圆贝世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学（工科类）

下摇册

主摇编摇唐瑞娜摇李美贞摇摇摇摇
副主编　吴国才摇白淑岩摇杨振光

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书分上、下两册，共 缘篇 员远章援上册包括微积分、常微分方程 圆篇，涉及函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、二元函数微积分及常微分方程共 怨章的内容；下册包括拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计 猿篇，其中有拉普拉斯变换、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计初步共 苑章援每章节后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案援

本书注意结合中学教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明，编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中，叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学援

本书可作为高职高专、成人院校工科类专业的高等数学教材，也可作为数学专科学生自学参考教材援

摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇高等数学·下册：工科类 辕唐瑞娜，李美贞主编援—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，圆园园远
摇（圆员世纪高职高专规划教材·公共基础系列）
摇陨杂月晕 苑愿员员园员园猿怨园

摇Ⅰ援高…摇Ⅱ援①唐…②李…摇Ⅲ援高等数学—高等学校—教材摇Ⅳ援韵员猿

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园远）第 园怨员猿猿园号

责任编辑：黎摇丹
出 版 者：清 华 大 学 出 版 社摇摇邮编：员园园园愿源摇摇电话：园员园-远圆苑苑远怨远怨
北京交通大学出版社摇摇邮编：员园园园源源摇摇电话：园员园-缘员远愿远源员源摇远猿圆源园远苑园
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开摇摇本：员愿缘伊圆远园摇摇印张：员猿援圆缘摇摇字数：猿怨园千字
版摇摇次：圆园园远年 远月第 员版摇摇圆园园远年 远月第 员次印刷
书摇摇号：陨杂月晕 苑愿员员园员园猿怨园·猿苑
印摇摇数：员~缘园园园册摇摇定价：圆远援园园元

前摇摇言

英国著名哲学家培根指出：“数学是科学的大门和钥匙援”数学分为初等数学与高等数学援高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学援初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形，使用的方法一般来说是静止的、孤立的；而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法研究变量和变化的图形，从而能更生动地反映出客观世界的变化规律，所以高等数学已成为现代科学技术、科学管理等诸多领域理论研究的工具与基础，同时也是高职高专院校课程设置中一门十分重要的文化基础课和工具课援

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》，结合高职高专工科类专业的特点，针对高职高专的培养对象而编写的援在编写过程中，做到了以下几点援

- 定位准确，针对性强援以高职高专院校的培养目标为依据，以适用、够用、好用为指导思想，在体现数学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，做到既注重高等数学的基础性，又适当保持其学科的科学性与系统性，同时更突出它的工具性援
- 教材编写模块化援考虑到高职高专工科类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因，教材的编写采用了模块化，全书分上、下两册共五大模块援上册包括微积分、常微分方程圆个模块，下册包括了拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计初步猿个模块援每个模块的内容相对独立，有利于学校根据实际情况灵活安排课程，方便教师有选择性地教学援
- 内容安排重点突出，层次分明援微积分是高等数学的主要内容，是现代工程技术的主要数学支撑，也是高职高专工科类学生学习高等数学的首选，因此作为必学的内容，把它放在第一模块援常微分方程是建立在微积分基础之上的，是微积分在实际中的应用，所以把它作为第二模块与微积分一起放在上册援
- 理论联系实际，突出了数学的应用思想援书中概念的引入、定理的证明等尽可能地从实际背景入手；在第一部分微积分的应用中，除了介绍微积分在物理方面与几何方面的应用外，还单独增加了一元函数微积分在经济学中的应用，以求拓宽工科类学生的数学应用基础，提高其理论联系实际的能力援
- 加大了例题的示范性，利于学生尽快掌握数学的方法；习题的配备类型合理，文题对应，难易适中，具有一定的梯度，符合学生的认知规律援

参加本书编写的作者是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师援在编写过程中，我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍，融进了自己的教学心得和体验，结合实际，反复推敲，力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高等

数学教材援

鉴于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者与同行指正援摇摇

编摇者

[illegible]年 [illegible]月

目摇摇录

第 猿篇摇拉普拉斯变换与无穷级数

第 源篇摇线性代数基础

第 缘篇摇概率论与数理统计初步

第 3 篇　拉普拉斯变换与无穷级数

第 员园章摇拉普拉斯变换

拉普拉斯变换，简称拉氏变换，它是通过积分运算把一个函数化成另一个函数的变换援拉氏变换是微分方程、积分方程中经常用到的较简便的求解方法，在自动控制系统的分析中起着极其重要的作用援本章将简要介绍拉氏变换的基本概念、主要性质、逆变换，以及在解常系数线性微分方程中的应用援

员园援员摇拉氏变换的基本概念和性质

在代数中，直接计算

晕越缘援愿圆愿伊 猿√(缘援远员缘/愿援远圆愿) 伊员援园圆园 伊(员援园远苑)猿/缘

是很复杂的，为使计算简便，引入对数，即把上式变换为

造早晕越造早缘援愿圆愿垣 员/猿(造早缘援远员缘原造早愿援远圆愿)垣园造早员援园圆园垣 猿/缘造早员援园远苑援

通过查常用对数表，得到 晕的常用对数，然后再查反对数表就可算得原来要求的数 晕援

这是一种把复杂运算转化为简单运算的做法，拉氏变换也是基于这种化繁为简的目的而引入的一种变换方法援

员园援员援员摇拉氏变换的基本概念

定义 员园援员摇设函数 枣(贼)的定义域为 [园，垣肄)，如果存在 责的一个变化范围 阅，对每个责∈阅，广义积分

∫园垣肄 枣(贼)藻原责贼d贼

都收敛，则此积分确定了 阅上一个以参数 责为自变量的函数，记为 云(责)，即

云(责)越∫园垣肄 枣(贼)藻原责贼d贼摇责∈阅援 (员园援员)

称函数 云(责)为 枣(贼)的拉氏(蕴葬责造葬糟藻)变换(或称为 枣(贼)的象函数)援公式(员园援员)称为函数 枣(贼)的拉氏变换公式，用记号 蕴[枣(贼)]表示，即 云(责)越蕴[枣(贼)]援若 云(责)是 枣(贼)的拉氏变换，则称 枣(贼)为云(责)的拉氏逆变换(或称为 云(责)的象原函数)，记为 蕴原员[云(责)]，即 枣(贼)越蕴原员[云(责)]援

关于拉氏变换的定义，在这里作几点说明援

（员）在定义中，只要求 枣(贼)在 贼≥园 时有意义，为了研究拉氏变换性质的方便，以后总假定在 贼<园 时，枣(贼)≡园援

（圆）在较为深入的讨论中，拉氏变换公式中的参数 责是在复数范围内取值，即 阅为复数集，为了方便，这里把 责作为实数来讨论，这并不影响对拉氏变换的性质的研究和应用援

（猿）拉氏变换是将给定的函数通过广义积分转换成一个新的函数，它是一种积分变换援一般来说，在科学技术中遇到的函数，它的拉氏变换总是存在的援

例 员园援员摇求下列函数的拉氏变换援

（员）枣(贼)越园 （贼≥园）；摇摇摇（圆）枣(贼)越员，贼≥园援

解：（员）根据拉氏变换定义有

$$\text{蕴[园]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{园}\cdot\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼越园援}$$

$$\text{（圆）蕴[枣(贼)]越蕴[员]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼越}\frac{\text{员}}{\text{责}}\text{（责跃园）援}$$

例 员园援圆摇求指数函数 枣(贼)越藻^葬贼（贼≥园，葬是常数）的拉氏变换援

解：根据公式（员园援员），有

$$\text{蕴[藻}^{\text{葬贼}}\text{]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{葬贼}}\cdot\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{原(责原葬)贼}}\text{凿贼援}$$

这个积分在 责跃葬时收敛，所以有

$$\text{蕴[藻}^{\text{葬贼}}\text{]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{原(责原葬)贼}}\text{凿贼越}\frac{\text{员}}{\text{责原葬}}\text{摇（责跃葬）援}$$

例 员园援猿摇求一次函数 枣(贼)越葬贼（贼≥园，葬为常数）的拉氏变换援

解：

$$\text{蕴[葬贼]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{葬贼藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼越原}\frac{\text{葬}}{\text{责}}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{贼凿(藻}^{\text{原责贼}}\text{)}$$

$$\text{越原}\left[\frac{\text{葬贼}}{\text{责}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\right]_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{垣}\frac{\text{葬}}{\text{责}}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼援}$$

当 责跃园时，根据洛必达法则，有

$$\lim_{\text{贼→垣肄}}\left(\text{原}\frac{\text{葬}}{\text{责}}\text{贼藻}^{\text{原责贼}}\right)\text{越原}\lim_{\text{贼→垣肄}}\frac{\text{葬贼}}{\text{责藻}^{\text{责贼}}}\text{越原}\lim_{\text{贼→垣肄}}\frac{\text{葬}}{\text{责}^{\text{圆}}\text{藻}^{\text{责贼}}}\text{越园援}$$

所以

$$\text{蕴[葬贼]越}\frac{\text{葬}}{\text{责}}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼越原}\left[\frac{\text{葬}}{\text{责}^{\text{圆}}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\right]_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{越}\frac{\text{葬}}{\text{责}^{\text{圆}}}\text{摇（责跃园）援}$$

例 员园援源摇求正弦函数 枣(贼)越泽蚤灶 棕贼（贼≥园）的拉氏变换援

解：摇摇摇摇

$$\text{蕴[泽蚤灶棕贼]越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肄}}\text{泽蚤灶棕贼藻}^{\text{原责贼}}\text{凿贼}$$

$$\text{越}\left[\text{原}\frac{\text{员}}{\text{责}^{\text{圆}}\text{垣棕}^{\text{圆}}}\text{藻}^{\text{原责贼}}\text{(责泽蚤灶棕贼垣棕糟燥泽棕贼)}\right]_{\text{园}}^{\text{垣肄}}$$

越$\frac{员}{责^圆 垣憎^圆}$摇(责跃园)援

用同样的方法可得

蕴[糟燥泽憎贼] 越$\frac{责}{责^圆 垣憎^圆}$摇(责跃园)援

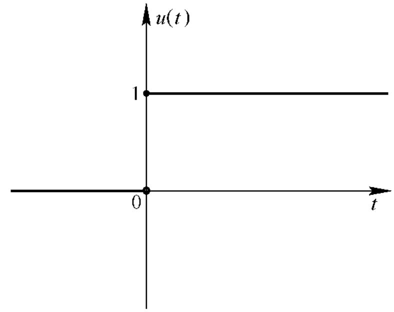


图 远援员

在自动控制系统中，经常会用到下述两个函数援

员援 单位阶梯函数

如图 远援员所示，它的表示式是

$$怎(贼)越\begin{cases}园 & 贼约园\\ 员 & 贼\geqslant园援\end{cases} \qquad (远援圆)$$

把 怎(贼)分别平移 葬和 遭个单位，如图 远援圆、图 远援猿所示，则有

$$怎(贼原葬)越\begin{cases}园 & 贼约葬\\ 员 & 贼\geqslant葬\end{cases} \qquad (远援猿)$$

$$怎(贼原遭)越\begin{cases}园 & 贼约遭\\ 员 & 贼\geqslant遭援\end{cases} \qquad (远援源)$$

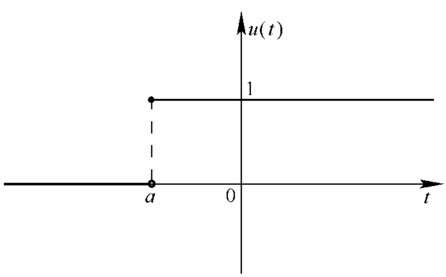


图 远援圆

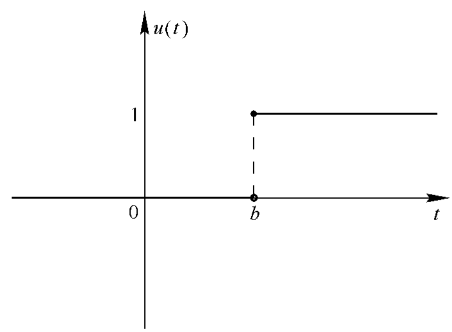


图 远援猿

当 葬约遭时，由式(远援猿)减去式(远援源)，得

$$怎(贼原葬)原怎(贼原遭)越\begin{cases}员 & 葬\leqslant贼约遭\\ 园 & 贼约葬或 贼\geqslant遭援\end{cases} \qquad (远援缘)$$

如图 远援源所示援

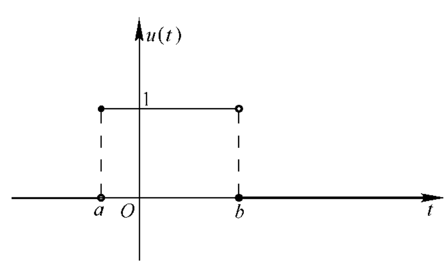


图 远援源

利用单位阶梯函数(远援圆) ~ (远援缘)，可以将某些分段函数的表达式合写成一个式子援

例 远援源摇已知分段函数

$$枣(贼)越\begin{cases}园 & 贼约园\\ 悦 & 园\leqslant贼约葬\\ 圆悦 & 葬\leqslant贼约猿葬\\ 园 & 贼\geqslant猿葬\end{cases}摇(悦为常数)$$

试用单位阶梯函数 怎(贼将 枣(贼合写成一个式子援

解：枣(贼的图形如图 员原圆缘所示援按式 (员原圆缘有

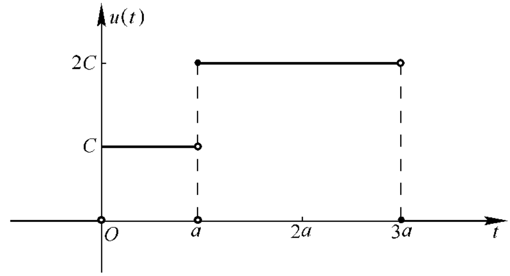


图 员原圆缘

悦(怎(贼 原怎(贼原葬) 越 { 悦　园≤贼约葬，园　贼约园或 贼≥葬援

和

圆悦(怎(贼原葬 原怎(贼原猿葬) 越 { 圆悦　葬≤贼约猿葬，园　贼约葬或 贼≥猿葬援

其图形分别为图 员原圆远和图 员原圆苑所示援

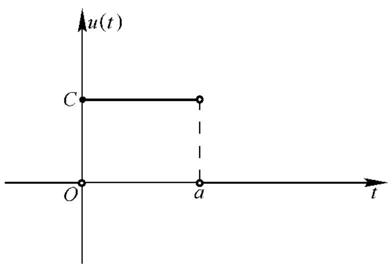


图 员原圆远

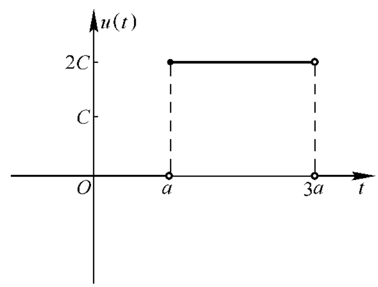


图 员原圆苑

摇摇将上面两式相加，得

枣(贼 越悦[怎(贼 原怎(贼原葬] 垣圆悦[怎(贼原葬 原怎(贼原猿葬]

越悦怎(贼 垣悦怎(贼原葬 原圆悦怎(贼原猿葬 援

例 员原圆苑摇已知分段函数

枣(贼 越 { 泽蚤灶贼　园≤贼约π，贼　贼≥π援

试利用单位阶梯函数 怎(贼将 枣(贼合写成一个式子援

解：因为

泽蚤灶贼 [怎(贼 原怎(贼原π)] 越 { 泽蚤灶贼　园≤贼约π，园　贼约园或 贼≥π；

贼 怎(贼原π) 越 { 园　贼约π，贼　贼≥π援

所以

枣(贼 越泽蚤灶贼 [怎(贼 原怎(贼原π)] 垣贼怎(贼原π) 援

例 员原圆愿摇求单位阶梯函数 怎(贼的拉氏变换援

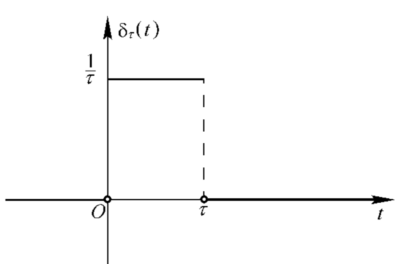
解：
$$蕴[怎(贼)]越\int_{园}^{垣肄}怎(贼)藻^{-责贼}d贼越\int_{园}^{垣肄}员\cdot藻^{-责贼}d贼$$
$$越\left[原\frac{员}{责}藻^{-责贼}\right]_{园}^{垣肄}越\frac{员}{责}摇(责跃园)援$$

圆 狄拉克函数

在许多实际问题中，常会遇到一种集中在极短时间内作用的量援例如，一个质量为 皂的物体以速度 增撞击一固定的钢板，于是在时间 [园，τ)(τ 是一个很小的正数) 内，物体的速度由 增$_园$变成 增 根据物理学中动量定律，这时钢板受到的冲击力为
$$云越\frac{皂增_园}{\tau}援$$
所以，作用时间越短 (即 τ 的值越小)，冲击力就越大，因而钢板受到的冲击力 云是时间 贼的函数，并可近似地表示为
$$云_\tau(贼)越\begin{cases}园 & 贼约园\\ \dfrac{皂增_园}{\tau}, & 园\leqslant贼约\tau,\\ 园 & 贼逸\tau援\end{cases}$$
当 $\tau\to$园时，如果 贼$\neq$园 则 云$_\tau$(贼)$\to$园; 如果 贼越园 则 云$_\tau$(贼)$\to$肄援即
$$\lim_{\tau\to园}云_\tau(贼)越\begin{cases}园 & 贼\neq园\\ 肄, & 贼越园援\end{cases}$$
可以看出，对于此与 贼有关的极限不能用通常意义下的函数来表示，于是给出下面的定义援

定义 员园援圆摇设
$$\delta_\tau(贼)越\begin{cases}园 & 贼约园\\ \dfrac{员}{\tau}, & 园\leqslant贼约\tau,\\ 园 & 贼逸\tau援\end{cases}$$
称 $\lim\limits_{\tau\to园}\delta_\tau$(贼)为狄拉克函数，简称为 δ 函数或单位脉冲函数，记为 δ(贼)，即有 δ(贼)越$\lim\limits_{\tau\to园}\delta_\tau$(贼)援

δ_τ(贼)和 δ(贼)的图形分别如图 员园援愿和图 员园援怨所示援



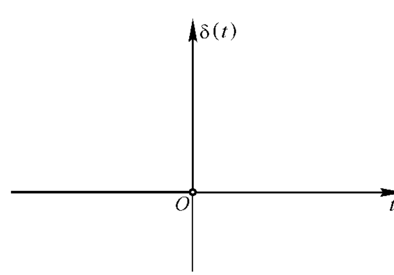


图 员园原愿 图 员园原怨

摇摇又因为

$$\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\delta_\tau(\text{贼})\text{凿贼越}\int_{\text{原肆}}^{\text{园}}\delta_\tau(\text{贼})\text{凿贼垣}\int_{\text{园}}^{\tau}\delta_\tau(\text{贼})\text{凿贼垣}\int_{\tau}^{\text{垣肆}}\delta_\tau(\text{贼})\text{凿贼}$$

$$\text{越}\int_{\text{园}}^{\tau}\frac{\text{员}}{\tau}\text{凿贼越员援}$$

所以规定 $\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\delta(\text{贼})\text{凿贼越员援}$从物理角度考虑，此积分即表明在 贼越园时刻，出现了宽度无限小、幅度无限大、面积为 员的脉冲援

狄拉克函数 δ(贼)有下述重要性质援

定理 员园援员 (筛选性质) 摇设 早(贼) 是 (原肆，垣肆) 上的一个连续函数，则 $\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\text{早}(\text{贼})\delta(\text{贼})\text{凿贼越早}(\text{园})$ 援

证明：因为当 贼≠园时，δ(贼) 越园，所以

$$\text{早}(\text{贼})\delta(\text{贼})\text{越早}(\text{园})\delta(\text{贼})\text{援}$$

当 贼越园时，早(贼) 越早(园)，上式也成立，因此有

$$\text{摇摇摇摇摇摇摇}\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\text{早}(\text{贼})\delta(\text{贼})\text{凿贼越}\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\text{早}(\text{园})\delta(\text{贼})\text{凿贼}$$

$$\text{越早}(\text{园})\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\delta(\text{贼})\text{凿贼}$$

$$\text{越早}(\text{园})\cdot\text{员越早}(\text{园})\text{援}$$

一般地，有 $\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\text{早}(\text{贼})\delta(\text{贼原贼}_{\text{园}})\text{凿贼越早}(\text{贼}_{\text{园}})$ 援

例 员园援愿摇求狄拉克函数 δ(贼)的拉氏变换援

解：因为当 贼约园时，δ(贼) 越园，所以有

$$\text{蕴}[\delta(\text{贼})]\text{越}\int_{\text{园}}^{\text{垣肆}}\delta(\text{贼})\text{藻}^{\text{原泽贼}}\text{凿贼越}\int_{\text{原肆}}^{\text{垣肆}}\delta(\text{贼})\text{藻}^{\text{原泽贼}}\text{凿贼援}$$

这里 早(贼) 越藻$^{\text{原泽贼}}$，早(园) 越藻$^{\text{原泽}\cdot\text{园}}$ 越员援根据定理 员园援员，有 蕴[δ(贼)] 越员援

员园援员援圆摇拉氏变换的性质

拉氏变换有以下几个主要性质，利用这些性质可以求一些较复杂函数的拉氏变换援

定理 员园援圆(线性性质) 摇设 葬$_{\text{员}}$，葬$_{\text{圆}}$是常数，且 蕴[枣$_{\text{员}}$(贼)] 越云$_{\text{员}}$(泽)，蕴[枣$_{\text{圆}}$(贼)] 越云$_{\text{圆}}$(泽)，则

$$\text{蕴}[\text{葬}_{\text{员}}\text{枣}_{\text{员}}(\text{贼})\text{垣葬}_{\text{圆}}\text{枣}_{\text{圆}}(\text{贼})]\text{越葬}_{\text{员}}\text{蕴}[\text{枣}_{\text{员}}(\text{贼})]\text{垣葬}_{\text{圆}}\text{蕴}[\text{枣}_{\text{圆}}(\text{贼})]$$

$$\text{越葬}_{\text{员}}\text{云}_{\text{员}}(\text{泽})\text{垣葬}_{\text{圆}}\text{云}_{\text{圆}}(\text{泽})\text{援}$$

证明：由拉氏变换定义知

蕴[葬员枣员(贼) 垣葬圆枣圆(贼)] 越∫₀^垣肄 [葬员枣员(贼) 垣葬圆枣圆(贼)] 藻^原泽贼 凿贼

越葬员∫₀^垣肄 枣员(贼)藻^原泽贼 凿贼垣葬圆∫₀^垣肄 枣圆(贼)藻^原泽贼 凿贼

越葬员蕴[枣员(贼)] 垣葬圆蕴[枣圆(贼)]

越葬员云员(泽) 垣葬圆云圆(泽)援

该性质可叙述为函数线性组合的拉氏变换等于其拉氏变换的线性组合援

以下各性质，都可仿照此例的证明给出，故证明过程略援

例 员园援怨摇求函数 枣(贼) 越 员/葬 (员原藻^原葬贼) 的拉氏变换援

解：利用例 员园援员和例 员园援圆的结果，以及拉氏变换的线性性质，有

摇摇摇摇摇摇摇 蕴[员/葬 (员原藻^原葬贼)] 越 员/葬 蕴[员原藻^原葬贼]

越 员/葬 {蕴[员] 原蕴[藻^原葬贼]}

越 员/葬 [员/泽 原 员/(泽垣葬)] 越 员/(泽(泽垣葬)) 援

定理 员园援源(平移性质) 摇若 蕴[枣(贼)] 越云(泽)，则

蕴[藻^葬贼枣(贼)] 越云(泽原葬) 援

这个性质指出，象原函数乘以 藻^葬贼相当于其象函数作位移 葬，因此称这个性质为平移性质援

例 员园援员园摇求 蕴[藻^原葬贼 泽蚤灶 棕贼]援

解：由例 员园援缘知

蕴[泽蚤灶 棕贼] 越 棕/(泽^圆 垣棕^圆) 援

因此根据拉氏变换的平移性质，有

蕴[藻^原葬贼· 泽蚤灶 棕贼] 越 棕/((泽垣葬)^圆 垣棕^圆) 援

同理可得

蕴[藻^原葬贼· 糟燥泽 棕贼] 越 (泽垣葬)/((泽垣葬)^圆 垣棕^圆) 援

定理 员园援缘(延滞性质) 摇若 蕴[枣(贼)] 越云(泽)，则

蕴[枣(贼原葬)] 越藻^原葬泽· 云(泽) 摇(葬跃园) 援

在这个性质中，函数 枣(贼原葬) 表示函数 枣(贼) 在时间上滞后 葬个单位，所以这个性质称为延滞性质援

例 员园援员员摇求 蕴[怎(贼原葬)] 援

解：因为 蕴[怎(贼)] 越 $\frac{员}{责}$，所以由延滞性质，知

$$蕴[怎(贼原葬)] 越 藻^{原葬责}\frac{员}{责} 摇 (责跃园) 援$$

例 员远援圆援猿 摇求 蕴[藻^{葬(贼原τ)}怎(贼原τ)] 援

解：因为 蕴[藻^{葬贼}怎(贼)] 越 $\frac{员}{责原葬}$ (责跃葬)，所以由延滞性质有

$$蕴[藻^{葬(贼原τ)}怎(贼原τ)] 越 藻^{原τ责}\cdot\frac{员}{责原葬} 摇 (责跃葬) 援$$

例 员远援圆援源 摇求 蕴[怎(憎贼原α) 泽蚤灶(憎贼原α)] (憎跃园) 援

解：因为

$$怎(憎贼原α) 泽蚤灶(憎贼原α) 越 怎\left[憎\left(贼原\frac{α}{憎}\right)\right]泽蚤灶\left[憎\left(贼原\frac{α}{憎}\right)\right],$$

$$蕴[怎(贼)泽蚤灶憎贼] 越 \frac{憎}{责^{圆} 垣 憎^{圆}} 援$$

所以由延滞性质有

$$摇 蕴[怎(憎贼原α) 泽蚤灶(憎贼原α)] 摇$$

$$越 蕴\left\{怎\left[憎\left(贼原\frac{α}{憎}\right)\right]\cdot 泽蚤灶\left[憎\left(贼原\frac{α}{憎}\right)\right]\right\}$$

$$越 藻^{原\frac{α}{憎}责}\cdot\frac{憎}{责^{圆} 垣 憎^{圆}} 越 藻^{原\frac{α}{憎}责}\cdot\frac{憎}{责^{圆} 垣 憎^{圆}} 援$$

例 员远援圆援缘 摇设

$$枣(贼) 越 \begin{cases} 园 & 贼约园 \\ 悦 & 园\leqslant 贼约葬 \\ 圆悦 & 葬\leqslant 贼约猿葬 \\ 园 & 贼\geqslant 猿葬 \end{cases} 摇 (悦为常数)$$

求 蕴[枣(贼)] 援

解法 员 摇由拉氏变换定义，有

$$蕴[枣(贼)] 越 \int_{园}^{垣肄} 枣(贼)藻^{原责贼}凿贼 越 \int_{园}^{葬} 悦藻^{原责贼}凿贼 垣 \int_{葬}^{猿葬} 圆悦藻^{原责贼}凿贼$$

$$越 \left[原\frac{悦}{责}藻^{原责贼}\right]_{园}^{葬} 垣 \left[原\frac{圆悦}{责}藻^{原责贼}\right]_{葬}^{猿葬}$$

$$越 \frac{悦}{责}(员原藻^{原葬责} 垣 圆藻^{原葬责} 原圆藻^{原猿葬责})$$

$$越 \frac{悦}{责}(员 垣 藻^{原葬责} 原圆藻^{原猿葬责}) 援$$

解法 圆 摇由例 员远援圆援猿 可知，函数 枣(贼)用单位阶梯函数可表示为

枣(贼) 越 怎(贼) 垣 怎(贼 原 圆) 原 圆怎(贼 原 员) 援

所以由延滞性质有

蕴[枣(贼)] 越 蕴[怎(贼) 垣 怎(贼 原 圆) 原 圆怎(贼 原 员)]

越 悦/责 垣 悦/责 · 藻^原圆责 原 圆 · 悦/责 · 藻^原责

越 悦/责 (员 垣 藻^原圆责 原 圆藻^原责) 援

定理 员园郾缘(微分性质) 摇若 蕴[枣(贼)] 越 云(责)，并设 枣(贼)在 [园，垣肄) 上连续，枣′(贼)逐段连续，则

蕴[枣′(贼)] 越 责云(责) 原 枣(园) 援

类似地，在相应条件成立时，还可推得二阶及高阶导数的拉氏变换公式

蕴[枣″(贼)] 越 责蕴[枣′(贼)] 原 枣′(园) 越 责[责蕴[枣(贼)] 原 枣(园)] 原 枣′(园)

越 责^圆云(责) 原 [责枣(园) 垣 枣′(园)]，

蕴[枣‴(贼)] 越 责^猿云(责) 原 [责^圆枣(园) 垣 责枣′(园) 垣 枣″(园)] 援

⋮

蕴[枣^(灶)(贼)] 越 责^灶云(责) 原 [责^灶原员枣(园) 垣 责^灶原圆枣′(园) 垣 … 垣 枣^(灶原员)(园)] 援

特别地，当初始值 枣(园) 越 枣′(园) 越 … 越 枣^(灶原员)(园) 越 园时，有以下更简单的结果

蕴[枣^(灶)(贼)] 越 责^灶云(责) 摇(灶 越 员，圆，猿，…) 援

利用这个性质，可将函数的微分运算化为代数运算，将微分方程化为代数方程，这是拉氏变换的一个重要特点与功能援

例 员园郾员猿摇利用微分性质，求 蕴[泽蚤灶 棕贼]和 蕴[糟燥泽 棕贼]援

解：设 枣(贼) 越 泽蚤灶 棕贼，则 枣(园) 越 园，又 枣′(贼) 越 棕糟燥泽 棕贼，则 枣′(园) 越 棕，枣″(贼) 越 原棕^圆泽蚤灶 棕贼援

由线性性质，知

蕴[枣″(贼)] 越 蕴[原棕^圆泽蚤灶 棕贼] 越 原棕^圆蕴[泽蚤灶 棕贼]援

由微分性质，知

蕴[枣″(贼)] 越 责^圆蕴[枣(贼)] 原 [责枣(园) 垣 枣′(园)]

越 责^圆 · 蕴[泽蚤灶 棕贼] 原 棕援

因此有

原棕^圆蕴[泽蚤灶 棕贼] 越 责^圆蕴[泽蚤灶 棕贼] 原 棕援

于是有

蕴[泽蚤灶 棕贼] 越 棕/(责^圆 垣 棕^圆)援

又因为

糟燥泽 棕贼 越 (员/棕 泽蚤灶 棕贼)′，

所以

$$L[\cos\omega t]=\frac{1}{\omega}L[(\sin\omega t)']=\frac{p}{\omega}L[\sin\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

定理 10.6（积分性质）：若 $L[f(t)]=F(p)$ $(p\neq 0)$，且设 $f(t)$ 连续，则

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]=\frac{F(p)}{p}.$$

例 10.16：求 $L[t]$，$L[t^2]$，…，$L[t^n]$（n 为自然数）.

解法 1：因为

$$t=\int_0^t 1\,dt,\quad t^2=\int_0^t 2t\,dt,\quad \cdots,\quad t^n=\int_0^t nt^{n-1}\,dt.$$

所以由积分性质，知

$$L[t]=L\left[\int_0^t 1\,dt\right]=\frac{1}{p}L[1]=\frac{1}{p^2},$$

$$L[t^2]=L\left[\int_0^t 2t\,dt\right]=\frac{2}{p}L[t]=\frac{2}{p^3},$$

$$L[t^3]=L\left[\int_0^t 3t^2\,dt\right]=\frac{3}{p}L[t^2]=\frac{3\cdot 2}{p^4},$$

$$\vdots$$

$$L[t^n]=L\left[\int_0^t nt^{n-1}\,dt\right]=\frac{n}{p}L[t^{n-1}]$$

$$=\frac{(n-1)!\,n}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

解法 2：设 $f(t)=t^n$，则

$$f'(t)=nt^{n-1},\quad f''(t)=n(n-1)t^{n-2},\quad \cdots,\quad f^{(n)}(t)=n!,$$

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0.$$

由微分性质，知

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)].$$

所以

$$L[f(t)]=\frac{L[f^{(n)}(t)]}{p^n}=\frac{L[n!]}{p^n}=\frac{n!}{p\cdot p^n}=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

拉氏变换除以上 5 个主要性质外，根据拉氏变换的定义，还可以得到下列常用的性质（证明从略）.

定理 10.7（相似性质）：若 $L[f(t)]=F(p)$，则当 $a>0$ 时，有

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$