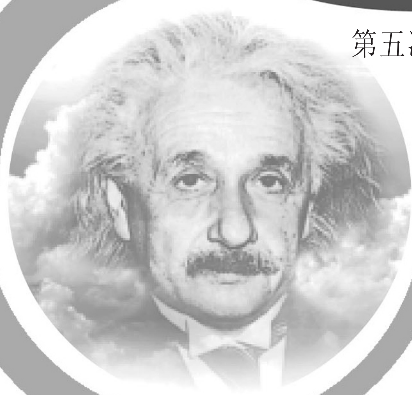
发散思维大课堂



高二数学(下)

第五次修订版

源　流　本书主编

陈明铸　于建东　王惠英　叶畋田　源　流
林　丰　丁　一　郭浩茹　郭莉君　编　著

龍門書局

北　京

举报电话：(010)64034160，13501151303(打假办)
邮购电话：(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

发散思维大课堂．高二数学．下/希扬主编；源流分册主编；源流等编著．—修订版．—北京：龙门书局，2002
ISBN 7-80160-400-8

Ⅰ．发…　Ⅱ．①希…②源…③源…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第081862号

责任编辑：徐　菡　佟艳丽 / 封面设计：东方上林

龍門書局 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.longmenbooks.com

印刷
科学出版社发行　各地书店经销
*
2002年1月第一版　开本：A5(890×1240)
2006年11月第五次修订版　印张：10 3/4
2006年11月第七次印刷　字数：334 000

定　价：15.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

出版说明

本丛书自 1999 年面世以来，深受读者喜爱。今年根据教材的最新变化和中（高）考发展的新动向，以及国家义务教育课程标准的新理念、新思想、新方法、新目标，在保留原书精华的基础上，进行了如下重大修订：

一、去陈换新，删繁就简。新增补最新中（高）考“能力型、开放型、应用型、阅读理解型、探究型、综合型”试题，特别对联系生产、生活和科学实际的单学科综合题、多学科综合题作了重点增补。选题精活，解法巧妙，源于教材，高于教材。

二、对习题进行了严格的审查、验算，突出了知识转化为能力的特色。

三、在经典例题之后，加上“点拨”、“指点迷津”、“解后反思”、“解法指导”、“点悟”等小栏目，达到开启心扉、挖掘潜能的目的。

四、课标本经高比例、大手笔、精雕细刻地修订后，以全新的栏目、完美的内容，震撼上市。它有五大特色：

1.改同步到章（或单元）的结构为主体部分同步到节（或课），增强本丛书的科学性、系统性、针对性和实用性。

2.突出知识、能力、素质三位一体的教学模式，营造自主、合作、互动的学习氛围，构建方法、实践、创新的学习过程，从而达到整合思维，全面提升综合能力、创新能力的目的。

3.强化“发散思维分析”栏目，以重点、难点、知识点为主线拓展发散思维，并在其中精心设计新颖的探究问题，引导学生由浅入深地经历探究过程，点点透析，层层递进，逐步提高，激发学生思维的活性，提高学生解决实际问题的能力。

4.增补发散思维延伸题、课标新题、中考名题，点击中考热点内容，提高学生的应试能力。

5.答案增加题目全解，并在相应章节设置课本习题答案。同时，为满足学生复习之需，针对本年度全国中考命题的发散趋势，精心拟编期中测试题、期末测试题各一套，综合测试题两套，并附全解。

五、按照新课程标准改革的要求，本丛书配备课标本如下：

人教版课标本　语文、数学、英语（新目标）、物理、化学

北京师大版课标本　数学、物理

江苏版课标本　语文

江苏版课标本　物理、数学

华东师大版课标本　数学

语文版课标本　语文

序言

XUYAN

《发散思维大课堂》丛书自1999年问世以来，年年修订，一版再版，以其在素质教育方面的卓越贡献在当今教辅书界独领风骚，如潮好评涌动大江南北，发散美名畅行黄河内外。

打开此书，一个奇妙的学习世界立刻展现在你眼前：这里有一题多法、多题一法的解法发散，有将典型题转换题型的题型发散，有保持原命题的实质而变换其形式的转化发散，有把一个复杂题目分解成单纯命题逐个加以分析解决的分散发散，有克服思维定势、不循常规解题思路的探究发散，还有纵横发散、组合发散、逆向发散、迁移发散、综合发散等思维解题法。在这里，你的知识变成了可分可合、可纵可横的有生命力的活跃分子，在这里，你的思维享受到了高度活跃的创造的快乐。

这，就是《发散思维大课堂》！

时代在前进，教育在发展。新世纪的教育，特别强调学生多维智力的发展，培养和造就有慧心、会学习、能创新的人才，是我们教育工作者和出版工作者的神圣使命。对学生多维智力的培养，在宏观上涵盖对学生学习全部课程的编排，在微观上则指学习中对学生智力的多维开发与应用。《发散思维大课堂》一书，正是在学习上为学生多维智力的培养提供了一片新天地。

发散思维也叫求异思维，是一种多向思维方式。形象地说，它就是从一个知识点出发，向知识网络空间发出的一束射线，它与两个或多个知识点之间形成联系，收到“一个信息输入、多个信息产出”的功效，体现出极强的多向性、变通性和创造性。运用到学习上，发散思维可以架起由已知达未知的桥梁，创造出新的思路和解题方法，能提高悟性，变知识为智力，真正实现举一反三、触类旁通的思维效果。

本书有别于其他同类书籍的显著特点，是它充分发挥了教辅书“辅底拔尖”的功能。

教辅书之所以有存在的必要，就在于它具有“辅底拔尖”的功能。所

谓“底”，就是每门课程的核心知识，就是每个知识单元的基本知识点。这个基本点是学生对知识理解与运用的基础，是立足之本。所谓“拔尖”，就是对基本知识点的延伸、提高和润色。教辅书要源于教材，又要高于教材，如果说“辅底”是教辅书的基本功能，那么“拔尖”就是它的灵魂，是它生命力之所在。基于对教辅书的这种认识，本书从高标准、新角度、大视野、广思路四方面来体现了针对性和创新性。

把发散思维引入学和练的全程，全书以发散思维导练为主体结构，是本书的又一特点。在具体运用上，它分为两部分：

发散思维分析　从知识点、重点、难点出发，分析本知识单元的知识内容及相互关系，并运用发散思维的方法揭示思维规律，突出解题技巧，以达到融会贯通的目的。

发散思维应用　精选典型例题，通过重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维，培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、书写表达、多解多变等全方位的能力。

去粗取精、以质取胜，是本书的第三个显著特色。

新世纪的教育，在课程内容的编排上，要求“以质取胜”，教师的课堂讲解要求“少而精”，教辅书更应去粗取精、以质取胜，使学生在减轻负担的前提下学得更好，这也是本书追求的目标。因此，本书设计栏目的原则是：帮助学生梳理知识结构，启发解题思路，点拨方法技巧，提供最新信息，提高应试能力。

本书为你打开奇妙无比的学习天地，愿你在这个精彩的世界里汲取养分，以期来日成功地叩开大学名校之门。

希　扬

MULU 目录

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章　排列、组合和概率

第九章　直线、平面、简单几何体

本章知识梳理

1. 知识目标定位

(1)掌握平面的基本性质,会画水平放置的平面图形的直观图.

(2)了解空间两条直线的位置关系.掌握两条直线平行与垂直的判定定理和性质定理.掌握两条直线所成的角和距离的概念.

(3)掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理.掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理.掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离等概念.了解三垂线定理及其逆定理.

(4)掌握两个平面平行的判定定理和性质定理.掌握二面角、二面角的平面角、两个平面间的距离的概念.掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理.

(5)理解空间向量的概念,掌握空间向量的加减法、数乘和数量积运算及其性质,理解空间向量坐标的概念,掌握空间向量的坐标运算,掌握空间两点间的距离公式.

(6)了解棱柱、棱锥的概念,掌握其性质,会画直观图.

(7)了解多面体、正多面体和凸多面体的概念,了解多面体的欧拉公式.

(8)了解球的概念,掌握球的性质,掌握球的表面积、体积公式.

2. 能力目标定位

(1)从对空间几何体的整体观察入手,遵循从整体到局部、具体到抽象的原则,认识空间图形,一般通过直观认识空间图形,培养和发展学生的空间想像能力.

(2)以长方体为载体,通过直观认识、操作确认、思辩论证等方法,去判断或证明空间点、线、面的位置关系.

(3)学会将自然语言转化为图形语言和符号语言.

11 平面的基本性质

发散思维分析

一、平面的概念

“平面”是一个只描述而不定义的最基本的原始概念,对这一概念应理解三点:

(1)“平面”是平的;

(2)“平面”无厚度;

(3)“平面”可以向四面八方无限延伸(与一条直线可以向两端无限延伸一样),因此,平面是无边界的.

二、平面的表示

平面通常用一个平行四边形来表示,对水平位置的平面,一般是用一个锐角为45°、横边为邻边2倍的平行四边形来表示,这个平行四边形是表示它所在的整个平面,在画铅垂平面时,要有一组对边为铅垂线,画两相交平面时,一定要画出它们的交线,此时应注意,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮住部分的线段画成虚线或不画,以加强立体感.

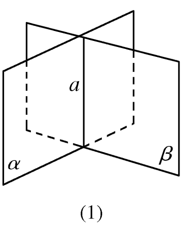
三、平面的基本性质

1. 判定直线在平面内的依据

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

2. 判定两平面有交线及交线位置的依据

公理2 如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.如图9-1-1.



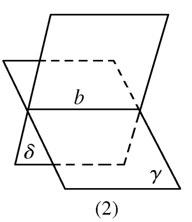


图9-1-1

在确定平面截多面体所得截面形状时,常常利用这个公理.

3. 确定平面的条件

公理 3 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线,有且只有一个平面.

四、立体几何中的符号语言

立体几何的符号语言是用集合的符号语言来表示的,即把空间看作点的集合,直线、平面都是空间的子集,直线是平面的子集.

数学符号表示	数学语言表达
$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 在直线 a 外
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$a \subset \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a,b 相交于点 A
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α,β 相交于直线 a

本节重点是平面的概念和平面的基本性质,它是研究本章立体图形的基础.

本节难点是平面的概念,它是描述性的无定义的基本概念,其无限延伸性只能想像地加以理解.

为了掌握以上重、难点,必须注意以下问题:

(1)学习中要掌握平面的基本性质,明确公理及推论的作用.

(2)描述平面基本性质的三个公理是学习本章内容的基础,学习中要注意从不同的角度去加深对这三个公理的理解.既能从文字上强记这三个公理,也能辅之以图形语言和符号语言去帮助记忆,更要注意从三个公理的主要作用上去理解、熟悉这三个公理.公理 1 的主要作用是判定点、直线与平面的依附关系;公理 2 的主要作用是判定两个平面相交与否以及判定平面的公共点与它们交线的关系,是证明“点共线”的依据之一;公理 3 则主要用于确定平面,为我们解决空间问题寻找依托.

(3)充分理解“有且只有一个”的含义.

以三个推论的证明为例,“有且只有一个”问题的证明应该分为两步——第一步证明存在性;即证明这样的平面一定存在,一般可以依据公理 3,设法找到不共线的三个点,也就找到了存在着的一个平面;第二步证明惟一性,即证明这样的平

面只有一个，基本思路是证明具有题设条件的平面一定就是第一问中找到的那一个．初学者往往不能理解的是：既然不共线的三点有且只有一个平面，而证明的第一步已经找到了一个过三个不共线的点的平面，为什么还要证明只有一个呢？这里要强调的是过三个不共线的点的平面是惟一的，但过一点一线的平面、过两条相交直线的平面或过两条平行线的平面是否还是惟一的，只有说明了“凡是具有这样条件的平面也一定经过第一步中找到的三个点”才能最后确定．

(4)掌握证明多点共线、多线共点、多线共面等问题的思路．

类比初中平面几何学习中证明多点共线、多线共点问题的方法，结合立体几何图形的特点与空间新学习到的公理和推论，证明多点共线、多线共点、多线共面等问题的基本方法手段分别是：

①多点共线——证明诸点分别是两个平面内的点，也即证明所有的点都在某两个平面交线上；

②多线共点——找到其中某两条直线的交点后，证明该交点也在别的直线上；

③多线共面——证明两条直线共面后，证明其余各条直线都在这个平面内．

发散思维应用

典型例题

如图 9-1-2 所示，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 中点，F 为 AA_1 的中点，求证：

(1) E、C、D_1、F 四点共面；

(2) CE、D_1F、DA 三线共点．

分析　空间诸线共点问题，可视其中某线为两平面的交线，其余直线的交点为两个平面的公共点，因而在两个平面的交线上，故可证诸线共点．

证明　(1)分别连结 EF、A_1B、D_1C．

$\because$ E、F 分别是 AB 和 AA_1 的中点．

$\therefore$ $EF /\!/ A_1B$，且 $EF=\frac{1}{2}A_1B$．

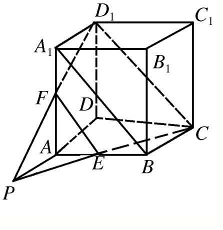


图 9-1-2

又∵ $A_1D_1 \underline{\mathbin{/\!/}} BC$，

∴四边形 A_1D_1CB 是平行四边形.

∴ $A_1B /\!/ CD_1$，从而 $EF /\!/ CD_1$.

由推论3，EF 与 CD_1 确定一个平面.

∴ E、F、D_1、C 四点共面.

(2)∵ $EF \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}CD_1$，

∴直线 D_1F 和 CE 必相交，设 $D_1F \cap CE = P$，

∵ $D_1F \subset$ 平面 AA_1D_1D，$P \in D_1F$.

∴ $P \in$ 平面 AA_1D_1D，

同理，$P \in$ 平面 $ABCD$.

而平面 $ABCD \cap$ 平面 $AA_1D_1D = AD$.

∴ $P \in AD$，∴ CE、D_1F、DA 三线共点.

典例剖析　证明若干点或若干线共面，常有两种途径：第一种是先由部分元素确定一个平面，再证其他元素也在该平面内；每二种是全体元素确定若干个平面，再证这些平面重合.

题型发散

发散1　选择题

(1)已知下列四个命题：

①任意三点确定一个平面；②若点 P 不在平面 α 内，而 A、B、C 三点都在平面 α 内，则 P、A、B、C 四点一定不共面；③两两相交的三条直线都在同一个平面内；④两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

其中正确命题的个数是　　（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

分析　用直接法.

解　①不正确，任意三点含有共线三点的情况，而三点共线时，经过这三点的平面可以有无数多个，不能被确定；

②不正确，同样存在 A、B、C 三点共线的情况，当 A、B、C 三点共线时，由于点 P 不在平面 α 内，所以点 P 不在直线 AB 上，由推论1，可知 P、A、B、C 四点共面；

③不正确，两两相交的直线可能相交于同一个点，此时三直线可能不共面，如

从长方体一个顶点出发的三条直线,它们两两共面,但不同在一个平面内;

④依然不正确,将一个平行四边形沿它的一条对角线任意折起一定的角度后,得到一个空间四边形,这一四边形保持“对边分别相等”的性质,但已不是平行四边形了.

故本题应选 A.

【解法指导】 (1)运用公理及推论时,要准确把握它们成立的前提条件,不可断章取义、片面理解,同时要注意克服平面几何学习带来的知识迁移作用.

(2)给出下列三个命题:

①平行四边形就是一个平面;②矩形不能用来表示平面;③长方体的各个面可以用来表示六个不同的平面.

其中正确的命题的个数是 (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

分析 用直接法.

解 只有③是正确命题.一般地,我们用不同位置上的平行四边形表示处于不同位置的平面,长方体的六个面即可以用来表示六种不同位置上的平面.由于画法的原因,为保证作出图形的形象直观,矩形通常用来表示竖直的平面,如正面看到的墙面等.

故本题应选 B.

发散 2 判断题

(1)两条直线确定一个平面. (　　)

(2)经过一点的三条直线可以确定一个平面. (　　)

(3)点 A 在平面 α 内,也在直线 a 上,则直线 a 在平面 α 内. (　　)

(4)平面 α 和平面 β 相交于不同在一条直线上的三个点 A、B、C. (　　)

(5)两两相交的三条直线不共面. (　　)

解 (1)两条直线能否确定平面,应看这两条直线的位置关系,不给出位置关系要分情况讨论后,得出结论.两条相交直线可确定一个平面,两条平行直线可确定一个平面,除此之外的任何两条直线不能确定平面.所以,“两条直线确定一个平面”这个命题是错的,应当画“×”号.

(2)经过一点的两条直线确定一个平面,三条直线不一定能确定平面,应画“×”号.

(3)根据命题的条件,直线 a 上只有一个点在平面 α 内,而根据公理 1,直线 a 上必须有两个点在平面 α 内,直线 a 才一定在平面 α 内,这个命题是错的,应画“×”号.

(4)平面 α 和平面 β 的公共点一定在一条直线上.所以,平面 α 和平面 β 相交

于不同在一直线上的三个点 A、B、C 是错的，应画"×"号．

(5)三条直线两两相交，若不共点时这三条直线必共面，应画"×"号．

纵横发散

发散 1　A、B、C、D、E 五点，A、B、C、D 共面，B、C、D、E 共面，则 A、B、C、D、E 五点一定共面吗？

解　A、B、C、D、E 五点不一定共面．

当 B、C、D 三点不共线时，由公理 3 可知 B、C、D 三点确定一个平面 α，由题设知 $A\in\alpha$，$E\in\alpha$，故 A、B、C、D、E 五点共面于 α；

当 B、C、D 三点共线时，设共线于 l，若 $A\in l$，$E\in l$，则 A、B、C、D、E 五点共面；若 A、E 有且只有一点在 l 上，则 A、B、C、D、E 五点共面；若 A、E 都不在 l 上，则 A、B、C、D、E 五点可能不共面．

综上所述，在题设条件下，A、B、C、D、E 五点不一定共面．

发散 2　不共点的四条直线两两相交，求证这四条直线在同一平面内．

分析　不共点的四条直线两两相交，是指这四条直线没有公共点，但其中每两条直线都有一个交点，可分两种情况来考虑．第一种情况，有三条直线共点，第二种情况没有任何三条直线共点．证明这四条直线在同一平面内，应根据已知条件先确定一个平面，然后证明所有四条直线都在这个确定平面内，文字叙述的命题应先写出已知和求证．

已知：直线 a、b、c、d 不共点，且两两相交，求证：a、b、c、d 在同一平面内．

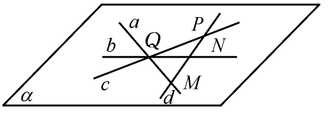


图 9-1-3

证明　分两种情况讨论．

(1)a、b、c、d 中有三条共点．设直线 a、b、c 相交于一点 Q，Q 不在 d 上，直线 d 与直线 a、b、c 分别相交于 M、N、P，如图 9-1-3．

$\because$ $Q\notin d$，$\therefore$ 点 Q 与直线 d 确定一个平面 α．

$\because$ $M\in d$，$\therefore$ $M\in\alpha$，

又$\because$ $Q\in\alpha$，$\therefore$ $a\subset\alpha$．

同理可证 $b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$．

$\therefore$ a、b、c、d 在同一平面内．

(2)a、b、c、d 中没有三条直线共点．

设直线 c 与直线 a、b 分别交于 M、N，如图 9-1-4．

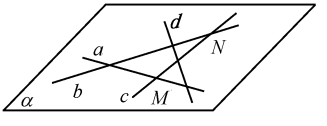


图 9-1-4

$\because$ a、b 是相交直线．

∴ a、b 确定一个平面 α.

∵ $M\in a, N\in b$,

∴ $M\in \alpha, N\in \alpha$,

∵ $M\in c, N\in c$,

∴ $c\subset \alpha$.

同理可证 $d\subset \alpha$,

∴ a、b、c、d 在同一平面内.

【解后点评】 证明几条直线在同一平面内,应先由已知的直线或点,根据确定平面的条件确定一个平面,再由公理 1 证明其余直线都在所确定的平面内.

转化发散

发散 1 已知 $a/\!/ b/\!/ c, l\cap a=M, l\cap b=N, l\cap c=P$.求证:$a$、$b$、$c$、$l$ 四条直线在同一平面内.

分析 先由 a、b 确定平面 α,且 l 在平面 α 内,再由 b、c 确定平面 β,且 l 在平面 β 内,最后证平面 α 与 β 重合,实现把空间问题转化为平面问题.

证明 如图 9-1-5,∵ $a/\!/ b$,

∴ a、b 确定平面 α.

∵ $M\in a, a\subset \alpha$.∴ $M\in \alpha$,同理 $N\in \alpha$.

又由 $M\in l, N\in l$ 及公理 1 知 $l\subset \alpha$.

同理 $b/\!/ c$,∴ b、c 确定平面 β.而 $P\in c$, $N\in b$,∴ $P\in \beta$, $N\in \beta$.

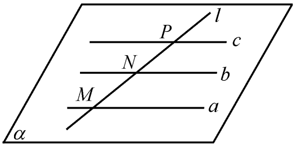


图 9-1-5

又∵ $P\in l, N\in l$,∴ $l\subset \beta$,

∵ $l\cap b=N$,∴ l 与 b 确定一个平面 β.

∵ l 与 b 既在 α 内,又在 β 内.

∴ α 与 β 必重合,故 a、b、c、l 共面.

发散 2 已知正方体 AC_1 上 E、F、G、H、M、N 分别是所在各棱的中点,求证这些中点共面.

分析 本题先证四边形 $NEFM$、$NEFG$ 各确定一个平面,然后设法证这两个平面重合,从而把空间问题转化为平面问题.

证明 如图 9-1-6 所示,易证 $NE/\!/ D_1C/\!/ MF$,所以 NE 与 MF 可以确定一个平面.

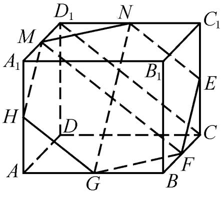


图 9-1-6

同理,四边形 $NEFG$ 也确定一个平面.这两个平面有公共元素 NE、FE.而这是两条相交直线,所以平面 $MNEF$ 与平面 $NEFG$ 重合,即 M、N、E、F、G 共面.

同理可证得点 H 也属于这个平面,即证六点共面.

解法发散

发散题 已知一直线 a 分别与两平行直线 b、c 相交.求证:a、b、c 共面.

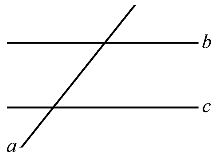


图 9-1-7

分析 1 根据公理 3 的推论 3,平行直线 b、c 确定平面 α.另根据公理 3 的推论 2,两相交直线 a、b 确定平面 γ;a、c 确定平面 β.只要证明 γ、β、α 重合即可.

证法 1 如图 9-1-7,

∵ $b /\!/ c$,∴ b、c 确定平面 α.

∵ a 和 b 是相交直线,∴ a、b 确定平面 γ.

设 a、c 的交点为 P,

∵ 点 P 和直线 b 既在平面 α 内,又在平面 γ 内,

∴ α 和 γ 重合,故,a、b、c 共面.

分析 2 两平行直线 b、c 确定平面 α,只要证明直线 a 也在这个平面内即可.

证法 2 ∵ $b /\!/ c$,∴ b、c 确定平面 α,

设 a 与 b、c 分别交于 B、C 点,

∵ $B \in \alpha$,$C \in \alpha$,∴ $BC \subset \alpha$,即 $a \subset \alpha$,∴ a、b、c 共面.

分析 3 先确定两相交直线 a、b 所在的平面 γ,再证明 c 在 γ 内.

证法 3 如图 9-1-8.

∵ a、b 是相交直线,∴ a、b 确定平面 α.

设 a、c 的交点为 P,在 α 内过 P 点作直线 $c' /\!/ b$.∵ $c /\!/ b$,$c' /\!/ b$,

∴ $c /\!/ c'$(公理 4).

既然 $c /\!/ c'$,$c \cap c' = P$,

∴ c' 和 c 重合,∴ a、b、c 共面.

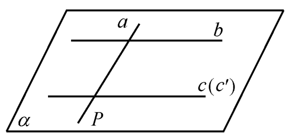


图 9-1-8

证法 3 证明的后半段使用的是同一法,课本中没有采用同一法的例题,但却配有使用同一法证明的习题.

证法 4 证明的前半段同证法 3,后半段改为反证法.假定 c 不在平面 α 内,那么在 α 内过 P 可作一直线 $c' /\!/ b$.

∵ $c' /\!/ b$,$c /\!/ b$,∴ $c' /\!/ c$.

这与 $c' \cap c = P$ 矛盾,故 c 在平面 α 内.

请读者认真领会同一法和反证法的区别.

逆向发散

发散 1 如果一条直线与一个平面平行,那么过这平面内一点而与这直线平行的直线必在这平面内.

分析 1 用反证法.

如果直线 b 不在平面 α 内,则直线 b 与平面 α 有一个公共点 A.过平行直线 a 和 b 作平面 β,则平面 α、β 有过点 A 的一条直线,设为 b',在平面 β 内直线 b 与交线 b' 相交于 A 点,$\because$ 直线 $a/\!/b$,$\therefore$ 交线 b' 也与直线 a 相交于 A,即直线 a 与平面 α 相交,这是不可能的.故过点 A 而平行于直线 a 的直线 b 必在平面 α 内.

分析 2 用同一法.

如图 9-1-9,过直线 a 和 A 点作平面 β,平面 α 与 β 有过 A 点的一条交线 b' 平行于直线 a(线面平行,线线平行),但直线 b 过 A 点也平行于直线 a,因为过 A 点与直线 a 平行的直线只有一条,所以直线 b 与交线 b' 重合,直线 b' 在平面 α 内,即直线 b 在平面 α 内.

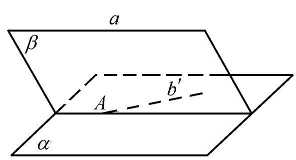


图 9-1-9

发散 2 求证过已知平面外一点且平行于该平面的直线,都在过已知点且平行于该平面的平面内.

已知:平面 $M/\!/$平面 N,$P\in N$,$P\in$直线 l,且 $l/\!/$平面 M.求证:$l\subset$平面 N.

分析 1 用反证法.

证法 1 假设 $l\not\subset$平面 N.如图 9-1-10,又因为 $P\in l$,$P\in$平面 N,所以 $l\cap$平面 $N=P$.又有条件平面 $M/\!/$平面 N,所以 l 与 M 必相交,这与题设 $l/\!/$平面 M 矛盾,故假设不成立,原结论成立.

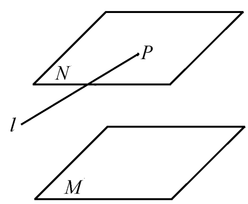


图 9-1-10

分析 2 仍用反证法,但从 l 上两点到平面 M 的距离出发.

证法 2 假设 $l\not\subset$平面 N,如图 9-1-11,过 P 作 $PA\perp$平面 M,A 为垂足,又过 l 上另一点 Q 作 $QC\perp$平面 M 交平面 M、N 分别于 C、D.

因为平面 $M/\!/$平面 N,得 $PA=CD$;又因为 $l/\!/$平面 M,得 $PA=QC$.

但点 Q 与点 D 不重合,这就自相矛盾,故假设不成立,从而有 $l\subset$平面 N.

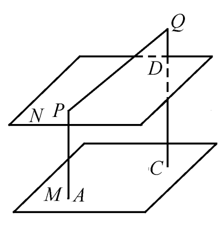


图 9-1-11