目　录

第九章　直线、平面、简单几何体

基本目标要求

一、掌握平面的基本性质，会用斜二测的画法画水平放置的平面图形的直观图. 了解空间图形在平面内的表示方法.

二、能够画出空间两条直线、两个平面、直线和平面的各种位置关系的图形，能根据图形想像它们的位置关系.

三、掌握空间两条直线的平行关系，直线平行关系的传递性.

四、掌握空间两条直线垂直的判定定理和性质定理.

五、了解空间直线和平面的位置关系. 掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理.

六、掌握异面直线的定义. 掌握异面直线的夹角、垂直和距离的概念.

七、掌握直线和平面垂直的判定和性质. 掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面距离的概念.

八、掌握三垂线定理及其逆定理.

九、理解二面角及二面角的平面角的概念. 掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理.

十、了解多面体和凸多面体的概念，了解正多面体的概念，理解多面体的欧拉公式.

十一、了解棱柱的概念和性质，会画直棱柱的直观图.

十二、了解棱锥的概念和性质，会画直棱锥的直观图.

十三、了解球的概念和性质，掌握球的表面积、体积公式.

十四、通过学习空间图形的性质，培养空间想像能力和逻辑思维能力.

基础知识导引

一、平面

1. 平面的概念

“平面”是一个只描述而不定义的最基本的原始概念，对这一概念应理解三点：

(1)“平面”是平的;

(2)“平面”无厚度;

(3)“平面”可以向四面八方无限延伸(与一条直线可以向两端无限延伸一样),因此,平面是无边界的.

2.平面的表示

平面通常用一个平行四边形来表示,对水平位置的平面,一般是用一个锐角为45°、横边为邻边2倍的平行四边形来表示,这个平行四边形是表示它所在的整个平面,在画铅垂平面时,要有一组对边为铅垂线,画两相交平面时,一定要画出它们的交线,此时应注意,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮住部分的线段画成虚线或不画,以加强立体感.

3.平面的基本性质

(1)判定直线在平面内的依据.

公理1　如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

(2)判定两平面有交线及交线位置的依据.

公理2　如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.如图9-1.

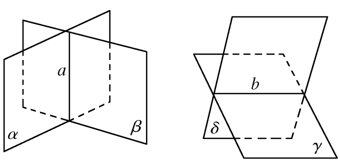


图9-1

在确定平面截多面体所得截面形状时,常常利用这个公理.

(3)确定平面的条件.

公理3　经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

推论1　经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

推论2　经过两条相交直线,有且只有一个平面.

推论3　经过两条平行直线,有且只有一个平面.

二、直线与直线(简称线线)、直线与平面(简称线面)、平面与平面(简称面面)的位置关系

1.位置关系

(1)线线.

$$\text{共面直线}\begin{cases}\text{相交直线——有且只有一个公共点；}\\ \text{平行直线}\end{cases}$$

异面直线　无公共点.

(2) 线面.

$$\left.\begin{array}{l}\text{直线在平面内}\\ \text{直线在平面外}\begin{cases}\text{直线和平面相交}\\ \text{直线和平面平行——无公共点.}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有}\frac{\text{无数}}{\text{一个}}\text{公共点；}$$

(3) 面面.

两平面平行——没有公共点的两个平面互相平行；

两平面相交——有一条公共直线.

2. 两条直线平行的判定法

(1) 在同一平面内，没有公共点的两条直线互相平行.

(2) 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(3) 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

(4) 如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

(5) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

(6) 三个平面两两相交于三条直线，如果其中两条平行，那么第三条也和它们平行.

3. 两条直线垂直的判定法

(1) 一条直线垂直于一个平面，则它和平面内的任何一条直线都垂直.

(2) 如果一条直线和两条平行直线中一条垂直，那么它也和另一条垂直.

(3) 如果一条直线平行于一个平面，那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.

(4) 三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

(5) 三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

4. 直线和平面平行的判定法

(1) 如果一条直线和一个平面没有公共点，那么这条直线和这个平面平行.

(2) 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

(3) 如果平面外的两条平行线中有一条和平面平行，那么另一条也和这个平面平行.

⑷ 如果两个平面平行，那么一个平面内的任何一条直线都平行于另一平面.

⑸ 一个平面和不在这个平面内的一条直线都垂直于另一个平面，那么这条直线平行于这个平面.

5. 直线和平面垂直的判定法

⑴ 如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

⑵ 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

⑶ 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

⑷ 如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

⑸ 如果两个相交的平面都垂直于第三个平面，那么它们的交线也垂直于第三个平面.

⑹ 如果三条共点直线两两垂直，那么其中一条直线垂直于另两条所确定的平面.

6. 平面和平面平行的判定法

⑴ 如果两个平面没有公共点，那么这两个平面互相平行.

⑵ 如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

⑶ 垂直于同一直线的两平面互相平行.

⑷ 平行于同一平面的两平面互相平行.

7. 平面和平面垂直判定法

⑴ 两个平面相交，如果所成二面角是直二面角，那么这两个平面互相垂直.

⑵ 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

⑶ 如果一个平面与另一个平面的平行线垂直，那么这两个平面互相垂直.

三、直线与直线、直线与平面、平面与平面的度量关系

1. 夹角

⑴ 两条异面直线所成的角.

①过空间任一点，分别作两条异面直线的平行线，所得两相交直线夹的锐角（或直角）（图 9-2 ⒜），叫做这两条异面直线所成的角.

②连同共面的两条直线一并考虑，空间两条直线所成的角 θ 的范围是 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$.

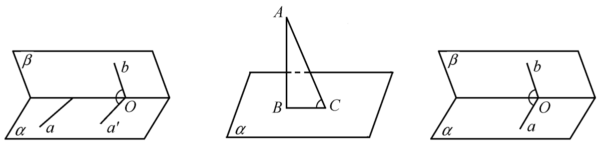
⑵ 直线和平面所成的角.

①平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角，如图 9-2 ⒝.

②一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角.

③一条直线和平面平行或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$的角.

④直线和平面所成的角 θ 的范围是 $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$.



(a)　(b)　(c)

图 9-2

⑶ 二面角的平面角.

①以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角称作二面角的平面角，如图 9-2 ⒞.

二面角的大小，可以用它的平面角度量.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

②设二面角的平面角为 θ，则 θ 的范围是 $0° < \theta \leqslant 180°$（构成二面角的两个半平面在同一平面时，二面角是 $180°$的二面角，但一般不研究此情况）.

③两个平面平行，我们说它们所成的角是 $0°$的角. 两个平面相交构成四个二面角，其中相对的两个二面角的平面角可以成为对顶角，因此空间两个平面所成的角 θ 的范围是 $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$.

2. 垂直（见表 9-1）

表 9-1

	线　线	线　面	面　面
定义	如果两条直线所成的角是直角，就说这两条直线互相垂直.	如果一条直线和一个平面内的任意一条直线都垂直，就说这条直线和这个平面垂直.	两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

续表

	线 线	线 面	面 面
判定	①根据定义判定. ②三垂线定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直. ③三垂线定理的逆定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直. ④一直线垂直于两条平行线中的一条,它也垂直于另一条. ⑤平面几何中所有判断垂直的法则.	①如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面. ②如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.
性质	如果两条直线互相垂直,那么这两条直线所成的角等于 90°.	①和一个平面垂直的直线,垂直于这个平面内的任一直线. ②两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.	两个平面垂直,那么:①在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面. ②经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线,在第一个平面内.

3.距离

(1)两条异面直线的距离.

①两条异面直线的公垂线——和两条异面直线都垂直相交的直线.

②两条异面直线的距离——两异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度.

(2)直线和平面的距离.

一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到平面的距离,称作这条直线和平面的距离.

(3)两个平行平面的距离.

和两个平行平面同时垂直的直线,称作两个平行平面的公垂线;它夹在这两个平行平面间的部分,称作这两个平行平面的公垂线段.公垂线段的长度称作两个平行平面的距离.

四、空间图形的表示

1.空间图形和平面图形

空间图形是由空间的点、线、面所构成,也可以看成是空间点的集合.例如,长方体、圆柱、圆锥等,都属于空间图形.

平面图形是由同一个平面内的点、线所构成的图形.

平面图形是空间图形的一部分;空间图形是由平面图形表示的.

立体几何的研究对象是空间图形;但对空间图形的研究是通过对表示它的平面图形的研究,并借助于平面几何知识来实现的.

2. 立体几何中空间想像能力的含义

空间想像能力指的是人们对客观事物的空间形式进行观察、分析和抽象的能力.在立体几何中,这种能力具体表现在三个方面:

⑴ 根据对空间图形的感觉,按规定在平面上画出表示它的图形.

⑵ 根据对表示空间图形的平面图形的分析,复原出空间图形的形象.

⑶ 根据语言或式子,勾画空间图形的形象,并画出表示它的平面图形.

因此,从本质上看,在立体几何中,空间想像能力正是实现将表示空间图形的平面图形和空间图形相互转化的能力.

3. 空间图形的表示

表示空间图形的平面图形,如果画得好,能使我们获得较强的立体感.

⑴ 用直观图表示空间图形.

直观图是空间图形的标准表示法,能使我们获得最强的立体感,初学者要花一些时间熟悉它的画法.

⑵ 空间图形的平面草图.

解立体几何问题,不需要每次都画出空间图形的直观图,常常只要画个草图.因为人们在解题时遇到最多的是草图,因此,要注意增强草图的立体感.

①要尽可能熟练掌握一些接近直观图画法的标准画法.

例如,练习以下两相交平面的画法,如图 9-3.

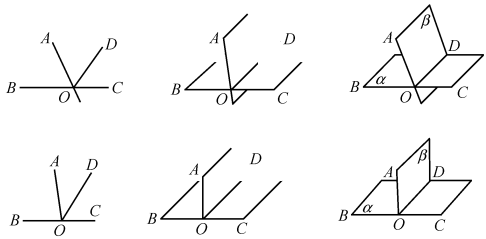
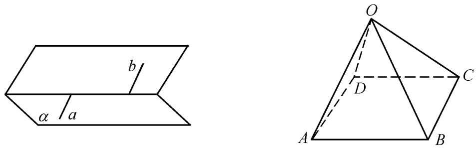


图 9-3

从图中不难发现,当 AO 与 BC 斜交时,给人以平面 α 和 β 斜交的印象;当 $AO\perp BC$ 时,给人以平面 α 和 β 垂直的印象.

②利用理性认识,强化立体感.

用平面图形表现空间图形,毕竟曲解了空间图形的本来面貌.因此,应努力加强理性认识,烘托图形的立体感,并避免可能产生的错误.比如,仅靠直观,往往把图9-4(a)中的a、b两直线看成是平行直线.对图9-4(b)的正四棱锥,如果仅靠直观,由于平面OAB、OCD的交线难以画出,无法作出这两个半平面所成二面角的平面角.



(a) (b)

图9-4

(3)熟悉长方体,利用长方体.

长方体是人们最熟悉的几何体之一.它的直观图不但好画,而且立体感特别强.立体几何中的许多重要概念,例如异面直线、异面直线所成的角和距离,都能借助长方体予以表示.因此,研究长方体,对提高空间想像能力大有裨益.

五、多面体与球(见表9-2)

表9-2

名　称	性　质
棱柱	①侧面和经过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形. ②两底面平行,并且平行于底面的截面与底面是全等的多边形.
直棱柱	侧棱垂直于底面,各侧面是矩形.
正棱柱	底面是正多边形且是直棱柱.
平行六面体	底面和侧面都是平行四边形,是中心对称图形.
长方体	底面和侧面都是矩形,对角线相等.
正方体	棱长相等,各面都是正方形.
正多面体	各面是全等的正多边形,正多面体只有五种.
棱锥	①底面是多边形,各侧面是有一个公共顶点的三角形. ②平行于底面的截面与底面相似,它们的面积的比等于顶点到截面的距离与棱锥高的平方比.
正棱锥	①底面是正多边形,顶点在底面内的射影是底面的中心. ②各侧棱相等,侧面是全等的等腰三角形.
球	①截面是圆,过球心的截面是大圆. ②球心和不是大圆的截面的圆心的连线垂直于截面. ③球面积$S=4\pi R^2$,球体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

重点难点点拨

本章重点是空间元素的位置关系(平行、垂直、异面直线)的判断,空间距离和空间角的计算;棱柱的概念及其分类,棱柱的性质;棱锥的概念及正棱锥的性质;球的性质及其表面积公式和体积公式;多面体及球的截面问题;以及培养推理、判断能力、逻辑表达能力、计算能力和空间想像能力.

本章难点是平面概念的理解和深化;掌握用反证法证明命题的思路;利用平面的基本性质论证有关点或线的共面问题;求异面直线所成的角与距离;用集合观点认识空间图形并会正确运用符号语言;能作含主要元素的截面图,能将立体几何问题转化为平面几何问题解决;能灵活运用“割补法”,将复杂的几何体分解成几个简单的几何体,或者将几个较复杂的几何体组合成一个较简单的几何体;能进行以简单几何体为背景的空间基本元素的位置关系的证明及有关计算.要掌握上述的重点、难点,必须注意以下问题.

一、共面、共线、共点的判定

1. 正确理解公理及推论中的意义

公理及推论中的“有且只有一个”应理解为:“有”说明图形是存在的,“只有一个”说明图形是惟一的,“有且只有”和“确定”是同义词.

2. 平面的表示

(1) 用平面图形表示平面.

平面常用平行四边形表示,也可用三角形、梯形及圆等平面图形表示.根据公理3及三个推论,还可以用不共线三点、一条直线和直线外一点、两条相交直线、两条平行直线等任一种平面图形表示平面.在适当场合使用第三种平面图形表示平面,可以减少辅助线的条数,还可以提高空间想像能力.例如,在正方体AC'中,矩形$AB'C'D$可以表示过AD、$B'C'$的平面,如图9-5(a);$\triangle AB'C'$可以表示过AD、$B'C'$的平面,如图9-5(b);两条平行直线AD、$B'C'$也可以表示过AD、$B'C'$的平面,如图9-5(c).

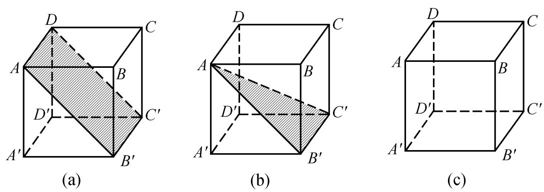


图9-5

(2)平面和截面.

截面是和平面相关的概念.几何体被平面所截,平面与几何体的接触部分便是截面.例如,图 9-5(a)中的矩形 $AB'C'D$ 就是正方体 AC' 的一个截面.由于截面 $AB'C'D$ 和 $\triangle B'C'A$ 都可以表示过 B'、C'、A 三点的平面,因而容易使初学者产生错觉,以为可以用截面的一部分表示截面.例如,把 $\triangle B'C'A$ 看成是过 B'、C'、A 三点的正方体的截面,如图 9-5(b).

(3)防止把不共面的直线当作共面直线来处理,导致推理判断错误.

例如,直线 AC、DF 被三个平行平面 α、β、γ 所截,已知 $AB=10\ \text{cm}$,$BC=12\ \text{cm}$,$DE=8\ \text{cm}$,求 EF,如图 9-6(a).解此题时,初学者往往把 AC、DF 看成是共面的,从而在把 AD、BE、CF 看成是平行直线后,得出 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 的结论,最后求出 $EF=9.6\ \text{cm}$,如图 9-6(b).这里,尽管得出的结论和答案都是正确的,但推理过程错了.其实,应该把 DF 平移至 AF',最后在 $\triangle ACF'$ 所在平面和平行四边形 $AF'FD$ 内解决问题,如图 9-6(c).

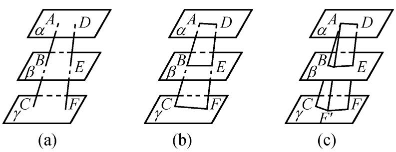


图 9-6

二、异面直线问题

对异面直线问题要理解以下四点:

(1)"不同在任何一个平面内的两条直线",是指不可能同时在任何一个平面内,因此它们是既不平行也不相交的.

(2)分别在两个平面 α、β 内的两条直线 a、b,不一定是异面直线,如图在 9-7(a)中的两直线 a、b 虽分别在平面 α、β 内,但它们相交于两相交平面 α、β 的交线 AB 上一点 P;又如图 9-7(b)中的两直线 a、b 也虽分别在两平面 α、β 内,但它们

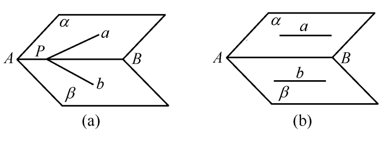


图 9-7

均平行于两相交平面 α、β 的交线 AB，像这样的两条直线 a、b 是共面的. 除此之外，在两个平面内的两条直线都是异面直线.

⑶ 画异面直线时以辅助平面为衬托，可使两直线不能共苗的特点显示得更清楚，如图9-8，否则就会分不清是不是异面直线.

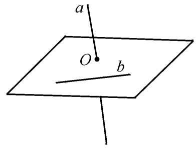


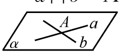
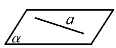
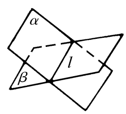
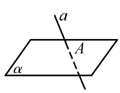
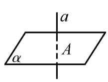
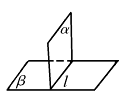
图 9-8

⑷ 异面直线所成的角，是将它转化为两条相交直线所成的锐角（或直角）来确定的. 其办法是把两条异面直线中的一条平移到另一条所在的平面中来，在同一平面中求相交直线所成的角. 这种平移法是求异面直线所成角的常规法. 将空间两异面直线所成的角，转化成平面上相交直线的夹角，这是课本上第一次实现了空间问题到平面问题的转化，第一次展示了将空间问题转化为平面问题的一个重要手段——平移.

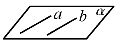
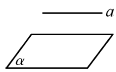
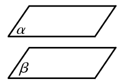
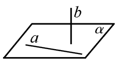
三、平行与垂直关系的问题

平行与垂直是立体几何研究的核心，为了将其核心的内部结构和规律揭示清楚，我们将平行与垂直的各种情况列成表 9-3.

表 9-3

<table>
<tr><th>位置关系</th><th>直线与直线（不重合）</th><th colspan="3">直线与平面</th><th colspan="2">平面与平面</th></tr>
<tr><td rowspan="3">有公共点</td><td rowspan="3">两直线相交
$a\cap b=A$

（共面）</td><td>直线在平面内</td><td colspan="2">
$a\subset\alpha$</td><td rowspan="2">斜交</td><td rowspan="2">
$\alpha\cap\beta=l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直线在平面外</td><td>斜交</td><td>
$a\cap\alpha=A$
且 a 不垂直于 α</td></tr>
<tr><td>垂直</td><td>
$a\cap\alpha=A$
且 $a\perp\alpha$</td><td>垂直</td><td>
$\alpha\perp\beta$</td></tr>
</table>

续表

位置关系	直线与直线（不重合）	直线与平面			平面与平面	
无公共点	两直线平行（共面）  $a//b$	直线在平面外	平行	 $a\cap\alpha=\varnothing$即 $a//\alpha$	平行	 $\alpha//\beta$
	两直线异面  $a\cap b=\varnothing$且 $a \nparallel b$					

四、角和距离的问题

1. 求角

（1）异面直线所成的角.

①求异面直线所成角的一般方法和步骤.

a. 作图：依定义和图形性质作出要计算的角 θ；

b. 证明：通过平行或垂直关系证明 θ 是所求的角；

c. 计算：解含 θ 的三角形.

②异面直线上的两点间距离公式.

$EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\alpha}$（其中 α 是异面直线所成的角，EF 的长是异面直线上两点间的距离，公垂线段 AA' 的长为 d，$A'E=m$，$AF=n$）.

③三垂线定理及其逆定理或者直线与平面垂直的定义. 对于两异面直线成 $90°$ 角的情况可通过证明两线垂直，从而求得所成角为 $90°$.

（2）斜线与平面所成的角.

解题依据：斜线与平面所成角的定义. 通过斜线上某个特殊点找出或作出平面的垂线，得到斜线在平面上的射影，由垂线段、斜线段及其斜线段的射影组成直角三角形，然后解这个三角形求出斜线与它的射影所夹的锐角.

（3）二面角.

解题依据：二面角的定义.

①找出或作出二面角的平面角.

作平面角一般根据图形特点，有以下几种：

a. 经过二面角棱上的特殊点，分别在两个面内作垂直于棱的射线，得出平面角.

b. 已知二面角内一点到二面角的面或棱的距离时，则经过表示距离的两条垂线段作平面与二面角的两面相交，证明交线所成的角是二面角的平面角.

c. 已知二面角一个面内一点到棱或到另一面的距离时，应用三垂线定理或其逆定理产生平面角.

d. 由特殊图形性质产生平面角(例如，利用等腰三角形底边上的中线也是底边上高的性质等).

②公式法.

设二面角为 θ.

a. 已知二面角一个面内的图形面积为 S，这个图形在另一个面内射影的面积为 S'，则应用 $\cos\theta=\dfrac{S'}{S}$，求出 θ.

b. 如图 9-9. 在二面角 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ 内，$E\in\alpha$，$F\in\beta$，$EA\perp AB$，$FB\perp AB$，$AB=d$，$EA=m$，$FB=n$，$EF=l$，应用公式

$$l=\sqrt{d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta}$$

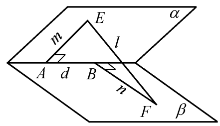


图 9-9

即 $\cos\theta=\dfrac{d^2+m^2+n^2-l^2}{2mn}$ (此处 $\theta\in(0,\pi)$)，

90°的二面角，还可应用判定两平面互相垂直的方法.

注意　怎样作异面直线所成的角呢？可通过以下三种方法平移产生：①直接平移法(利用图中已有的平行线)；②中位线平移法(利用三角形中位线性质，作出中位线就相当于把底边平移到中位线)；③补形平移法(在已知图形外，补作一个同样大小的几何体，以便找出平行线).

2. 求距离

解题依据：各种距离的定义. 点、直线、平面间的距离.

首先找到或作出表示距离的图形. 这种图形产生的方法，例如：

(1) 点到直线的距离：利用平面图形的性质；直线与平面垂直的性质；此外，利用三垂线定理及其逆定理也是不可忽视的重要方法.

(2) 点到平面的距离：利用特殊图形的性质确定垂足的位置；或利用平面互相垂直的性质，即如果已知点在已知平面的垂线上，则已知点到两平面的交线所作的垂线长就是点到平面的距离.

(3) 两条异面直线间的距离：利用图形性质找出两条异面直线的公垂线，求出公垂线段的长度. 例如：当两条异面直线垂直时，过一条直线作出或找出另一条直线的垂面，在垂面内作出两异面直线的公垂线.

(4) 平行的直线和平面、两平行平面间的距离：一般都转化为点到平面的距离.

有些情况，可以不作出表示距离的图形. 如：

①点到平面的距离 利用等积求高计算.

②两条异面直线间的距离：

a.利用异面直线上两点间的距离公式；

b.转化为求平行的直线和平面或两平行平面间的距离，即又转化为求点到平面的距离，从而应用等积求高计算；

c.运用二次函数求最值等.

五、空间问题转化为平面问题的方法

1.辅助平面法

恰当地作辅助平面，是将空间问题转化为平面问题的一个重要手段.求证平行于两条异面直线的平面，必与异面直线的公垂线垂直，只要过 AB 和 a 以及 AB 和 b 分别作平面，与已知平面得交线 a'、b'，由已知 $a\parallel\alpha$ 得 $a\parallel a'$，由 $b\parallel\alpha$ 得 $b\parallel b'$，又 $AB\perp a$，$AB\perp b$，所以 $AB\perp a'$，$AB\perp b'$.又 $a'\cap b'=O'$，则 $AB\perp\alpha$.作两个辅助平面，将 AB 与异面直线垂直（空间）转化为 AB 与同一平面内两条相交直线垂直，问题就迎刃而解了.

2.射影法

平面的一条斜线与平面所成的角就是斜线与它在平面内的射影所成的角.判定斜线与平面内某一直线垂直的问题，实际上就是判定斜线在平面内的射影与平面内一直线垂直的问题，因此通过射影可把空间问题转化为平面问题.三垂线定理及有关射影的概念和定理，为射影法提供了理论根据.已知四面体两组对棱互相垂直，求证第三组对棱互相垂直.通过作 $AO\perp$底面，得到三条侧棱在底面的射影，进而用三垂线定理及逆定理，将空间直线垂直的条件转化为平面内的直线互相垂直的关系，由此得 O 是垂心，再将平面内的垂直关系转向空间，证明第三组对棱垂直.

3.平移法

由于直线的平移不改变它与另一直线或平面所成角的大小 平面的平移不改变它与另一平面或直线所成角的大小，因此，通过平移可将空间图形问题转化为平面问题.

4.证题方法的转化

立体几何中，证明线与线、线与面、面与面之间的平行与垂直关系是学习本章的两条主线.

线线平行⇒线面平行⇒面面平行.

线线垂直⇒线面垂直⇒面面垂直.

就是说，要证面面平行（垂直），先证线面平行（垂直）；要证线面平行（垂直），先证线线平行（垂直）.这种转化思想，为证题思路及突破口的选择提供了明确的方向.

值得注意的是，这个思想及转化的方向是可逆的，许多情况下，为了证线线垂直，先由某些条件证明线面垂直，然后由性质定理得到线线垂直. 同样地，要证线面垂直，也可先证面面垂直. 这就是说：

面面平行⇒线面平行⇒线线平行.

面面垂直⇒线面垂直⇒线线垂直.

这条线索代表了线线、线面、面面平行与垂直的性质定理及其关系. 掌握好转化的思想和方法，对培养推理能力和提高解题应变能力十分有益.

六、求积方法 截、展、拆、拼

解决求积问题，除了理论基础以外，方法的运用也很重要. 总的来说，求积方法可以概括成四个字 截、展、拆、拼.

“截”指的是截面，平行于柱、锥、台底面的截面，旋转体的轴截面都是帮助我们解题的有力工具.

“展”指的是侧面或某些面的展开图，例如，在解与圆柱、圆锥、圆台的侧面积有关的问题时，常常是既要用到轴截面，又要画出侧面展开图. 在图9-10的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，P、M 分别为 AA'、BC 的中点，求出从 P 点沿着正方体的表面 AB' 和 AC 到 M 点的最短路线. 解这个题目时，需要将上底面 AC 掀开使之与面 AB' 处于同一个平面. 这时 M 点落到 BC'' 的中点处，PM'' 与 AB 的交点设为 N，连 NM，从 P 沿着 PN、NM 的路线到 M，即为所求的最短的路线.

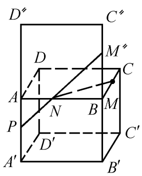


图 9-10

“拆”指的是将一个几何体拆成几个几何体. 课本上证明三棱锥的体积公式所用的方法是 将一个三棱柱拆成三个等积的三棱锥. 在解题时，为了保持原图清晰，也为了增强我们所关心的那部分几何体（也可以是一个面）的立体感，可以将其拿出来另画.

“拼”指的是将小几何体嵌入一个大几何体中去，例如求三棱锥的体积公式，既可以像上面那样用拆的方法，也可以用“拼”的方法，即将三棱锥复原成一个三棱柱，由柱的体积公式求锥的体积公式. 在第一章的例题和练习中，常将一个三棱柱复原成一个四棱柱，这也是用拼的办法.

熟练地掌握这几种方法，对提高空间想像能力、解题能力和发散思维能力都是有好处的.

七、正多面体与欧拉定理

1. 多面体

由若干个多边形围成的几何体叫多面体.

2. 凸多面体

把多面体任何一个面伸展为平面，如果所有其他各面都在这个平面的同侧，