , 使得对于所有的 $x \in X$, 总有

$$|f(x)| \leq M$$

函数有界性的几何意义: 假设 $X = [a, b]$, $f(x)$ 在 X 上有界是指一定存在两条直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$, 使曲线 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 夹在直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$ 之间 (参见图 1-1), 否则就是无界。

例如 $y = \sin x$.

由于 $|\sin x| \leq 1$ (参见图 1-2), 所以函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

又如 $y = \frac{1}{x}$.

由于 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内, 有 $0 < \frac{1}{x} < 1$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界。但在 $(0, 1]$ 内却是无界的 (参见图 1-3)。

因为对于任意的 $M > 0$ (无论它多么大), 总存在 $x_0 = \frac{1}{2M} \in (0, 1]$, 使得 $y(x_0) = 2M > M$, 即不存在直线 $y = k_1$, 使曲线 $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\}$ 在直线 $y = k_1$ 和 $y = 1$ 之间。

由于 $\frac{1}{x} \geq 1 (x \in (0, 1])$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上是有下界的, 无界的原因是没有上界。

同样 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 上有界, 在 $[-1, 0)$ 上有上界但无下界, 是无界的。

【例】 确定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

剖析 确定一个函数的奇偶性, 关键是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。这样的问题通常分两步解决。第一步是求出 $f(-x)$, 第二步是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \end{aligned}$$

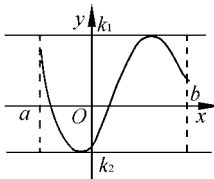


图 1-1

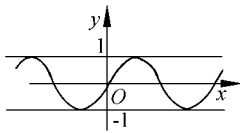


图 1-2

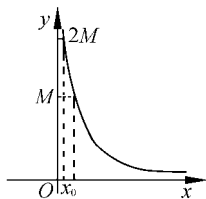


图 1-3

$$= -\ln(\sqrt{1+x^2}+x) = -f(x)$$

所以函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 是奇函数。

教材重要习题解析

习题 1-1

10. 设 $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$, 求 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数哪个是偶函数。

$$\begin{aligned}\text{解 } \varphi(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}[2x^2 + 6x - 3 + 2x^2 - 6x - 3] \\ &= 2x^2 - 3\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}[2x^2 + 6x - 3 - 2x^2 + 6x + 3] = 6x$$

显然 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, 所以 $\varphi(x)$ 是偶函数。

$\psi(-x) = -\psi(x)$, 所以 $\psi(x)$ 是奇函数。

11. (3) 证明定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的函数, 显然

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 有

$\varphi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \varphi(x)$, 故 $\varphi(x)$ 是偶函数。

$$\psi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -\psi(x)$$

$\psi(x)$ 是奇函数, 从而 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ 是一个偶函数与一个奇函数之和。

13. (10) 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加。

证明 任取 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$ 且 $-x_1 > -x_2$ 。由 $f(x)$ 是 $(-l, l)$ 内的奇函数且在 $(0, l)$ 内单调增加, 有 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 亦即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调增加。

16. 对于函数 $f(x) = x^2$, 如何选择邻域 $U(0, \delta)$ 的半径 δ , 就能使与任一 $x \in$

$U(0, \delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0, 2)$ 内?

解 要使 $f(x) = x^2 \in (0, 2)$, 即 $0 < x^2 < 2$, 只需 $|x| < \sqrt{2}$, 且 $x \neq 0$, 又 $x \in U(0, \delta)$, 故只需取邻域的半径 $\delta = \sqrt{2}$, 就能使与任一 $x \in U(0, \delta)$ 所对应的函数值 $f(x) = x^2$ 都在邻域 $U(0, 2)$ 内。

17. (15) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

证明 若 $f(x)$ 在 X 上既有上界 K_1 又有下界 K_2 , 即 $K_2 \leq f(x) \leq K_1$, 取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $-M \leq K_2 \leq f(x) \leq K_1 \leq M$, 即 $|f(x)| \leq M$, 从而 $f(x)$ 在 X 上有界。

反之, 若 $f(x)$ 在 X 上有界, 则必存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in X$ 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 说明 $f(x)$ 在 X 上有上界 M 和下界 $-M$ 。

自我测试

1. 判断函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$ 是否相等。
2. 判断函数 $f(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$ 的奇偶性。
3. 判断函数 $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ 是否为有界函数。
4. 设 $f(x)$ 满足 $3f(x) - 2f(\frac{1}{x}) = x + 1$, 求 $f(x)$ 。



参考答案及提示

1. 不等。因定义域不同, $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$ 的一切实数, $g(x)$ 的定义域为 R 。

2. 奇函数。注意到 $f(-x) = \frac{-a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, $f(-x) + f(x) = 0$ 。

3. 有界函数。 $f(x)$ 的值域为 $W = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ 。

4. $f(x) = \frac{2}{5x} + \frac{3}{5}x + 1$ 。