目　　录

《平行直线》教学设计

教学目标

员援了解公理 源的内容及其初步应用；

圆援初步了解空间四边形概念的定义及其画法。

教学重点和难点

空间四边形是立体几何中很重要的一个概念，它与第二章中所讲的三棱锥、四面体这两个概念是相互联系、相互转化但是又有区别的三个不同的概念，所以使学生了解并掌握空间四边形的概念是本节课的重点，而掌握空间四边形的画法是它的难点。

教学设计过程

师：在平面几何我们讲过定理：平行于同一条直线的两直线平行。这定理在立体几何中还成立不成立？我们可先观察教室中与此有关的模型，再看一看用三根小棍所组成的模型。

生：这定理在立体几何中仍成立。

师：对，这定理在立体几何中是可以证明的，但为了减少学习立体几何的难度，所以我们不再作为定理要去证明，而把它作为公理，这就是我们今天所要讲的公理 源（板书）

公理 源　平行于同一条直线的两条直线互相平行。

师：下面我们应用公理 源来判断下列两直线的位置关系。

在正方体 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员 中。（如图 员

(员 粤月与 悦员阅员是什么位置关系?为什么?

生:因为 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员是正方体,所以它的每一个面都是正方形。所以 粤员月员// 粤月,粤员月员// 悦员阅员,所以 粤月// 悦员阅员,平行于同一直线的两直线平行。

师:

(圆 粤员阅员与 月悦是什么样的位置关系?为什么?

生:因为 粤员阅员与 月悦同平行于 月员悦员,所以 粤员阅员// 月悦

师:

(猿 如果 酝、晕分别为 月员月、悦员悦的中点,问 粤员阅员与 酝晕是什么样的位置关系?

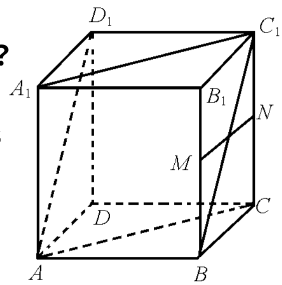


图 1

生:由平面几何可知 酝晕// 月员悦员,粤员阅员// 月员悦员,所以 酝晕// 粤员阅员。

师:

(源 粤悦与 粤员悦员是什么位置关系?为什么?

生:因为 粤粤员 越 月月员,悦悦员 越 月月员,

所以 粤粤员 越 悦悦员,所以四边形 粤员粤悦悦员是平行四边形,故 粤悦// 粤员悦员。

师:

(缘 粤阅员与 月悦员是什么位置关系?为什么?

生:与(源 同理可知四边形 粤月悦员阅员是平行四边形,所以 粤阅员// 月悦员。

师:在正方体 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员中,相对两个面的对角线如 粤悦// 粤员悦员,月悦员// 粤阅员,粤员月// 阅员悦等,今后在证有关题时可做结论来用,不要求再证明。

师：下面我们来看课本第 员愿页例。(抄题)

例　已知：四边形 粤月悦阅是空间四边形(四个顶点不共面的四边形)，耘，匀分别是边 粤月，粤阅中点，云，郧分别是 悦月，悦阅上的点，且 $\frac{\text{悦云}}{\text{悦月}}$ 越 $\frac{\text{悦郧}}{\text{悦阅}}$ 越 $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$，求证：四边形 耘云郧匀是梯形。

师：括号内"四个顶点不共面的四边形"就是空间四边形这个概念的定义。(同时拿出四根小棍组成首尾相连接的空间四边形的模型让学生观察)这就是空间四边形的模型。

师：对这空间四边形的模型，我们从各个不同的角度来观察，从什么位置的视角来画出空间四边形的直观图，才能使这直观图有较强的立体感。当我们从正面来看模型时，这时直观图是什么形状呢？上黑板上来画。

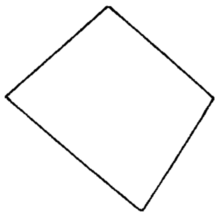
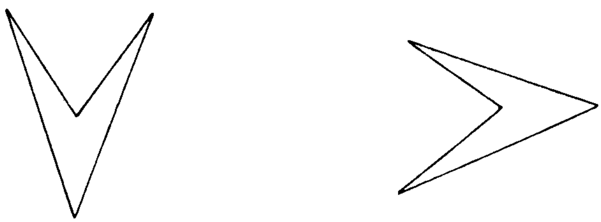


图　2

生：是这样的形状。(如图 圆)

师：当我们从俯视这个视角来看这个模型，所画出的直观图又是什么样的形状呢？

生：可能是这样两种形状。(如图 猿)

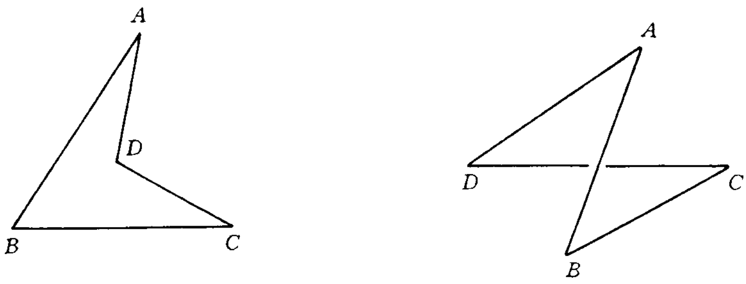


(1)　　　　　　(2)

图　3

师：对。所以从正面这个视角和俯视这个视角来画空间四边形这个模型的直观图时，它们的立体感都不强。而当我们从正侧和后侧这两个视角来画这空间四边形模型的直观图时，立体感才比较强。(如

图源



(1)　　　(2)

图 4

图(圆是高考试卷中出现过的空间四边形的直观图,对空间四边形的直观图的这两种不同视角所得出的两个不同的直观图相比较而言,立体感较强。一般来说,以后画空间四边形时,我们经常采用图(员所画的直观图。

对于最简单的一个空间四边形,由于视角的不同可以画出不同的直观图。关于这点我国宋代有名的诗人苏东坡在他一首哲理诗中就曾经表述过。“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中。”所以今后在从立体模型画出它的直观图时,一定要注意选择好视角,选择好视角的标准就是所画出的直观图既富有立体感,又能表达出模型中各主要部分的位置关系和度量关系。

下面我们就以图源的(员,(圆为基础把第员愿页中的例题的条件在图中标出,并给予证明。(如图远

师:要证四边形耘云郧匀为梯形,就是要证什么呢?

生:要证耘匀∥云郧且耘匀≠云郧

师:怎样证耘匀∥云郧

生:连月阅

师:为什么想到连月阅?

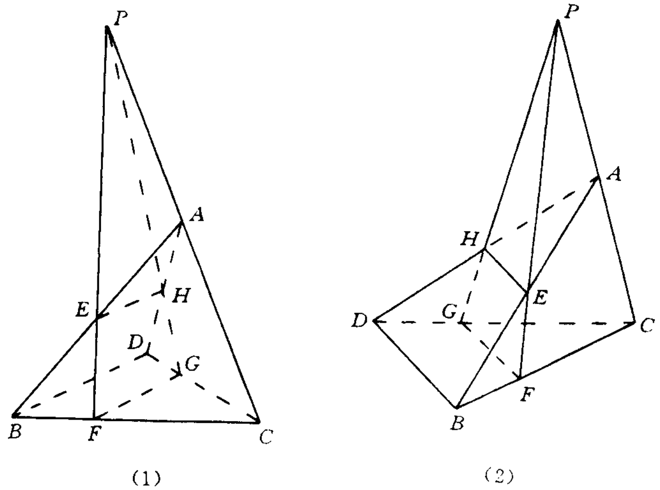


图　6

生:因为连 月阅后,空间四边形 粤月悦阅就可以转化为有一公共边的两个三角形,即△粤月阅和△悦月阅。

师:很好!连 月阅看起来很简单,但它的思想很重要,就是把所要解的立体几何问题转化归结为平面几何问题。这种把立体几何问题化归为平面几何问题是我们在解立体几何时最主要,最常用的一种方法,所以从今天起我们就要逐步理解、掌握这种化归方法。

连完 月阅后,我们又如何证明呢?

生:在△粤月阅中,因为 耘匀是三角形的中位线,所以 耘匀∥越$\frac{员}{圆}$月阅,又因为在△悦月阅中,$\frac{悦云}{悦月}$越$\frac{悦郧}{悦阅}$越$\frac{圆}{猿}$,由平面几何可知 云郧∥月阅,云郧越$\frac{圆}{猿}$月阅,所以 耘匀∥云郧(公理 源),耘匀约云郧,由梯形的定义可知四边形 耘云郧匀为梯形。

师:我们已经证明了这个例题。在证明这题的过程中我们要理解

并掌握以下三点：

第一，空间四边形的概念；

第二，如何选择视角，画出有立体感的空间四边形的直观图；

第三，在解立体几何题时，如何自觉地、有意识地把它化归为平面几何问题。

现在，我提出一个思考题。

在梯形 耘云阅匀中，耘匀约云阅，所以当我们延长 云耘，阅匀后，它们一定相交，假设这交点为 孕。问 孕点在哪一条直线上？为什么？（这里也可以根据学生水平的情况，直接问 孕点和直线 粤悦是什么样的关系？为什么？）（这时教师把 云耘，阅匀延长后的交点 孕画出来，让学生观察直观图）

生：孕点可能在直线 粤悦上。

师：对。孕点是在直线 粤悦上，我们怎样证明呢？我们首先要想一想 孕点是如何产生的？

生：孕点是 云耘和 阅匀延长后的交点，即 云耘∩ 阅匀越孕。

师：既然 云耘∩ 阅匀越孕，那么我们可知 孕点在哪一条直线上？

生：孕∈ 云耘上。

师：云耘又在哪一个平面内？

生：云耘⊂ 平面 粤月悦

师：所以 孕点一定在哪一个平面内？

生：孕∈ 平面 粤月悦

师：孕点又应该在哪一个平面内？

生：因为 孕∈ 阅匀，阅匀⊂ 平面 粤阅悦，所以 孕∈ 平面 粤阅悦

师：所以 孕点是平面 粤月悦和平面 粤阅悦的公共点。两个平面的公共点应该在哪一条直线上？

生：根据公理 圆两个平面的公共点应该在这两个平面的交线上。平面 粤月悦∩ 平面 粤阅悦越粤悦，所以 孕∈ 粤悦

师：对，这种证明的方法比较特殊，实际是应用了元素与集合、集

合与集合之间关系来证明的。这种证明方法具有一般性，即要证一个点在一条直线上，只要证这个点是某两个平面的公共点，而这条直线是这两个平面的交线即可，因为由公理圆保证两个平面的公共点一定在一条直线上。同样，当我们要证三点共线时，我们只要证明这三个点都是某两个平面的公共点，那么这三个点一定在一条直线上。

师：今天我们讲了公理源及其应用，讲了空间四边形这个概念及其画法。特别要理解在解有关立体几何问题时把它化归为平面几何问题的主要方法。

作业

课本第员远苑页，第源缘远苑题。

补充题

员援求证：若空间四边形的对角线相等，则顺次连结四边中点所得的四边形的对角线互相垂直。[提示：证四边中点所连的四边形是菱形]

圆援在正方体粤月悦阅原粤员月员悦员阅员中，耘、云分别是月员悦员和阅员悦员的中点，求证四边形耘云阅月是梯形。[提示：连阅员月员]

猿援空间四边形粤月悦阅，点耘、云、郧、匀分别在边粤月、月悦、悦阅、阅粤上，且耘、云、郧、匀共面，耘匀和云郧不平行，求证：耘匀和云郧的交点运在直线月阅上。[提示：证明运点是平面粤月阅和平面悦月阅的公共点]

源援△粤月悦在平面α外，粤月的延长线交平面α于孕，悦月的延长线交平面α于匝，粤悦的延长线交平面α于砸。求证：孕、匝、砸三点在同一条直线上。[提示：证明这三点是两个平面的公共点]

课堂教学设计说明

首先，师、生都要理解课本的编者为什么要在此处安排这个例题呢？目的有四：一是建立一个新概念——空间四边形，复习一个旧概念——梯形；二是灵活应用在立体几何中刚学过的知识：平面的基

本性质，两条直线的位置关系，公理 源以及平面几何中的有关知识；三是初步培养学生的空间想象能力和发展学生的逻辑思维能力；四是使学生初步理解并掌握解立体几何问题把它化归为平面几何问题的这一种数学中常用的化归方法。

第二，在前一个设计说明中，我们引入一个“视觉语言”这个概念，关于这个概念今后在设计说明还会经常使用。

为了使“视觉语言”有最好的视觉效果，必须选择从立体模型到画出这个模型的直观图的视角。我们有时从一些教学参考书中看到，由于不注意视角的选择，所画的直观图不但不能起到正面的“视觉语言”的效果，而是相反的起到负面的效果。就是学生不但不能看懂它，而且有时还产生错觉。所以，对每一个直观图教师都要精心设计，使之有最佳的视觉效果，关于这一问题，后面我们还要进一步阐述。

关于在讲课过程中引用的苏东坡的哲理诗是我在看了余秋雨所著《文化苦旅》第 圆圆页后在脑中立刻闪出可以在这节课中引用的，这绝不是为了卖弄，而是这首诗在这里是画龙点睛之笔，绝妙的说明了在观察对象时由于不同的视角而所产生不同的印象。从讲课的效果来看，学生背过这首诗，能完全理解并引起共鸣。在数学课上恰当地引用一些哲学的、文学的语言会使课堂气氛更生动活泼，更有一种文化气息，这也是素质教育的一个方面吧！

下面在这里顺便说一下关于等角定理的设计说明。

关于等角定理可用类比思想引入，并用四根小棍组成两角做演示，学生很容易了解了定理。关于定理的证明，也是把它化归为平面几何问题，学生也很容易理解。所以关于等角定理不再另写教案。但是，在讲过等角定理和推论后，在课本第 员源页上的“注意：由上面定理的证明可知：平面里的定义、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用”可能被忽视。所以在这里要强调的是教师一定要重视这个“注意”，讲好这个“注意”，并且使学生真正理解这个“注意”。为此，可向学生提出：试举出平面几何中的定理，在立体几何中不能成

立的例子。这个问题很难，很多学生都回答不出来。可能只有一些好学生能想出在平面几何中的定理：垂直于同一直线的两直线平行，在立体几何中不成立。因为这时这两直线可能平行、可能相交、可能异面，用三根小棍一演示，学生就容易理解。如果学生再回答不出别的例子，教师可事先准备好如下例子。当然教师也可课前做好有关模型，使学生观察模型后自己得出相应的结论。

用一张平行四边形硬纸，沿对角线折起，这时对边仍然相等，但它是一个空间四边形而不是平行四边形。所以两组对边相等的四边形是平行四边形这个平面几何中的定理在立体几何中不能成立。

当我们把平行四边形 粤月悦阅 一张硬纸沿对角线 粤悦 折起后，∠粤月悦越∠粤阅悦，∠月粤阅越∠月悦阅仍成立。但这时 粤月悦阅已经是空间四边形。所以两组对角相等的四边形是平行四边形这个平面几何定理在立体几何中不能成立。

用一张菱形 粤月悦阅 的硬纸，沿对角线 月阅 折起，这时四边形 粤月悦阅的四边 粤月越月悦越悦阅越阅粤仍成立，但它已经是空间四边形，不是菱形。所以四边相等的四边形是菱形这个平面几何定理，在立体几何中不能成立。

最难使学生理解的是三个角是直角的四边形是矩形这个平面几何中的定理在立体几何中也不能成立。可做如下模型演示给学生看：一个矩形 粤月悦阅的硬纸板，用一根小棍 孕阅垂直于平面 粤月悦阅于 阅，连孕粤，孕悦。从模型我们可以观察出 ∠孕粤月越∠粤月悦越∠月悦孕越怨园毅。这时四边形 孕粤月悦虽然有三个角是直角，但它不是矩形而是一个空间四边形。这时如果让学生仔细观察可以发现 ∠粤孕悦约怨园毅，也就是说我们可以发现“空间四边形四内角和小于 猿远园毅”这是立体几何中的一个定理。关于这个定理的证明可参看 员怨愿缘年版《立体几何（甲种本）全一册教学参考书》（江苏教育学院编，人民教育出版社出版）第员怨愿页。

虽然举出了上述五个例子，但是学生还是不容易一下子就理解

的。因为在初中二年半的时间里学平面几何，长期在二维平面，“爬行状态”的思维方式要转化到在三维空间的“站立状态”的思维方式要有一个“思想解放”的过程。这过程不是一下子就能完成的，而且一定会有反复。要理解这种反复是自然的。我们一定要给学生讲清，在平面几何中是“真理”(定理)的，为什么在立体几何中不再是“真理”(定理)呢 :因为任何真理都应以时间、地点、条件为转移的。现在因为条件变了，我们在立体几何中研究的是空间图形，上述五个例子中虽然它们都满足了平面几何有关条件，但是我们都不能证明它们是平面图形，所以平面几何中的定理对它也就失去了有效性。

言归正题，经过以上阐述，现在对课本中第 员源页的“注意 :由上面定理的证明可知 :平面的定义、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用”的重要性，一定有了较深刻的理解，所以在讲过等角定理证明后，一定要讲好这“注意”，使学生起到“解放思想”这个作用。

《两条异面直线所成的角和距离》教学设计

教学目标

员援运用类比推理,理解引入有关概念的必要性、重要性;

圆援理解、掌握有关概念的定义,并会初步应用有关概念的定义来解题。

教学重点和难点

这节课的重点与难点都是异面直线所成的角和距离这两个概念的引入,和使学生真正地理解、掌握这两个概念。

教学设计过程

一、引入有关概念的必要性

师:我们都知道空间的两直线的位置关系有三种:相交、平行、异面。这只是“定性”来研究对象,当我们要“定量”来研究对象时就必需要引入一些有关的新概念。

(这时教师拿出两根小棍做平行直线演示并说)

例如 葬// 遭糟// 凿(如图 员),虽然它们都是平行直线,但是它们之间有什么区别呢?

生:虽然它们都是平行直线,但是它们的之间的距离不同。

师:对,为了区别都是平行直线的不同情况,也就是说为了“定

图 1

量”的研究平行直线,就必须引入有关“距离”这个概念。

(这时教师又拿出两根小棍做相交直线,并且使其角度各有不同,并说)

师:又例如 蒺与 遭是相交直线,糟与 凿也是相交直线(如图 圆)。虽然它们都是相交直线,但是它们之间有什么区别呢?

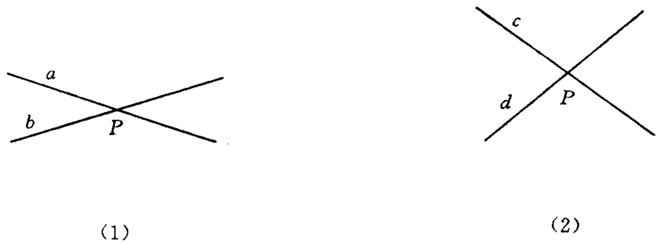


图 2

生:虽然它们都是相交直线,但是它们的夹角大小不同。

师:对,为了区别两相交直线的不同情况,也就是说为了“定量”的研究相交直线就必须引入有关“角”的概念。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其距离的大小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 蒺,遭是异面直线,直线 糟,凿也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间的距离不同。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其所成角的大

小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 葬,遭是异面直线,直线 糟,凿也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间所成的角大小不同。

师:对,通过观察我们可以发现为了“定量”的研究异面直线,必须引入异面直线所成的角和异面直线的距离这两个概念。下面我们先来研究异面直线所成的角这个概念的定义。

二、异面直线所成的角的定义

(教师拿出两根小棍做异面直线状,演示给学生看,使其观察如何给异面直线所成的角下定义)

师:我们来看这模型,怎样给异面直线 葬,遭所成的角下定义?

生:可以把直线 葬平移与 遭相交,这时由 葬平移而得的 葬乙与 遭相交所成的角,就可以定义为异面直线 葬与 遭所成的角。

师:对,但是为了使这个定义更有一般性,我们给异面直线所成的角做如下的定义。

定义　直线 葬,遭是异面直线,经过空间任意一点 韵,分别引直线 葬乙∥ 葬,遭乙∥ 遭,我们把直线 葬乙和 遭乙所成的锐角(或直角)叫做异面直线 葬和 遭所成的角。(如图 猿)

师:由定义来看,韵是空间中任意一点,当然我也可以在空间任意取一点 韵员,过 韵员分别引 葬员∥ 葬,遭员∥ 遭,那么这时 葬员和 遭员所成的锐角与 葬乙和 遭乙所成的锐角是否相等呢?

生:相等,因为有等角定理的推论“如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等”。因为 葬乙∥ 葬,葬员∥ 葬,可推出 葬乙∥ 葬员,同理可推出 遭乙∥ 遭员,所以可用等角定理的推论。

师:对,我们在上两节课讲的公理 源和等角定理,在某种意义来说都是为给异面直线所成的角下定义做理论上的准备,正因为角的

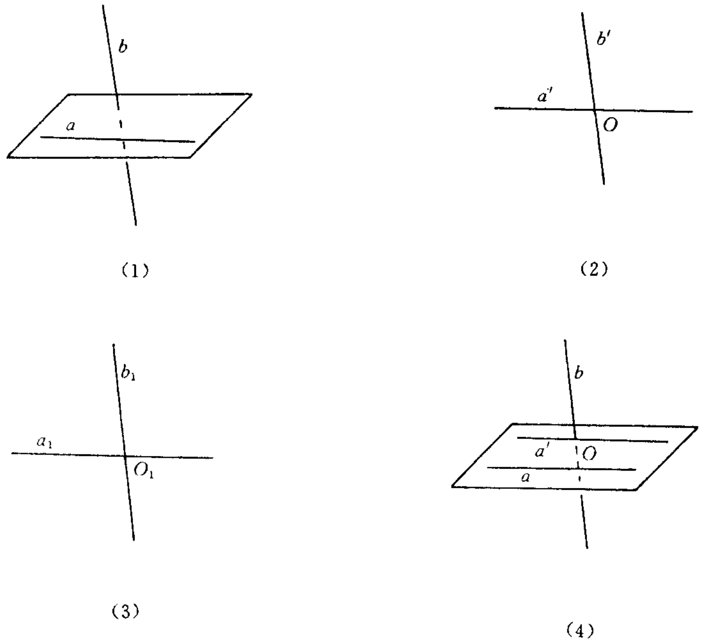


图 3

大小与韵点的选择无关，所以为了简便，点韵常取在两条异面直线中的一条上，所以你们一开始给异面直线所成的角下的定义是对的。

师：我们如何给两条异面直线互相垂直下定义呢？

生：如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直。

师：设两条异面直线所成的角为 θ，问 θ 角的取值范围？

生：θ∈ (圆毅怨圆毅，半开、半闭区间。

师：θ 角能否等于圆毅

生：不能，因为当 θ 越圆毅时，异面直线就转化为平行直线。

师：对，θ≠圆毅否则，量变就转化为质变，异面直线就转化为平行直线了。至于异面直线所成的角规定为锐角或直角，则是为了所成的

角是唯一确定的。

三、练习

例 正方形 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员。求：

(员 粤员月与 悦悦员所成的角是多少度？为什么？

(圆 粤员月员与 悦悦员所成的角是多少度？为什么？

(猿 粤员悦员与 月悦所成的角是多少度？为什么？

(源 在正方体 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员的棱中，与棱 月员月垂直的棱有几条？(如图 源

师：请你们依次回答上述的四个问题。

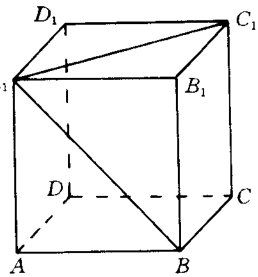


图 4

生：(员 因为 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员为正方体，悦悦员∥月月员，所以 粤员月与 悦悦员所成的角为∠月员月粤员，而∠月员月粤员越源缘毅，所以 粤员月与悦悦员所成的角为 源缘毅。

师：请回答第(圆问。

生：因为 悦悦员∥月月员，所以 粤员月员与 悦悦员所成的角为∠月月员粤员，而∠月月员粤员越怨园毅，所以 粤员月员与 悦悦员所成的角为 怨园毅。

师：请回答第(猿问。

生：因为 月悦∥月员悦员，所以 粤员悦员与 月悦所成的角就是∠月员悦员粤员，而∠月员悦员粤员越源缘毅，所以 粤员悦员与 月悦所成的角为 源缘毅。

师：请回答第(源问。

生：与棱 月员月垂直的棱有 愿条。

师：有哪几条是与 月员月相交垂直？有哪几条是与 月员月异面垂直？

生：与 月员月相交垂直的棱有 源条，为 粤月，粤员月员，月悦，月员悦员；与月员月异面垂直的棱也有 源条，为 粤阅，粤员阅员，悦阅，悦员阅员。

师：对。这里我们需要指出，在立体几何中，“垂直”、“相交垂直”、

“异面垂直”这三个不同概念的联系和区别。以后我们讲两直线垂直，则是指这两直线可能是相交垂直，也可能是两直线异面垂直。这里我们要破除在平面几何中形成的思维定式，就是一说两直线垂直就是指两直线相交垂直。而要了解：“垂直”越“相交垂直”垣“异面垂直”。

四、异面直线的距离的定义

师：和两条异面直线都垂直的直线有多少条？(同时拿出两根小棍做为异面直线 葬，遭再拿出一根小棍 糟摆出与 葬 遭都垂直状，而小棍 糟在保持与 葬 遭都垂直的情况下可平行移动，用这样的模型让学生观察，再让学生回答)

生：有无数条。

师：对。现在再问与这两条异面直线都相交垂直的直线有几条？

生：只有一条。

师：对，由对模型的观察我们知道和两条异面直线都相交垂直的直线有而且只有一条，现在可以给出下面两个定义。

定义　和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线。

定义　两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离。

要注意这两个定义之间的联系与区别，公垂线是一条直线，这直线在这两条异面直线间(两垂足间)的线段的长度是这两条异面直线的距离。

五、练习

例　在长方体 粤月悦阅原粤$_{员}$月$_{员}$悦$_{员}$阅$_{员}$中，粤月 越源糟皂，月悦 越猿糟皂，月$_{员}$月 越圆糟皂，求：

(员) 异面直线 粤$_{员}$粤与 月悦的距离；