

## 第一单元 直角三角形的边角关系

课标定位梳理 .....	1
1. 从梯子的倾斜程度谈起 .....	3
$30^\circ$ $45^\circ$ $60^\circ$ 角的三角函数值 .....	3
三角函数的有关计算 .....	3
2. 船有触礁的危险吗 .....	19
测量物体的高度 .....	19
思维整合升华 .....	37

## 第二单元 二次函数

课标定位梳理 .....	47
1. 二次函数所描述的关系 .....	49
结识抛物线 .....	49
刹车距离与二次函数 .....	49
2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象 .....	58
用三种方式表示二次函数 .....	58
3. 何时获得最大利润 .....	84
最大面积是多少 .....	84
二次函数与一元二次方程 .....	84
思维整合升华 .....	99
期中测试题 .....	115

## 第三单元 圆

课标定位梳理 .....	118
1. 车轮为什么做成圆形 .....	119

圆的对称性 .....	119
圆周角和圆心角的关系 .....	119
2. 确定圆的条件 .....	139
直线和圆的位置关系 .....	139
圆和圆的位置关系 .....	139
3. 弧长及扇形的面积 .....	161
圆锥的侧面积 .....	161
思维整合升华 .....	178

## 第四单元 统计与概率

课标定位梳理 .....	193
50 年的变化 .....	194
哪种方式更合算 .....	194
游戏公平吗 .....	194
思维整合升华 .....	217
期末测试题 .....	231
综合测试题(一) .....	235
综合测试题(二) .....	239
参考答案 .....	243



# 第一单元 直角三角形的 边角关系

## 课标定位梳理

### 一、单元目标定位

#### 1. 知识目标定位

(1) 经历探索直角三角形中边角之间关系的过程,理解锐角三角函数的概念,并能举例说明.

(2) 经历探索  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  角的三角函数值的过程,会计算含  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  角的三角函数值的问题.

(3) 能够借助计算器由已知锐角求出它的三角函数值,或由已知三角函数值求出相应的锐角.

#### 2. 能力目标定位

(1) 能够运用三角函数解直角三角形,并解决与直角三角形有关的实际问题,培养学生分析问题、解决问题的能力.

(2) 体会数形之间的联系,逐步学习利用数形结合的思想分析问题和解决问题,从而发展数学应用意识和解决问题的能力.

### 二、单元学法指导

直角三角形中边角之间的关系,是事实情境中应用广泛的关系之一.单元重点是掌握锐角三角函数及其直角三角形中的边角关系.单元难点是将实际问题转化为直角三角形边角关系的模型来解决.在学习时应注意以下

方法和规律.

(1)明确锐角三角函数的定义是在直角三角形中研究的.

(2)搞清楚什么是直角三角形中一个锐角的对边和邻边以及斜边,在复杂的图形中能熟练地辨认.

(3)熟记特殊角的三角函数值和公式.

(4)解直角三角形的方法可概括为“有弦(斜边)用弦(正弦、余弦),无弦用切(正切、余切),宁乘毋除,取原避中”,其意指:当已知或求解中有斜边时,可用正弦或余弦;无斜边时,就用正切或余切;当所求元素既可用乘法又可用除法时,则用乘法,不用除法;既可由已知数据又可用中间数据求解时,则取原始数据,忌用中间数据.

(5)解含有非基本元素的直角三角形(即直角三角形中中线、高、角平分线、周长、面积等),一般将非基本元素转化为基本元素,或转化为元素间的关系式,再通过解方程组来解.

(6)会解以下几种类型的题:

①已知直角三角形的边长,求锐角的四个三角函数值(或求锐角的度数).

②已知直角三角形中一个锐角的函数值(或特殊角的度数)和一条边的长,求其他两边的长.

③根据三角函数的增减性,进行三角函数值的大小比较.

④根据特殊角的三角函数值进行计算.

⑤根据正、余弦互余的关系,正、余切互余的关系进行一些式子的化简、求值和恒等式的证明.

# 从梯子的倾斜程度谈起

## 探究锐角三角函数的有关计算

### 三角函数的有关计算



#### 自主学习提示

### 一、相关知识链接

#### 1. 直角三角形的定义

在 $\triangle ABC$ 中,若有一个内角为直角,那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形.记作 $\text{Rt}\triangle ABC$ ,如图 1-1 中 $\angle C=90^\circ$ .

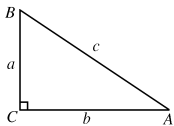


图 1-1

#### 2. 直角三角形的组成元素(图 1-1)

(1)有 6 个元素.

3 个内角:直角 $\angle C=90^\circ$ ,锐角 $\angle A<90^\circ$ 、 $\angle B<90^\circ$ ;

3 条边:直角边  $AC$ 、 $BC$  斜边  $AB$ .

(2)边与角之间的关系.

$\angle C=90^\circ$ 是直角,其对边是斜边  $c$ ,

邻边有  $b$ 、 $a$  均是直角边  $c>a$   $c>b$ ;

$\angle A$  是锐角,其对边是直角边  $a$ ,邻边是斜边  $c$  和另一直角边  $b$ ;

$\angle B$  是锐角,其对边是直角边  $b$ ,邻边是斜边  $c$  和另一直角边  $a$ .

#### 3. 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方,即在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, $\angle C=90^\circ$ , $\angle A$   $\angle B$   $\angle C$  的对边分别为  $a$   $b$   $c$ ,则  $a^2+b^2=c^2$ .

#### 4. 直角三角形的两锐角互余

即在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, $\angle C=90^\circ$ , $\angle A+\angle B=90^\circ$ .

#### 5. 相似三角形的判定及性质

相似三角形的对应边成比例,对应角相等.

### 二、重难点知识提示

本节重点:直角三角形中锐角三角函数的定义、特殊锐角与其三角函数值之间的对应关系.

本节难点:用函数观点理解正弦、余弦、正切.



## 发散思维分析



### 一、锐角三角函数的定义

#### 1. 正切的定义及公式

如图 1-2 所示, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 如果锐角  $A$  确定, 那么  $\angle A$  的对边与邻边的比便随之确定, 这个比叫做  $\angle A$  的正切 (tangent) 记作  $\tan A$ , 即  $\tan A =$

$$\frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}.$$

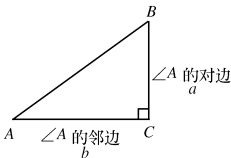


图 1-2

#### 2. 正弦、余弦的定义及公式

如图 1-3 所示, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 如果锐角  $A$  确定, 那么  $\angle A$  的对边与斜边的比、邻边与斜边的比便随之确定.

$\angle A$  的对边与斜边的比叫做  $\angle A$  的正弦 (sine),

记作  $\sin A$ , 即  $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}.$

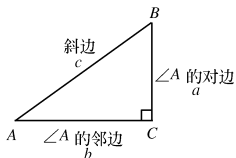


图 1-3

$\angle A$  的邻边与斜边的比叫做  $\angle A$  的余弦 (cosine), 记作  $\cos A$ , 即  $\cos A =$

$$\frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}.$$

#### 3. 三角函数的定义

锐角  $A$  的正弦、余弦和正切都是  $\angle A$  的三角函数 (trigonometric function).

#### 4. 梯子的倾斜程度与三角函数的关系 (图 1-4)

$\tan A$  的值越大, 梯子越陡;

$\sin A$  的值越大, 梯子越陡;

$\cos A$  的值越小, 梯子越陡.

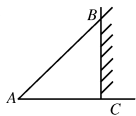


图 1-4

#### 5. 坡度 (或坡比) 的定义

坡面的铅直高度与水平宽度的比称坡度 (或坡比) 如图 1-5 所示, 正切值经常用来描述山坡的坡度.

例如, 有一山坡在水平方向上每前进 100m 就升高 60m, 那么山坡的坡度 ( $\tan \alpha$ ) 就是  $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ . 工程上, 斜坡的倾斜程度通常用坡度来表示, 而坡度是坡角的正

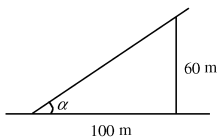


图 1-5

切,因此要注意坡度与坡角的区别和联系.显然,坡度越大,坡面越陡.

## 二、一些特殊角的三角函数值(表 1-1)

表 1-1

三角函数 \ 角度 $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

## 三、锐角 $\alpha$ 的三角函数值的符号及变化规律

### 1. 符号

锐角  $\alpha$  的三角函数值都是正值.

### 2. 变化规律

若  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , 则  $\sin\alpha$ 、 $\tan\alpha$  随着  $\alpha$  的增大而增大;  $\cos\alpha$  随着  $\alpha$  的增大而减小.

## 四、运用计算器进行三角函数的有关计算

已知锐角可用计算器计算它的三角函数值,反过来已知三角函数值也可用计算器求出相应锐角的度数.

在同一个班级中你也许会发现不同型号的计算器,一般来讲,不同的计算器在按键的程序和方式上可能不同,在操作之前,一定要仔细阅读自己计算器的使用说明书,按操作指令使用自己的计算器.在同班级出现不同型号计算器的情况下,同学之间可以互相交流,使自己学会使用不同型号的计算器.

例 1 用计算器求下列锐角三角函数值.

(1)  $\sin 58^\circ$ ; (2)  $\cos 24^\circ 35'$ ; (3)  $\tan 47^\circ 18' 23''$ . (保留四个有效数字)

分析 根据计算器的型号,调整按键步骤.(本书以 TRULY 信利牌 SC118B 双行显示科学计算器为例)

解 按键  $\boxed{\text{ON/C}}$  开机.

(1) 按键顺序为  $\boxed{\sin}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{=}$ , 显示结果 0.848 048 096.

$\therefore \sin 58^\circ \approx 0.848 0$

(2) 按键顺序为  $\boxed{\cos}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{=}$  , 显示结果 0.909 357 161.

$$\therefore \cos 24^{\circ} 35' \approx 0.909 4.$$

(3) 按键顺序为  $\boxed{\tan}$ 、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{7}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{=}$  , 显示结果 :

1.083 932 109.

$$\therefore \tan 47^{\circ} 18' 23'' \approx 1.084.$$

例 2 已知下列锐角三角函数值 , 用计算器求其相应的锐角 .

(1)  $\sin A = 0.501 8$  ; (2)  $\cos A = 0.625 2$  ; (3)  $\tan A = 0.881 6$ .

解 按键  $\boxed{\text{ON/C}}$  , 开机.

(1) 按键顺序为  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\sin}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{=}$  , 显示结果 :  
30.119 158 67°.

再按  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$  显示结果  $30^{\circ} 7' 8.97''$ .

$$\therefore \angle A \approx 30^{\circ} 7' 9''.$$

(2) 按键顺序为  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\cos}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{6}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{=}$  , 显示结果 :  
51.303 131 57°.

再按  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$  显示结果  $51^{\circ} 18' 11.27''$ .

$$\therefore \angle A \approx 51^{\circ} 18' 11''.$$

(3) 按键顺序为  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\tan}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{6}$ 、 $\boxed{=}$  , 显示结果 :  
41.399 400 61°.

再按  $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$  显示结果  $41^{\circ} 23' 57.84''$ .

$$\therefore \angle A \approx 41^{\circ} 23' 58''.$$

本节的实际问题较多 , 遇到实际问题 , 读懂题意 , 根据题意正确画出图形是解决实际问题的关键 , 为了掌握重点 , 化解难点 , 我们必须注意以下问题 .

### 1. 同角的三角函数间的关系

(1) 平方关系  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ .

(2) 商数关系  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ .

### 2. 互为余角的三角函数间的关系

$\sin(90^{\circ} - A) = \cos A$  ;  $\cos(90^{\circ} - A) = \sin A$ .

### 3. 直角三角形三边之间的关系

$a^2 + b^2 = c^2$  (勾股定理)

### 4. 边角之间的关系

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c} ;$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c} ;$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \tan B = \frac{b}{a}.$$

### 5. 解直角三角形

由直角三角形中除直角外的已知元素, 求出所有未知元素的过程, 叫做解直角三角形.

下面我们共同探究当已知条件不能直接在直角三角形中应用时, 是如何进行分解或转化的:

#### ❖ 与你探究 ❖

**【问题】** 如图 1-6 所示, 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .  $D$  在  $AC$  上,  $\angle BDC = 60^\circ$ ,  $AD = 20$ , 求  $BC$  的长.

**【准备】** 本题中的已知条件  $AD = 20$ , 不能直接在直角三角形中利用, 需要进行图形分解或转化.

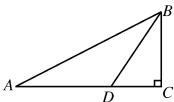


图 1-6

**【过程】**  $\because \angle A = 30^\circ, \angle BDC = 60^\circ,$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 30^\circ.$$

$$\therefore BD = AD. \text{ 而 } AD = 20, \therefore BD = 20.$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中 } \sin \angle BDC = \frac{BC}{BD}.$$

$$\therefore BC = BD \sin \angle BDC = 20 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

**【评析】** 当已知边长与未知边长不在同一个三角形中时, 只有进行等量代换, 使含未知边长的三角形中具有与已知边长相等的边长, 才能利用锐角三角函数解题.

下面我们共同探究关于“存在性”问题的解题思路:

#### ❖ 与你探究 ❖

**【问题】** 如图 1-7 所示, 已知在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $P$  是  $AB$  上一点, 连结  $PC$ , 设  $\angle BCP = m\angle ACP$ , 当  $\frac{BP}{AP} = 7 + 4\sqrt{3}$  时, 是否存在正整数  $m$ , 使  $PC \perp AB$ ? 如果存在, 求出  $m$  的值; 如果不存在, 说明理由.

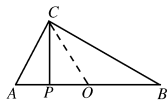


图 1-7

**【准备】** 因  $AB = 6, \frac{BP}{AP}$  为定值, 所以  $P$  是  $AB$  上一定点, 若满足  $PC \perp AB$ , 可求  $PC$  的长, 但  $PC$  与  $PA$  的比不是特殊值, 为此  $\angle A$  不可求, 通过对  $PC, PB, AB$  的数量关系分析, 取  $AB$  的中点  $O$ , 构造  $\text{Rt}\triangle OPC$ , 可求  $\angle COA$  为特殊角, 从而问题得解.

**【过程】** 假设存在正整数  $m$ , 使  $PC \perp AB$ ,

$$\therefore \frac{BP}{PA} = 7 + 4\sqrt{3}, AB = 6,$$

$$\therefore \frac{6-AP}{AP} = 7 + 4\sqrt{3} \text{ 解得 } AP = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}, BP = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore PC \perp AB,$$

$\therefore \angle CPB = 90^\circ$ . 取  $AB$  的中点  $O$ , 连结  $OC$ ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 3 \text{ 而 } OP = PB - OB = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OCP \text{ 中 } \cos COP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \angle COP = 30^\circ.$$

$$\therefore OC = OB, \therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = 15^\circ.$$

$$\therefore \angle BCP = 75^\circ, \angle ACP = 15^\circ, \therefore m = 5.$$

**【评析】** 对于一般的“存在性”问题的解题思路是：首先假设结论存在，然后找出表现其存在性对象应满足的条件，利用正确的数学推理，最后做出合理的判断。



## 发散思维应用

### 典型例题

已知在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3AC$ . 求  $\angle A$  的正弦、余弦和正切值.

分析 欲求  $\angle A$  的正弦和余弦值，可由已知条件  $AB = 3AC$  来求解.

解  $\because \angle C = 90^\circ, AB = 3AC.$

设  $AC = k, AB = 3k$ , 由勾股定理得

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{2}k.$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3},$$

$$\tan A = 2\sqrt{2}.$$

**指点迷津** 在求锐角三角函数值时，经常要用到勾股定理及三角函数的定义，特别是已知两边的比值时，由于无法确定两边的长度，因此需要利用设元的方法来解决，但要注意由  $AB = 3AC$  并不能说明  $AC = 1, AB = 3$ .

## 【题型发散】

发散1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)在 $\triangle ABC$ 中,若 $\left|\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B\right)^2 = 0$ , $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角,则 $\angle C$ 的度数是 ( )

A.  $75^\circ$       B.  $90^\circ$       C.  $105^\circ$       D.  $120^\circ$

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$ .若 $\cos A + \sin B = 1$ ,则 $\angle A$ 的度数是 ( )

A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D. 不能确定

(1)分析 本题考查非负数的性质、特殊角的三角函数值,即先利用非负数的性质求出 $\sin A$ 、 $\cos B$ 的值,进而确定 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度数,而后利用三角形的内角和求出 $\angle C$ 的度数.

$$\text{解} \quad \because \left|\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B\right)^2 = 0,$$

$$\therefore \sin A - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B = 0, \text{即} \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\because \angle A$ 、 $\angle B$ 均为锐角,

$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 30^\circ.$$

$$\text{又} \because \triangle ABC \text{中}, \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \therefore \angle C = 105^\circ,$$

故本题应选 C.

解法指导 本题是考查特殊角的三角函数值的一道典型例题,由此应知道熟记特殊角的三角函数值的重要性.

(2)分析 用直接推算法

$$\text{解} \quad \because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$\therefore \cos A + \sin B = \cos A + \sin(90^\circ - A) = 2\cos A. \therefore \cos A = \frac{1}{2}. \therefore \angle A = 60^\circ.$$

故本题应选 C.

发散2 想一想,填什么最准确?

(1)已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$ , $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别是 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,且 $c = 3b$ ,则 $\angle A =$ \_\_\_\_\_.

(2) $\alpha$ 为锐角, $\sin^2 48^\circ + \sin^2 \alpha = 1$ ,则 $\alpha =$ \_\_\_\_\_.

(3)已知 $\sin 42^\circ 54' = 0.6807$ ,若 $\cos \alpha = 0.6807$ ,则 $\alpha =$ \_\_\_\_\_.

$$\text{解} \quad (1) \because \angle C = 90^\circ, \angle A、\angle B、\angle C \text{的对边 } a、b、c, \therefore \cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\because c = 3b, \therefore \cos A = \frac{1}{3}.$$

用计算器解得 $\angle A = 70^\circ 31' 51''$ .

$$(2) \because \sin^2 \alpha + \sin^2 48^\circ = 1 \quad \therefore \cos^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2 48^\circ = 1,$$

$$\therefore 90^\circ - \alpha = 48^\circ. \therefore \alpha = 42^\circ.$$

$$(3) \because \sin 42^\circ 54' = \cos \alpha, \therefore \alpha + 42^\circ 54' = 90^\circ. \therefore \alpha = 47^\circ 6'.$$

### 【纵横发散】

**发散 3** 如图1-8所示,在直角三角形  $ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CD \perp AB$  于  $D$ . 若  $BC = 15$ ,  $AD = 16$ . 求  $\angle ACD$  的正弦、余弦、正切值.

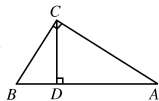


图 1-8

**分析** 如图易知,欲求  $\angle ACD$  的正弦和余弦值,需求  $AC$  的长和  $CD$  的长,关键是先求  $BD$  的长.

**解**  $\because \angle ACB = 90^\circ, CD \perp AB,$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC.$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC} \therefore BC^2 = AB \cdot BD.$$

$$\therefore 15^2 = BD \cdot (16 + BD).$$

整理,得  $(BD + 8)^2 = 289$ .

解得  $BD = 9, BD = -25$ (舍去).

在直角  $\triangle BCD$  中,由勾股定理,得

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

$$AB = AD + BD = 16 + 9 = 25.$$

在直角  $\triangle ABC$  中,由勾股定理,得

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \angle ACD = \frac{CD}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{4}{3}.$$

**发散 4** 化简与计算.

$$(1) \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} (\alpha \text{ 为锐角}).$$

$$(2) \sqrt{1 - 2\sin 25^\circ \sin 65^\circ}.$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ - 2\cos^2 60^\circ}{\sqrt{3}\cos 30^\circ + 2\sin 30^\circ \sin 60^\circ}.$$

**分析** (1)化简这个题的关键是注意绝对值的概念和正、余弦的增减性.

(2)首先考虑把被开方数化为完全平方数.也就是把 1 化为  $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ$ , 而  $\sin 65^\circ$  正好是  $\cos 25^\circ$ , 然后再考虑绝对值,问题便得到解决.

(3)只要把特殊角的三角函数值代入,再计算化简即可求得.

$$\text{解 (1)原式} = |\sin\alpha - \cos\alpha| = \begin{cases} \cos\alpha - \sin\alpha (\alpha < 45^\circ); \\ 0 & (\alpha = 45^\circ); \\ \sin\alpha - \cos\alpha (\alpha > 45^\circ). \end{cases}$$

$$(2)\text{原式} = \sqrt{(\sin 25^\circ - \cos 25^\circ)^2} = \cos 25^\circ - \sin 25^\circ.$$

$$(3)\text{原式} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**解法指导** 当  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$  时,  $\cos\alpha > \sin\alpha$ . 当  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$  时,  $\sin\alpha > \cos\alpha$ . 这是判断三角函数值大小常用的结论.

### 【生活发散】

**发散 5** 在高 2 m, 坡角为  $30^\circ$  的楼梯表面铺地毯, 地毯的长度至少需 \_\_\_\_\_ m. (精确到 0.1 m)

**分析** 由生活经验可知, 在楼梯表面铺地毯时, 对每一级台阶, 既要铺水平面, 又要铺铅垂面. 而所有台阶的水平宽度恰好等于整个楼梯的水平宽度, 台阶的铅垂面的高度之和恰好等于整个楼梯的高度, 所需地毯的长度应不少于楼梯水平宽度与铅垂高度之和.

**解** 如图 1-9 所示, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 2$  m,  $\angle C = 90^\circ$ , 则

$$AC = \frac{BC}{\tan A} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}(\text{m}).$$

$$\therefore AC + BC = 2\sqrt{3} + 2 \approx 2 \times 1.732 + 2 \approx 5.5(\text{m}).$$

即地毯的长度至少需 5.5 m.

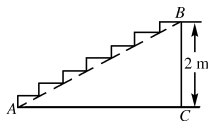


图 1-9

**发散 6** (2005·北京) 如图 1-10 所示, 河旁有一座小山, 从山顶 A 处测得河对岸点 C 的俯角为  $30^\circ$ , 测得岸边点 D 的俯角为  $45^\circ$ , 又知河宽 CD 为 50 m. 现需从山顶 A 到河对岸点 C 拉一条笔直的缆绳 AC, 求缆绳 AC 的长. (答案可带根号)

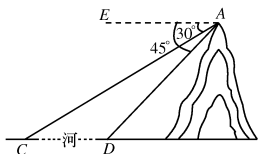


图 1-10

**解** 作  $AB \perp CD$  交  $CD$  的延长线于点 B.

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,

$$\therefore \angle ACB = \angle CAE = 30^\circ, \angle ADB = \angle EAD = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AB, DB = AB.$$

设  $AB = x$ , 则  $BD = x$ ,  $AC = 2x$ ,  $CB = 50 + x$ .

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{CB}, \therefore AB = CB \cdot \tan \angle ACB = CB \cdot \tan 30^\circ.$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}(50+x). \text{解得 } x = 25(1+\sqrt{3}).$$

$$\therefore AC = 50(1+\sqrt{3})(\text{m}).$$

答 缆绳 AC 的长为  $50(1+\sqrt{3})$  m.

**解法指导** 在解直角三角形的实际应用问题时,一般要先画符合题意的草图,按题意标明哪些是已知元素,哪些是未知元素,然后根据解直角三角形的类型与解法求解,顺便指出,解直角三角形的时候,一般是问什么求什么,不需求直角三角形的其他元素(有时要求其他元素过渡).

### 【解法发散】

**发散 7** 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求  $\cos B$  的值.

**分析** 由  $\text{Rt}\triangle ABC$  知  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ , 故  $\sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**解法 1**  $\because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle A = 90^\circ - \angle B.$

$$\therefore \sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**解法 2**  $\because \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \angle A = 60^\circ.$

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, \therefore \angle B = 30^\circ.$

$$\therefore \cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### 【逆向发散】

**发散 8** 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 17, AC = 15, BC = 8$ , 求  $\angle A$  的正弦、余弦和正切函数值.

**分析** 通过逆用勾股定理,判断  $\angle C = 90^\circ$ ,再分别求  $\angle A$  的三个三角函数数值.

**解**  $\because AB = 17, AC = 15, BC = 8,$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

$\therefore \triangle ABC$  为直角三角形,且  $\angle C = 90^\circ.$

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}.$$

### 【转化发散】

**发散 9** 已知  $a \sin \theta + \cos \theta = 1, b \sin \theta - \cos \theta = 1$ , 求  $ab$  的值.

**分析** 要求  $ab$ , 只要把  $a$  与  $b$  分别用  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  表示出来,  $ab$  就可变为同角三角函数的运算,从而求得解答.

**解** 若  $\sin \theta = 0$ , 则

$\cos\theta = 1$  与  $-\cos\theta = 1$  矛盾,

$\therefore \sin\theta \neq 0$ .

由  $a\sin\theta + \cos\theta = 1$  ,得  $a = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$  ,

由  $b\sin\theta - \cos\theta = 1$  ,得  $b = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$  .

$$\begin{aligned} \therefore ab &= \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1. \end{aligned}$$

**解法指导** (1)在本题变形中,  $\sin\theta \neq 0$  ,否则已知条件中的两个式子矛盾.

(2)本题只要能想到两个已知条件都含有  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  ,那么最后求值中一定会用到关于  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  的关系式,所以不难求出结果.

### 【综合发散】

**发散 10** 设  $\alpha$  为锐角,且  $\alpha \neq 45^\circ$  ,若  $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha = 1$  .求以  $\tan\alpha, \frac{1}{\tan\alpha}$  为根的一元二次方程.

**解**  $\because 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$  (对  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  的正逆使用要熟练)

$$\therefore 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha .$$

$$\therefore (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{3}(\sin\alpha - \cos\alpha) .$$

$\because \alpha$  为锐角且  $\alpha \neq 45^\circ$  ,  $\therefore \sin\alpha - \cos\alpha \neq 0$  .(这一步一定要写出来)

$$\therefore \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \text{ , 两边平方并化简得 } \sin\alpha \cos\alpha = \frac{4}{9} .$$

$$\therefore \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{9}{4} .$$

又  $\because \tan\alpha \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = 1$  ,

故以  $\tan\alpha, \frac{1}{\tan\alpha}$  为两根的一元二次方程  $x^2 - \frac{9}{4}x + 1 = 0$  即  $4x^2 - 9x + 4 = 0$  .

**发散 11** 如图1-11所示,是一秋千示意图,当拉绳偏离竖直位置  $30^\circ$  时,秋千底端的位置比原来升高了多少?(精确到  $0.1\text{ m}$  ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$  ).若秋千底端升高超过拉绳长  $OA$  的一半时,会发生危险,为安全起见,在荡秋千时,拉绳偏离竖直位置的最大角度是多少?

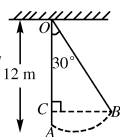


图 1-11

**分析** 可利用直角三角形的边角关系求出相关数据.

**解** (1) $\because OA = OB = 12$  ,  $\angle AOB = 30^\circ$  ,

过点  $B$  作  $BC \perp OA$  于  $C$  ,

在  $\text{Rt}\triangle BCO$  中  $\cos\angle BOC = \frac{OC}{OB}$ .

$$\therefore OC = OB \cos\angle BOC = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10.392 \approx 10.4(\text{m}).$$

$$\therefore CA = OA - OC = 12 - 10.4 = 1.6(\text{m}).$$

即秋千底端的位置比原来升高了 1.6 m.

(2)如图 1-12 所示,在  $OA$  上截取中点  $D$ ,则  $OD = 6$  m,过点  $D$  作  $BD \perp AO$ ,以  $O$  为圆心,  $OA$  为半径作弧,交  $BD$  于点  $B$ ,则  $OB = OA = 12$  m.

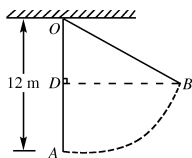


图 1-12

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BOD \text{ 中 } \cos\angle BOD = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle BOD = 60^\circ.$$

即拉绳偏离竖直位置的最大角度为  $60^\circ$ .



### 自主达标演练

## 这些知识你应该掌握

### 【题型发散】

1. 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a = 2b$ , 则  $\sin A$  的值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 2

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ , 如果  $\sin B = \frac{1}{3}$ , 那么  $\cos A + \frac{1}{\tan A}$  的值为 ( )

- A.  $\frac{4+3\sqrt{2}}{12}$       B.  $\frac{11\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{7\sqrt{2}}{12}$

3. 若  $\cos\alpha \cdot \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则锐角  $\alpha$  为 ( )

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $75^\circ$

4. 计算  $\sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + 1 - \tan 45^\circ - \frac{\sin 90^\circ \tan 30^\circ}{\cos 30^\circ} =$  \_\_\_\_\_.

5.  $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan 30^\circ}\right)^2} + |1 - \tan 35^\circ| + \sqrt{\tan^2 35^\circ} - \frac{1}{\tan 45^\circ} =$  \_\_\_\_\_.

### 【纵横发散】

1. 在下列条件下, 求锐角  $\theta$  的取值范围.

(1)  $2\sin\theta - \sqrt{2} \leq 0$ .

(2)  $\cos\theta - \frac{1}{2} \geq 0$  且  $3\tan\theta - \sqrt{3} > 0$ .

2. 化简根式:  $\sqrt{4\cos^2 51^\circ - 4\sqrt{2}\cos 51^\circ + 2}$ .

### 【解法发散】

已知  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\alpha$  为锐角, 求  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ .

### 【应用发散】

1. 某宾馆在主楼梯上铺设某种红色地毯, 如果主楼梯的坡度为  $1:\sqrt{3}$  且楼梯的竖直高度为 3 m, 若所铺设的地毯每平方米售价为 30 元, 主楼梯的宽度为 2 m, 如图 1-13 所示, 则购买地毯至少需要多少元钱?

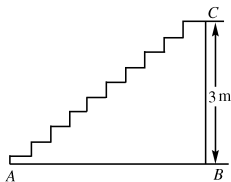


图 1-13

2. 如图 1-14 所示, 在小山的东侧 A 处有一热气球, 以每分钟 28 m 的速度沿着与垂直方向夹角为  $30^\circ$  的方向飞行, 半小时后到达 C 处, 这时气球上的人发现, 在 A 处的正西方向有一处着火点 B, 5 分钟后, 在 D 处测得着火点 B 的俯角是  $15^\circ$ , 求热气球升空点 A 与着火点 B 的距离. (精确到 1 m)

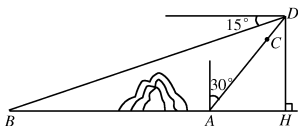


图 1-14

### 【转化发散】

1. 如图 1-15 所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD \perp AB$  于 D, 求证:  $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CD^2}$ .

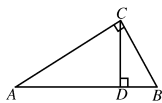


图 1-15

2. 已知  $\sin A$ ,  $\sin B$  是方程  $4x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  的两个实根, 且  $\angle A$ ,  $\angle B$  是直角三角形的锐角. 求:

- (1)  $m$  的值;
- (2)  $\angle A$  与  $\angle B$  的度数.

### 【综合发散】

1. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ , 两直角边的和为 14, 求这两条直角边的长各是多少?

2. 如图 1-16 所示, 已知点  $A(\tan \alpha, 0)$ ,  $B(\tan \beta, 0)$  在  $x$  轴正半轴上, 点 A 在点 B 的左边,  $\alpha$ ,  $\beta$  是以线段 AB 为斜边、顶点 C 在  $x$  轴上方的  $\text{Rt}\triangle ABC$  的两个锐角.

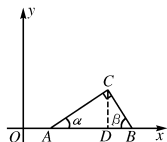


图 1-16

(1) 若二次函数  $y = -x^2 - \frac{5}{2}kx + (2 + 2k - k^2)$  的图象经过 A、B 两点, 求它的解析式;

(2) 点 C 在 (1) 中求出的二次函数的图象上吗? 请说明理由.