

积分二次约束下反馈不确定系统的类梯度性*

耿志勇

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

E-mail: zygeng@pku.edu.cn

摘要: 本文从输入输出的角度研究带有动态反馈不确定性系统的类梯度性。所考虑的系统由正向通道的线性时不变稳定系统与反馈通道的不确定动态特性所构成的闭环系统。反馈通道的不确定性由输入导数满足积分二次约束(IQC)的非线性算子描述。借助于 L_2 空间上算子的可逆性及有界性, 给出了输入输出框架下系统类梯度性的讨论。将系统类梯度问题转化为鲁棒稳定性问题, 并利用积分二次约束下闭环系统稳定性的频域判据, 给出了闭环系统类梯度性的频域判据。

关键词: 类梯度性, 反馈不确定性, 积分二次约束, 输入输出方法。

Gradient-like Property of Systems with Feedback Uncertainties Under Integral Quadratic Constraints

Geng Zhiyong

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871)

Abstract: The paper studies the gradient-like property of the systems with feedback uncertainties from an input output point of view. The system consists of a stable linear time invariant system in its forward loop and dynamic uncertainties in the feedback loop, which can be described by an uncertain operator with its input time derivative satisfies integral quadratic constraints. By using the invertibility and boundedness of the operators in L_2 space, the discussion of gradient-like of the system characterized by input output description is given. The problem of gradient-like property of systems is converted to that of robust stability, and then by making use of frequency criterion for robust stability of the closed system under integral quadratic constraints, a frequency criterion for the gradient-like property of the closed system is presented.

Key words: gradient-like, feedback uncertainties, integral quadratic constraints, input output approach.

1 引言

现实世界中大多数实际的工程及物理系统都是多平衡态的非线性系统。对于这样一类系统我们既要研究系统在某一平衡位置附近的动力学性质, 如该平衡位置是否渐近稳定, 同时我们更关心系统的总体动力学性质。系统的类梯度性就是刻画系统总体动力学性质的重要特性之一。它是单平衡态全局渐近稳定性在多平衡态情况下的重要推广。粗略地说, 一个系统是类梯度的系指系统的所有解收敛。对于单平衡态系统而言, 系统在平衡点附近的

动力学性质与系统全局动力学性质具有同一性, 其全局渐近稳定性已得到充分的研究并已建立了较为完善的理论。对于多平衡态系统的类梯度性, 目前的研究是在绝对稳定性理论框架下进行的。所考虑的系统是由一个线性时不变系统加上静态非线性反馈环节所构成的闭环系统, 利用状态空间分析的 Lyapunov 方法结合 KYP 引理来建立频域判据。在这方面俄罗斯学者^[1, 2]做出了系统的研究工作。

现代系统理论将系统看成为具有输入和输出的动力学装置, 而且在系统刻画, 建模, 辨识时往往带有一定的不确定性。一方面这种不确定性通常

* 本文得到国家自然科学基金(No. 60374039, 60334030, 60204007)资助。

是非线性非静态的,另一方面又很难用带有微分结构的状态空间模型来加以刻画。通常只能给出其输入输出的近似描述。这就需我们从输入输出的角度来研究系统的类梯度性质,这方面的研究工作目前还没有见到。

本文从输入输出的角度来研究系统的类梯度性,所考虑的系统是由一个线性时不变系统和一个输入导数满足积分二次约束的不确定非线性反馈环节所构成的不确定系统。利用输入输出方法,将系统看成是局部平方可积信号空间上的算子,通过算子的可逆性及有界性来建立系统的类梯度性的频域判据。

2 预备知识

本节我们首先引入一些文中常用记号,然后介绍一下积分二次约束下反馈系统鲁棒稳定性的频域判据。该结果是建立系统类梯度性的基础。

R 及 C 分别表示实数及复数集合。用 R_+ 表示非负实数集合,并记 $\bar{R} = R \cup \{\infty\}$ 。 $m \times n$ 实(复)矩阵集合记为 $R^{m \times n}$ ($C^{m \times n}$)。用 RH_∞ ($RH_\infty(C^{m \times n})$) 示真的稳定的传递函数(传递函数矩阵)集合。设 $L^2_2[0, \infty)$ 表示平方可积实向量函数 $f: R_+ \rightarrow R^n$ 空间,其上范数定义为:

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, f \in L^2_2[0, \infty) \quad (1)$$

设 $f: [0, \infty) \rightarrow R^k$ 为一向量信号, $\forall T > 0$, 定义截断算子 P_T

$$(P_T f)(t) = \begin{cases} f(t); & 0 \leq t < T \\ 0; & t \geq T \end{cases} \quad (2)$$

定义 L_2 扩展空间(局部平方可积空间)为:

$$L^2_{2e}[0, \infty) = \{f: R_+ \rightarrow R^n \mid P_T f \in L^2_2[0, \infty), \forall T \geq 0\} \quad (3)$$

称算子 $H: L^2_{2e}[0, \infty) \rightarrow L^2_{2e}[0, \infty)$ 为因果的,系指 $\forall T \geq 0$, 有 $P_T H P_T = P_T H$ 。

考虑如下带有反馈不确定性的系统

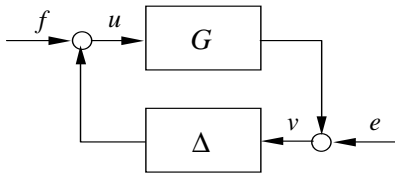


图1 带有反馈不确定性的闭环系统

$$\begin{cases} v = Gu + e \\ u = \Delta(v) + f \end{cases} \quad (4)$$

其中 $G: L^m_{2e}[0, \infty) \rightarrow L^l_{2e}[0, \infty)$ 为带有传递函数 $G(s) \in RH_\infty(C^{m \times l})$ 的线性时不变系统, $\Delta: L^l_{2e}[0, \infty) \rightarrow L^m_{2e}[0, \infty)$ 为满足一定约束的不确定因果有界算子。

定义 1 (Megretski and Rantzer^[3]) 设 $\Pi: jR \rightarrow C^{(l+m) \times (l+m)}$ 是取值为 Hermite 矩阵的有界可测矩阵函数, 并设

$$\sigma_\Pi(v, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega$$

其中“ $\hat{\cdot}$ ”表示 Fourier 变换。称有界算子 Δ 满足由 Π 定义的积分二次约束(IQC), 系指

$$\sigma_\Pi(v, \Delta(v)) \geq 0, \forall v \in L^l_2[0, \infty) \quad (5)$$

定义 2 称系统(4)为适定的系指 $(I - G\Delta)$ 为 $L^m_{2e}[0, \infty)$ 上可逆算子, 此外, 称系统(4)为 L_2 稳定的, 系指 $(I - G\Delta)^{-1}$ 在 $L^m_{2e}[0, \infty)$ 有界。

定理 1 (Megretski and Rantzer^[3]) 设 $G(s) \in RH_\infty(C^{m \times l})$, Δ 为因果有界算子, 假定

- 1) $\forall \tau \in [0, 1]$, G 与 $\tau\Delta$ 的反馈互联适应;
- 2) $\forall \tau \in [0, 1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC;
- 3) $\exists \varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq \varepsilon I, \quad \forall \omega \in \bar{R}$$

则 G 与 Δ 的反馈互联稳定。

3 主要结果

考虑如下带有非线性反馈不确定性系统, 假定该系统有一个以上平衡态。

$$\Sigma_N: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx + e \\ u = \Delta(y) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, 是线性时不变系统的矩阵, 使得 (A, B) 可控, 且 (A, C) 可观测, $e(t) = Ce^{At}x_0$ 是由初始状态 $x(0) = x_0$ 引起的暂态过程。非线性反馈不确定性 $\Delta: L^m_{2e}[0, \infty) \rightarrow L^m_{2e}[0, \infty)$ 为满足一定约束条件的因果有界算子。

在该系统中当我们不考虑外部输入的影响时, 系统的行为完全由系统的初始条件以及系统本身

的性质决定，因而系统的类梯度性可定义如下 (Leonov^[1,2])。

定义 3 称系统 Σ_N 为类梯度的，系指其所有解 $(x(t), u(t))$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 时收敛。

设 G 为系统的线性部分，并带有传递函数 $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$ ，则系统 Σ_N 可用输入输出方法表示如下 (见图 2)，

$$\begin{cases} y = Gu + e \\ u = \Delta(y) \end{cases}, \quad (7)$$

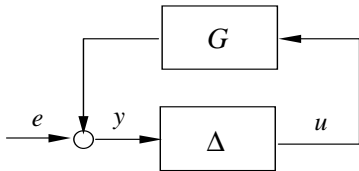


图 2 系统的反馈互联

为了讨论多平衡态系统的类梯度性，并利用输出 y 关于时间 t 的导数的约束，我们需要对系统进行某种变换。

引理 1 设 $G(s)$ 具有如下最小实现

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

而且 $G(s)$ 在 0 没有极点和不变零点，则存在矩阵 $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ，使得 $\det(I - FG(0)) = 0$ 。

证明：由 (A, B) 可控及 (A, C) 可观，则一定存在一个矩阵 $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ，使得 $\det(A + BFC) = 0$ 。注意到 $\det A^{-1} \neq 0$ ，可得

$$\begin{aligned} \det(I - FG(0)) &= \det(I + FCA^{-1}B) \\ &= \det(I + BFCA^{-1}) = \det(A + BFC)\det A^{-1} = 0 \end{aligned}$$

引理 2 假定引理 3 的条件满足，并设

$$H(s) := (I - G(s)F)^{-1}G(s) = G(s)(I - FG(s))^{-1} \quad (8)$$

则

- i) $H(s)$ 在 0 有一个极点；
- ii) $H(s)$ 有一个可控且可观测实现 $(A + BFC, B, C)$ ；
- iii) $H(s)$ 在 0 没有不变零点。

证明：由引理 3，i) 显然。现证明 ii) 和 iii)。

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B(I - FC(sI - A)^{-1}B)^{-1} \\ &= C(sI - A)^{-1}(I - BFC(sI - A)^{-1})^{-1}B \\ &= C(sI - (A + BFC))^{-1}B \end{aligned}$$

因而 $(A + BFC, B, C)$ 是 $H(s)$ 的一个实现。注意到，对任意的 $s \in C$ 有

$$[A + BFC - sI, B] = [A - sI, B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ FC & I \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A + BFC - sI \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BF \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - sI \\ C \end{bmatrix},$$

及 (A, B) 的可控性和 (A, C) 的可观测性，易知 $(A + BFC, B)$ 可控且 $(A + BFC, C)$ 可观测。这就证明了 ii)。最后注意到，定常状态反馈不改变不变零点，从而可得 iii)。

现设 $P = A + BFC$ ， $\bar{\Delta}(y) = \Delta(y) - Fy$ ，则系统 Σ_N 可以写为

$$\Sigma'_N : \begin{cases} \dot{x} = Px + Bu \\ y = Cx + e \\ u = \bar{\Delta}(y) - Fe \end{cases} \quad (9)$$

其中， (P, B) 可控， (P, C) 可观测，并且 $\det P = 0$ 。假定 $\text{rank } P = r (r < n)$ ，且 $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 非奇异，使得

$$T^{-1}PT = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $A_{11} \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 非奇异。作线性变换

$$x = T \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, CT = [C_1 \quad C_2]$$

则系统 Σ'_N 的线性部分变换为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11}z_1 + B_1u \\ \dot{z}_2 &= A_{12}z_1 + B_2u \\ y &= C_1z_1 + C_2z_2 + e \end{aligned}$$

进而，我们有

$$\dot{z} = (C_1A_{11} + C_2A_{21})z_1 + (C_1B_1 + C_2B_2)u + \delta$$

设 $\tilde{A} = A_{11}$ ， $\tilde{B} = B_1$ ， $\tilde{C} = (C_1A_{11} + C_2A_{21})$ ， $\tilde{D} = (C_1B_1 + C_2B_2)$ ， $z = z_1$ ， $\delta = \delta$ ，及 $f = -Fe$ ，原系统可写为

$$\Sigma''_N : \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u + \delta \\ u = \bar{\Delta}(y) + f \end{cases} \quad (10)$$

系统 Σ''_N 的线性部分的传递函数由下式给出

$$K(s) = \tilde{D} + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad (11)$$

易证 $K(s) = sH(s)$ ，因而 $\det K(0) \neq 0$ 。反馈方框图如图 3 所示。

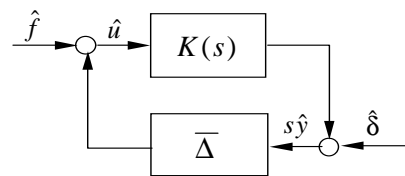


图 3 变换后的反馈互联

由上述 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 的定义, 易证 (\tilde{A}, \tilde{B}) 可控, 且 (\tilde{A}, \tilde{C}) 可观测, $K(s)$ 有最小实现:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}$$

为节省符号, 将 $\bar{\Delta}$ 记为 Δ 则我们将要研究的输入输出模型为

$$\Sigma_{i_0} : \begin{cases} \dot{x} = Ku + \delta \\ v = \Delta(y) \\ u = v + f \end{cases} \quad (12)$$

假定 K 为一个带有传递函数 $K(s) \in RH_{\infty}(C^{m \times m})$ 的线性时不变算子, 而 δ 指定为 $L_2^m[0, \infty)$ 中的信号。这是因为当 \tilde{A} 稳定时

$$\delta = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}z_0 = CPe^{pt}x_0 \in L_2^m[0, \infty) \quad (13)$$

类似地, 可将 f 和 δ 指定为 $L_2^m[0, \infty)$ 中的。

假定非线性算子 Δ 满足下列约束:

- 1) (\dot{x}, v) 满足由 Π_1 定义的 IQC,
- 2) 若 $\dot{x} = 0$, 则 $x = 0$, 且 (\dot{x}, \dot{x}) 满足由 Π_2 定义的 IQC。

约束 1) 说明 Δ 满足导数输入的 IQC, 而约束 2) 说明 Δ 满足导数输入导数输出的 IQC。在这种假设下, 系统线性部分输出 y 的导数被用于非线性反馈约束, 这使得我们有可能讨论多平衡态反馈系统的类梯度问题。

设

$$\Pi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{i11}(j\omega) & \Pi_{i12}(j\omega) \\ \Pi_{i12}(j\omega)^* & \Pi_{i22}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad i=1, 2. \quad (14)$$

则在 $\dot{x}(0) = 0$ 的假设下, 我们有:

$$\sigma_{\Pi_1}(\dot{x}, \dot{x}) = \sigma_{\Pi_2}(\dot{x}, v) \quad (15)$$

其中

$$\Pi_2'(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{211}(j\omega) & j\omega\Pi_{212}(j\omega) \\ -j\omega\Pi_{212}(j\omega)^* & \Pi_{222}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

因而我们可以等价地说, 输入输出偶 (\dot{x}, v) 满足由 $\gamma\Pi_1 + \lambda\Pi_2'$, $\forall \gamma \geq 0, \forall \lambda \geq 0$, 定义的 IQC。将定理 1 用于系统 Σ_{i_0} , 我们可得下列定理。

定理 2 设 $K(s) \in RH_{\infty}(C^{m \times m})$, 并设 Δ 为因果有界算子。若:

- i) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, K 与 $\tau\Delta$ 的反馈互联适应;

- ii) 对任意的 $\tau \in [0, 1], \lambda \geq 0, (\dot{x}, \tau v)$ 满足由 $\Pi_1 + \lambda\Pi_2'$ 定义的 IQC;
- iii) 存在 $\varepsilon > 0, \lambda \geq 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* (\Pi_1(j\omega) + \lambda\Pi_2'(j\omega)) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq \varepsilon I, \forall \omega \in \bar{R} \quad (17)$$

则, 系统 Σ_{i_0} 是类梯度的。

证明: 将 IQC 定理 (定理 1) 用于系统 Σ_{i_0} , 易知 $(\dot{x}, u) \in L_2^m[0, \infty) \times L_2^m[0, \infty)$, 由于 $u \in L_2^m[0, \infty)$, 因而 \dot{x} 有界。注意到 $\dot{x} = \tilde{C}z + \tilde{D}u + \delta$, 我们可得 \dot{x} 同样有界。这意味着 $\dot{x}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上关于 t 一致连续。因而可以断定

$$\dot{x}(t) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

由 $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ 可知 $y(t)$ 有界, 再由系统 Σ_N' 的可观测性知 $z(t)$ 有界。从而 ω -极限点的集合 Ω 非空。由集合 Ω 出发的任意轨迹将只包含 ω -极限点。因而, 对于集合 Ω 中的任意轨迹将有 $\dot{x}(t) = 0$, 这将导致

$$y(t) = y_0 = \text{const},$$

对于系统 Σ_N' 位于 Ω 中的轨迹 $(z(t), y(t))$, 显然有

$$\tilde{C}z(t) + \tilde{D}(\Delta y)(t) = 0, (\Delta y)(t) = \Delta(y_0) = \text{const}$$

由 (\tilde{A}, \tilde{C}) 的可观测性可知, 存在唯一的解 $z(t) = z_0$, 使得

$$\begin{aligned} \tilde{A}z_0 + \tilde{B}\Delta(y_0) &= 0 \\ \tilde{C}z_0 + \tilde{D}\Delta(y_0) &= 0 \end{aligned}$$

注意到前述假设 $\det \tilde{A} \neq 0$, 及 $\det K(0) = \det(\tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}) \neq 0$, 从而

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \tilde{A} & \\ & K(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

由此得到:

$$z_0 = 0, \Delta(y_0) = 0.$$

这说明 Ω 等于平衡点集 $\Lambda = \{(z_{eq}, y_{eq}) \mid z_{eq} = 0, \Delta(y_{eq}) = 0\}$ 。若 $t \rightarrow \infty$ 时解 $(z(t), y(t))$ 不收敛到集合 Λ , 那么将存在 $\varepsilon > 0$, 及一个时间序列 $\{t_k\}$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $t_k \rightarrow +\infty$ 使得

$$\text{dist}[(z(t_k), y(t_k)), \Lambda] = \inf_{(z_{eq}, y_{eq}) \in \Lambda} \left\| \begin{bmatrix} z(t_k) - z_{eq} \\ y(t_k) - y_{eq} \end{bmatrix} \right\| \geq \varepsilon$$

由于 $(z(t), y(t))$ 有界, 则存在子序列 $\{t_{k_i}\}$, 使得

$$(z(t_{k_i}), y(t_{k_i})) \rightarrow (z_0, y_0) \in \Omega,$$

因此

$$\text{dist}[(z_0, y_0), \Lambda] \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

并且 (z_0, y_0) 不属于 Λ 这与 $\Omega = \Lambda$ 这一事实矛盾, 从而定理得证。□

注 1 该定理给出了系统 Σ_{io} 鲁棒类梯度性的频域判据。频域不等式(17)的检验可通过 KYP 引理^[4]转化为线性矩阵不等式的可行解的求取问题。

参考文献

[1] Leonov, G. A., V. Reitmann and V.B. Smirnova (1992), *Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback*

Systems, B, G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.

[2] Leonov, G. A., D. V. Ponomarenko and V.B. Smirnova (1996), *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore.

[3] Megretski, A & Rantzer, A. (1977), System Analysis via Integral Quadratic Constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:6, 819 – 830.

[4] Rantzer, A. (1996), On the Kalman–Yakubovich–Popov lemma, *System & Control Letters*, Vol.28, pp. 7 - 10

一类组合类摆系统*

李鑫滨^{1,2}, 段志生², 黄琳²

1. 燕山大学电气工程学院·秦皇岛, 066004

2. 北京大学力学与工程科学系·北京, 100871

摘要: 研究了两个具有多平衡态的非线性二阶类摆系统组合后的总体性质, 此类组合问题可以看成是相互独立的子系统之间的协调控制问题。这里既考虑了线性互联, 也考虑了一类输入输出的交叉互联。通过相应的置换矩阵来表示此类输入输出的交叉互联, 并给出了判定组合系统双态性的频域判据及LMI判据。研究表明两个二阶类摆系统可以通过相互的协调控制极大地改变组合后系统的总体性质。最后给出的例子验证了本文的主要结果。

关键词: 组合系统; 多平衡态非线性系统; 类摆系统; 双态性

A Class of Interconnected Pendulum-like Systems

Li Xinbin^{1,2} Duan Zhisheng² Huang Lin²

(1. Institute of Electrical Engineering

Yanshan University · Qinhuangdao, 066004)

(2. Center for Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science

Peking University · Beijing, 100871)

Abstract: The global properties of interconnected nonlinear second-order pendulum-like systems with multiple equilibrium points are investigated. This interconnection can be viewed as harmonic control between independent sub-systems. Linear interconnection and a class of input and output interconnections are considered. The effects of input and output interconnections are shown through a permutation matrix. Frequency and LMIs conditions of dichotomy behavior for interconnected pendulum-like systems are derived. It is shown that global properties of two interconnected system can be changed significantly through harmonic control. Examples are given to illustrate the results.

Key words: Interconnected systems, Nonlinear system with multiple equilibrium points, Pendulum-like systems, dichotomy.

1 引言

目前, 通常利用分散控制手段解决复杂大系统的分析与综合问题, 其主要思想是基于各个子系统的信息建立局部控制使得系统整体稳定, 而这其中并没有考虑到子系统间的相互帮助和相互协调。事实上, 传统的控制观念从不要求一个大系统中的子系统之间能互相帮助, 而是力求彼此孤立, 以邻为壑, 即尽量减少彼此的往来。而在实际的系统中, 我们通常会遇到这样的问题, 即具有一定缺陷的子系统可以通过相互的关联组成一完善的系统, 例如, 一个盲人和一个瘸子通过相互的帮助可以完成正常的行走。因此, 如何利用协调使得在组合系统中实现 $1 + 1 > 2$ 的效果已经成为一个很重要的研究方向^[1], 最近, 在这方面相应的已经出现了一些有益的工作^[2~4]。

本文主要研究了两个二阶类摆系统的耦合问题, 探讨互联在系统总体性质研究中的作用。类摆系统是一类特殊的具有无穷多平衡点的非线性系统, 其

在工程上对应于各类相同步系统^[5,6]。对于这类多平衡点系统, 其解的总体性质比单平衡点系统复杂得多。类摆系统最简单的形式是二阶数学摆系统, 并且最早是由F. Tricomi (1933)^[7]开始研究的。其后相继有很多学者对此类系统进行完善与推广, 进而将其扩展到 n 阶具有周期非线性的系统^[8~11]。对这类系统的稳定性研究使得在基于Lyapunov间接法的基础上产生了新的研究方法。我们这里所研究的两个类摆系统形成的组合系统的关联项不仅反映在组合后闭环系统的参数矩阵中, 而且还包含了一类输入输出的交叉互联, 这类交叉可以通过相应的置换矩阵来表示。由此, 我们给出了判定组合系统双态性的频域判据及LMI判据。给出的例子表明两个二阶类摆系统可以通过相互的协调控制极大地改变组合后系统的总体性质。

2 组合类摆系统

*基金项目: 国家自然科学基金(10272001, 60334030, 60374039)

考虑如下两个二阶类摆系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -a_1\eta_1 - \varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{\sigma}_1 = \eta_1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_2 = -a_2\eta_2 - \varphi_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_2 = \eta_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 a_i 为大于零的常数, $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为一连续可微函数且满足:

$$(\exists \Delta_i \in \mathbb{R})(\forall \sigma_i \in \mathbb{R}) : \varphi_i(\sigma_i + \Delta_i) = \varphi_i(\sigma_i) \quad i = 1, 2$$

其中 Δ_i 称为非线性函数 $\varphi_i(\sigma_i)$ 关于变量 σ_i 的周期。

由(1)和(2)产生的组合系统为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta + B\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = C\eta, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$, $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\sigma_1) \\ \varphi_2(\sigma_2) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_{12} \\ a_{21} & -a_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中的参数 a_{12} 和 a_{21} 表示两个子系统之间的协调项。并且有 (A, B) 可控、 (A, C) 可观。其从输入 φ 到输出 $\dot{\sigma}$ 的传递函数为

$$K(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

此外, 设存在数 μ_{1i} 及 μ_{2i} 使得

$$-\infty < \mu_{1i} \leq d\varphi_i(\tau)/d\tau \leq \mu_{2i} < +\infty, \forall \tau \in \mathbb{R}, i = 1, 2. \quad (5)$$

为了导出相应的LMI判据还需给出著名的KYP引理, 此引理在对线性系统进行研究的频域方法和时域方法之间建立了相应的等价关系。

引理 1 (KYP引理[12]): 分别给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 及 $M = M^* \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, 其中 (A, B) 可控且 $\det(i\omega - A) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$, 则下面的条件等价:

$$(i) \begin{bmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \text{ 存在一实对称矩阵 } X, \text{ 使得不等式 } M + \begin{bmatrix} XA + A^*X & XB \\ B^*X & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \text{ 成立.}$$

如果 (A, B) 不可控, 则相应的严格不等式依然成立。

定义 1 [11]: 若系统(3)的所有有界解都收敛, 则称系统(3)是双态的。

系统的双态性保证了系统不存在诸如极限环或混沌运动这样的有界振荡现象, 即每条轨迹必定是趋于无穷大或是收敛到一个平衡点。

令 $M = \text{diag}\{\mu_{11}, \mu_{12}\}$, $N = \text{diag}\{\mu_{21}, \mu_{22}\}$, 根据文献[11,3]的方法可得下面的判定组合系统(3)双态性的频域判据。

引理 2: 若矩阵 A 无纯虚特征值, (A, B) 可控、 (A, C) 可观, φ_i 在一个周期内的零点是孤立的, 并且存在对角矩阵 $\varepsilon = \text{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, $\kappa = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\} \neq 0$, $\delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2\} \geq 0$ 使得下面不等式成立:

$$\text{Re}\{\kappa K(i\omega) + K^*(i\omega)\varepsilon K(i\omega) - [MK(i\omega) - i\omega I]^* \cdot \delta[NK(i\omega) - i\omega I]\} \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

则系统(3)是双态的。

当组合系统具有输入输出交叉, 即将系统(3)中的输入 φ 替换为 $\psi = \begin{bmatrix} \varphi_1(\sigma_2) \\ \varphi_2(\sigma_1) \end{bmatrix}$ 时, 所形成的组合系统为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta + B\psi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = C\eta, \end{cases} \quad (7)$$

3 主要结果

下面我们考虑组合系统(7)的双态性。令 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $z = P\sigma$, 由系统(7)可得

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta + B\varphi(z), \\ \dot{z} = PC\eta, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\varphi(z) = \begin{bmatrix} \varphi_1(z_1) \\ \varphi_2(z_2) \end{bmatrix} = \psi(\sigma)$, 明显地(8)与(7)有相同的双态性。由(8)可得 $\varphi(z)$ 到 \dot{z} 的传递函数为 $PK(s)$, 因而有下面的定理。

定理 1: 若矩阵 A 无纯虚特征值, (A, B) 可控、 (A, C) 可观, φ_i 在一个周期内的零点是孤立的, 并且存在对角矩阵 $\varepsilon = \text{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, $\kappa = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\} \neq 0$, $\delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2\} \geq 0$ 使得下面不等式成立:

$$\text{Re}\{\kappa PK(i\omega) + K^*(i\omega)P^*\varepsilon PK(i\omega) - [MPK(i\omega) - i\omega I]^* \delta[NPK(i\omega) - i\omega I]\} \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

则系统(7)是双态的。

推论 1: 若矩阵 A 无纯虚特征值, (A, B) 可控、 (A, C) 可观, φ_i 在一个周期内的零点是孤立的, 并且存在对角矩阵 $\varepsilon = \text{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, $\kappa = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\} \neq 0$ 使得下面不等式成立:

$$\text{Re}\{\kappa PK(i\omega) + K^*(i\omega)P^*\varepsilon PK(i\omega)\} \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

则系统(7)是双态的。

注 1：当 P 为单位阵时，即表示无输入输出交叉，此时，定理 1 即为引理 2。

利用 KYP 引理，可以将频域条件(10)转化为相应的 LMI 形式。

推论 2：若矩阵 A 无纯虚特征值， (A, B) 可控、 (A, C) 可观， φ_i 在一个周期内的零点是孤立的，并且存在对角矩阵 $\varepsilon = \text{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ ， $\kappa = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\} \neq 0$ 及对称矩阵 X 使得下面的 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} C^*P^*\varepsilon PC & \frac{1}{2}C^*P\kappa \\ \frac{1}{2}\kappa PC & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XA + A^*X & XB \\ B^*X & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \tag{11}$$

则系统(7)是双态的。

证：由引理 1，令 $M = \begin{bmatrix} C^*P^*\varepsilon PC & \frac{1}{2}C^*P\kappa \\ \frac{1}{2}\kappa PC & 0 \end{bmatrix}$ 即可证明本推论。证毕。 □

(11)式成立当且仅当

$$XA + A^*X + C^*P^*\varepsilon PC \leq 0 \quad \text{及} \quad XB + \frac{1}{2}C^*P\kappa = 0$$

将 C 和 B 的表达式代入到上式有

$$XA + A^*X + P^*\varepsilon P \leq 0 \quad \text{及} \quad -X + \frac{1}{2}P\kappa = 0 \tag{12}$$

由上式的第二个方程可知

$$X = \frac{1}{2}P\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\kappa_2 \\ \frac{1}{2}\kappa_1 & 0 \end{bmatrix}$$

由 X 的对称性有 $\kappa_1 = \kappa_2$ ，将上式以及 A 的表达式代入到(12)的第一个不等式中有

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 a_{21} + \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}\kappa_1(a_1 + a_2) \\ -\frac{1}{2}\kappa_1(a_1 + a_2) & \kappa_1 a_{12} + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{13}$$

若要上式成立，需

$$\kappa_1 a_{21} + \varepsilon_1 \leq 0, \quad \kappa_1 a_{12} + \varepsilon_2 \leq 0$$

及

$$\kappa_1^2(a_1 + a_2)^2 - 4(\kappa_1 a_{21} + \varepsilon_1)(\kappa_1 a_{12} + \varepsilon_2) \leq 0$$

因此，由上面的分析可以给出下面的推论。

推论 3：考虑组合系统(7)，若存在数 $\varepsilon_1 > 0$ ， $\varepsilon_2 > 0$ ， $\kappa_1 \neq 0$ 使得下面不等式成立：

i) $a_1 a_2 - a_{12} a_{21} \neq 0$,

ii) $\kappa_1 a_{21} + \varepsilon_1 \leq 0, \quad \kappa_1 a_{12} + \varepsilon_2 \leq 0$

iii) $\kappa_1^2(a_1 + a_2)^2 - 4(\kappa_1 a_{21} + \varepsilon_1)(\kappa_1 a_{12} + \varepsilon_2) \leq 0$

则系统(7)是双态的。

证：由定理的条件 i) 就可得出矩阵 A 无纯虚特征值，而由上面的分析可知，若定理的条件 ii) 和条件 iii) 成立则不等式(11)成立，因此推论 2 的条件全部成立，即系统(7)是双态的。证毕。 □

注 2：当 P 为单位阵时，式(12)的第二个不等式为

$$X = \frac{1}{2}P\kappa = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\kappa_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\kappa_2 \end{bmatrix}$$

将上式以及 A 的表达式代入到(12)的第一个不等式中，则不等式(11)等价于

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 a_1 + \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}(\kappa_1 a_{12} + \kappa_2 a_{21}) \\ -\frac{1}{2}(\kappa_1 a_{12} + \kappa_2 a_{21}) & \kappa_2 a_2 + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{14}$$

因此由上面的分析可见，互联系统的双态性是很容易满足的，因而有下面的定理。

定理 2：总可以选择耦合参数 a_{12} 和 a_{21} 使得互联系统(3)或(7)是双态的。

4 算例

考虑如式(1)、(2)所定义的二阶类摆系统，其中 $\varphi_i(\sigma_i) = -(a_i + d_i \cos \sigma_i)(c_i + d_i \sin \sigma_i)$ ， $i = 1, 2$ 。方程(1)、(2)分别存在一特解

$$\eta_{it} = \frac{d\sigma_i}{dt} = c_i + d_i \sin \sigma_i \tag{15}$$

此特解同时是相空间上的一条轨迹。由微分方程的定性分析可知方程(1)、(2)对任意大于零的参数都是双态的，并且若

$$(\exists \sigma_i \in \mathbb{R}) : c_i + d_i \sin \sigma_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

则方程(1)、(2)分别存在第二类周期解，即方程(1)、(2)的解并不都是收敛的^[13]。

当给定 $c_1 = 0.2$ ， $d_1 = 1$ ， $c_2 = 0.1$ ， $d_2 = 0.9$ ， $a_1 = 2$ ， $a_2 = 1$ ， $A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_{12} \\ a_{21} & -a_2 \end{bmatrix}$ 时，由于式(16)不满足，因此系统(1)、(2)的解都是收敛的。若令 $a_{12} = 3$ ， $a_{21} = 0$ 时，则容易看出推论 3 的条件不成立。图 1、图 2 给出了初始值为 $\eta_0 = [2 \ -1]^*$ 、 $\sigma_0 = [4 \ -2]^*$ 时，系统(7)的解 σ 的曲线及相图，而图 3、图 4 为系统的状态变量 η 的曲线和相图。由图可见，此时，组合系统(7)存在周期轨道，因此，系统不是双态的。

若令 $a_{21} = 0.5$ 、 P 为单位矩阵，即组合系统无输入输出交叉时，则很容易找到 $\kappa_1 = -1$ 、 $\kappa_2 = -3$ 、 $\varepsilon_1 = 0.2$ 及 $\varepsilon_2 = 0.1$ 使得不等式(14)满足，因此组合系统(3)是双态的。图 5、图 6 给出了初始值为 $\eta_0 = [2 \ -1]^*$ 、 $\sigma_0 = [4 \ -2]^*$ 时，系统(3)的解 σ 及状态变量 η 的曲线。由图可见，此时组合系统的解和状态变量都收敛。而图 7、图 8 为存在输入输出交叉时，组合系统(7)的解 σ 及状态变量 η 的相图。由图可见，解 σ 无界，但状态变量 η 出现了混沌现象。由此可见，此类输入输出的交叉可以极大地改变系统解的性态。

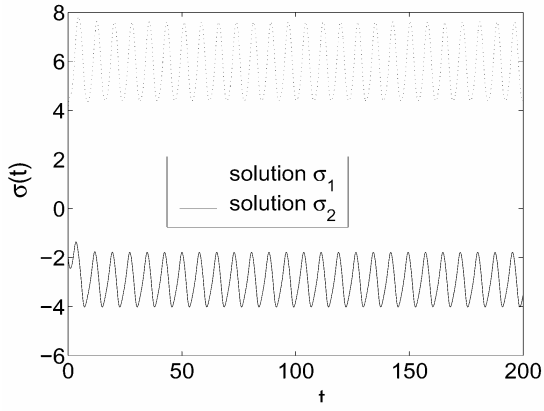


图1 方程(7)的解 σ 的曲线

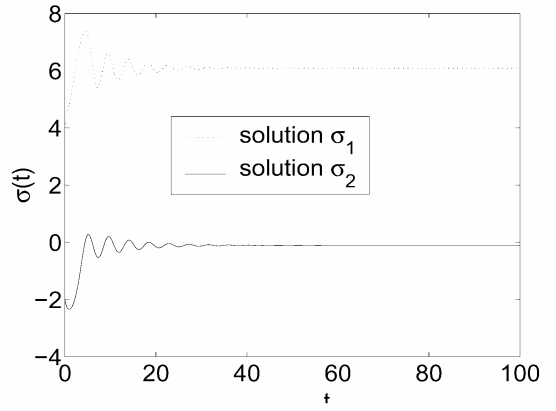


图5 方程(3)的解 σ 的曲线

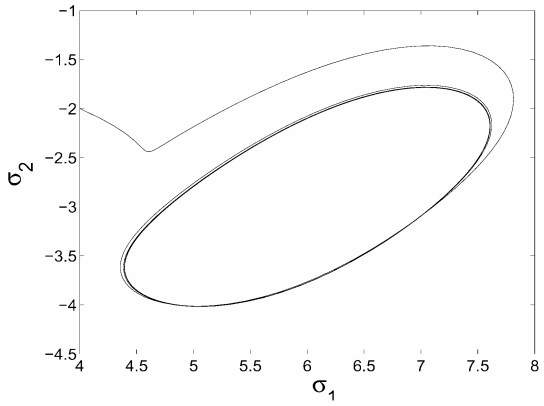


图2 方程(7)的解 σ 的相轨迹图

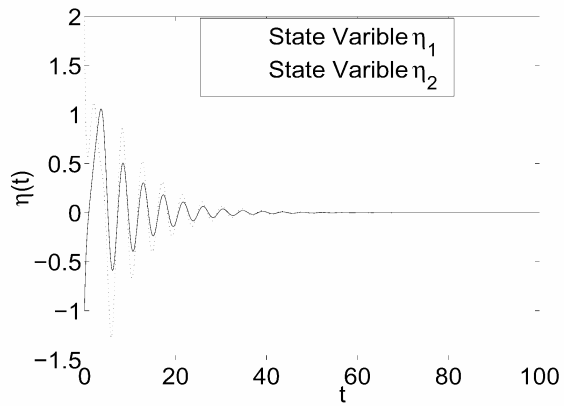


图6 方程(3)的状态变量 η 的曲线

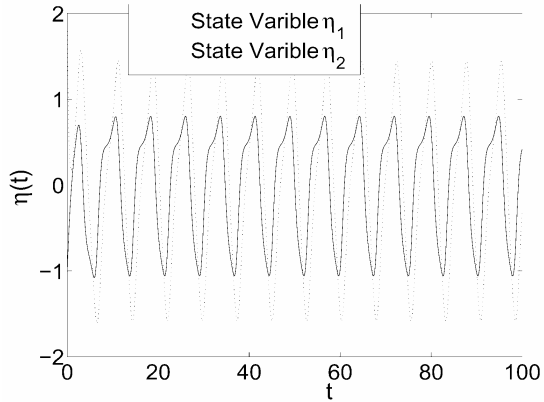


图3 方程(7)的状态变量 η 的曲线

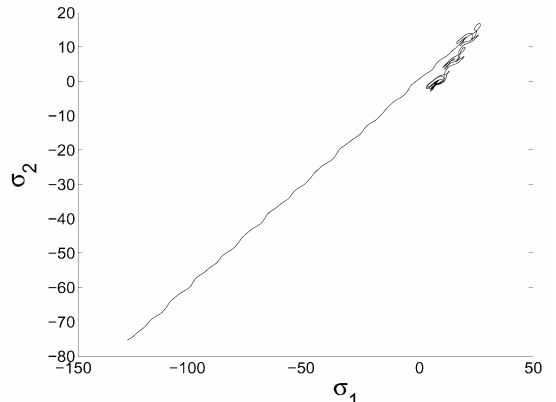


图7 方程(7)的解 σ 的相轨迹图

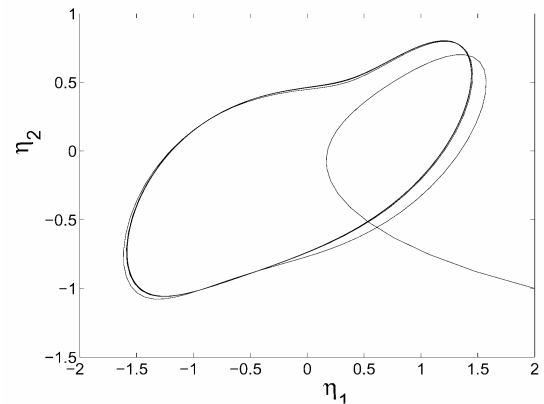


图4 方程(7)的状态变量 η 的相轨迹图

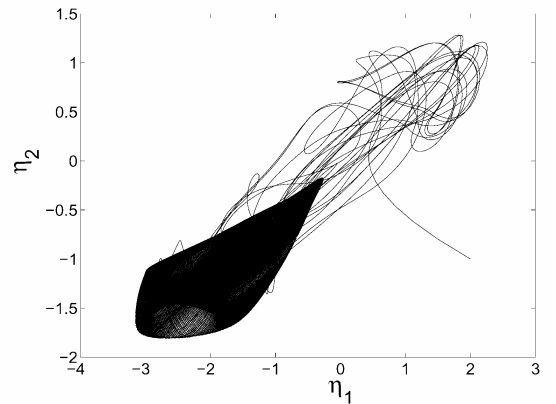


图8 方程(7)的状态变量 η 的相轨迹图

5 结论

本文研究了两个二阶类摆系统的耦合问题, 不仅考虑了线性互联的影响, 而且考虑了一类通过相应的置换矩阵来表示的输入输出交叉互联。给出了判定组合系统双态性的频域判据及LMI判据。给出的例子表明了此类耦合可以极大地改变系统的性态, 如两个不存在极限环的二阶类摆系统可以通过改变协调项的参数使得组合后的系统出现周期解甚至部分变量出现混沌, 即解 σ 无界, 但状态变量 η 出现了混沌现象。此类现象在平面相空间上看并不是混沌, 但在柱面相空间的柱面上却表现为混沌现象, 因此我们称之为柱面上的混沌。类摆系统中部分变量出现混沌的现象目前还没有相应的研究。另外, 对于柱面上所出现的混沌现象, 由于解 σ 无界, 因而根据前面所给出的双态性的定义可知系统仍然是双态的。由此可见, 即使系统满足双态性, 但系统内部所呈现的物理现象仍然可能是很复杂的。能否提出更符合具体工程实际需要的双态性定义, 还有待于进一步的研究。

参考文献:

- [1] 黄琳, 段志生. 控制科学中的复杂性[J]. *自动化学报*, 2003, 29(5): 748-754.
- [2] Zhisheng Duan, Lin Huang, Jinzhi Wang, Long Wang. Harmonic control between two systems[J]. *自动化学报*, 2003, 29(1): 14-22.
- [3] Zhisheng Duan, Jinzhi Wang, Lin Huang. Multi-input and multi-output nonlinear systems: Interconnected Chua's circuit[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004(Accepted).
- [4] Zhisheng Duan, Jinzhi Wang, Lin Huang. The actions of interconnections in linear and nonlinear systems[J]. *International Journal of Control*, 2004(Revised).
- [5] G.A.Leonov, V.B.Smirnova. Analysis of frequency-of-oscillations-controlled systems[J]. In: *Proceedings of International Conference on Control of Oscillations and Chaos*, 1997, 2: 439-441.
- [6] G.A.Leonov, A.Tomayev, T.Chshiyeva. Stability of frequency-phase locked automatic frequency control systems[J]. *Soviet Journal of Communications Technology and Electronics*, 1992, 37(11): 1-9.
- [7] F.Tricomi. Integrazione di unequazione differenziale presentata in elettrotecnica[J]. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa:Scienza Phys.e Mat.*, 1933, 2: 1-20.
- [8] L.Amerio. Determinazione delle condizioni di stabilita per gli integrali di un'equazione inessente l'elettrotecnica[J]. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1949, 4(30): 75-90.
- [9] W.D.Hayes. On the equation for a damped pendulum under constant torque[J]. *Z.A.M.Ph.*, 1953, 4(5):398-401.
- [10] G.Sansone, R.Conti. 非线性微分方程[M]. 黄启昌, 金成桴, 史希福译. 北京: 科学出版社, 1983.
- [11] G.A.Leonov, D.V.Ponomarenko, V.B.Smirnova. *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis*[M]. Singapore: World Scientific, 1996.
- [12] G.A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma[J]. *Systems and Control Letters*, 1996, 28: 7-10.
- [13] Xinbin Li, Yongnian Huang, Ying Yang, Lin Huang. Critical damping of the second-order pendulum-like systems[J]. *Applied mathematics and mechanics*, 2004(Accepted)

Lurie控制系统的关联绝对稳定性-BMI方法 *

年晓红^{1,2} 李鑫滨² 杨莹² 左志强²

1. 中南大学信息科学与工程学院·长沙,410075

2. 北京大学力学与工程科学系·北京,100871

摘要: 研究任意两个相互独立的Lurie控制系统能否通过关联或协调控制组成绝对稳定大系统的问题, 给出两个Lurie控制系统可关联绝对稳定的充分条件, 并给出了计算关联矩阵的双线性矩阵不等式方法。研究表明: 两个非绝对稳定的系统可以通过关联或协调控制来实现关联大系统的绝对稳定性。文末给出了本文结果的数值例子。

关键词: 绝对稳定性; 大系统; 协调控制; 双线性矩阵不等式

A BMI Approach to The Absolute Stability of Interconnected Lurie Control Systems

NIAN Xiaohong^{1,2} LI Xinbin² YANG Ying² ZUO Zhiqiang²

(1. School of Information Science and Engineering

Central South University · Changsha, 410075, P. R. China)

(2. Center for Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science

Peking University · Beijing, 100871, P. R. China)

Abstract: This paper deals with the problem of whether a large-scale Lurie system which is composed of two arbitrary independent Lurie control systems is absolute stable by interconnections or harmonic controllers. Some sufficient conditions for the absolute stability of interconnected Lurie control systems are obtained, and the algorithms for calculating the interconnected matrix and designing the harmonic controllers are proposed by using the methods of BMIs. It is shown that two Lurie control systems which are not absolute stable can be composed of a absolute stable large-scale Lurie control systems via interconnections or harmonic controllers. Finally, Example is given to illustrate the results presented in this paper.

Key words: Absolute stability; Large-scale systems; Harmonic Control; Bilinear inequalities

1 引言

由于大量工程实际问题如传输系统、通信系统、生态系统、经济系统和电力系统均可用关联大系统来描述, 因而大系统的稳定性和控制的研究引起了学者的广泛重视, 取得了许多重要进展^[1-15]。传统方法研究大系统的稳定性的分散集结方法^[6-8], 一般总是假定每一个子系统均是渐近稳定的, 然后通过弱关联来保证的大系统的稳定性和镇定性。在大系统控制器的设计中, 分散控制方法占有十分重要的地位^[9-15]。在设计分散控制器时, 一般采用设计局部反馈(自反馈)控制器的方法, 通过对每个子系统的强镇定来相对减小关联的作用来镇定大系统。尽管大系统的稳定性的分散集结方法和大系统控制中的分散镇定方法在理论上是可行的, 而且容易实现, 但是由于忽略或降低了关联的作用, 并不能完全解决实际系统中的关联大系统的稳定性和镇定问题。事实上, 关联在许多工程实际问题中起着十分重要的作用。也就是说在大系统中, 有些子系

统可能是不稳定的, 甚至所有的子系统都不稳定, 但可以通过选择适当的关联来实现大系统的稳定性。因此, 大系统的综合问题, 即怎样通过选择适当的关联来实现大系统的稳定性是一个十分重要的研究课题。到目前为止, 这方面的研究还未见到相关报到。最近, 段志生等^[16-18]用固定模方法和最小增益定理研究了子系统的协调控制和大系统的分散控制问题。他们的研究表明, 不稳定的子系统可以通过状态反馈来实现由状态反馈构成的关联大系统的镇定; 在大系统分散控制器的设计中, 可以充分发挥关联的作用而无需保证每一个子系统都镇定。

Lurie控制系统是一类非常重要的非线性控制系统。在过几十年中, 关于Lurie控制系统的绝对稳定性的研究受到了国内外学者的广泛重视, 形成了相对独立的理论体系^[19-21]。关于具有多个执行机构的大型Lurie控制系统的绝对稳定性的研究也有不少结果^[22-26]。众所周知, Lurie控制系统绝对稳定的一个重要前提条件是系统矩阵为渐近稳定矩阵, 对于两个非绝对稳定的Lurie控制系统能否通过关联或协

*国家自然科学基金重点项目(60334030)与国家自然科学基金项目(10272001)联合资助

调控制构成绝对稳定大系统的问题目前还很少有人讨论。

本文的主要目标是研究任意两个Lurie控制系统之间能否通过关联或协调控制构成绝对稳定大系统以及关联矩阵的算法和协调控制器的设计问题。我们将在§2中给出问题的表述；在§3中讨论两个子系统之间的关联稳定性；在§4中研究多个子系统之间的关联稳定性；最后将在§5中给出两个说明本文结果的示例。

2 问题表述

给定两个相互独立的Lurie控制系统

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + b_1 f_1(\sigma_1(t)), \\ \sigma_1(t) = c_1^T x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + b_2 f_2(\sigma_2(t)), \\ \sigma_2(t) = c_2^T x_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

这里： $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $f_i(\cdot) \in K[0, k_i] = \{f_i(\cdot) \mid f_i(0) = 0, \sigma_i f_i(\sigma_i) > 0\}$, $i = 1, 2$.

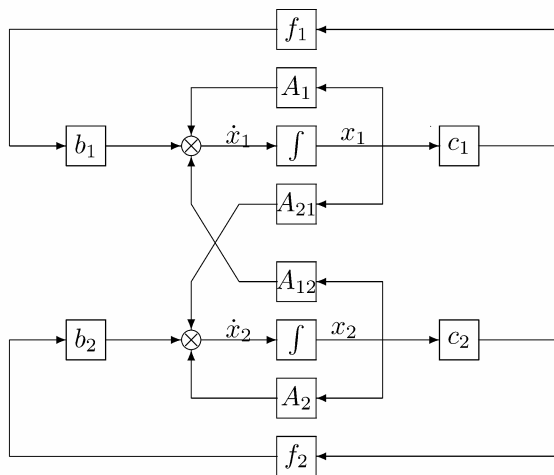


图1 Lurie控制系统的关联

我们将研究如下问题：

1° 是否存在关联矩阵 A_{12} , A_{21} 以及如何选择关联矩阵 A_{12} , A_{21} 使得如下关联Lurie控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1 + A_{12} x_2 + b_1 f_1(\sigma_1), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21} x_1 + A_2 x_2 + b_2 f_2(\sigma_2) \end{cases} \quad (3)$$

绝对稳定。这里： $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 为状态变量， $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 为已知实常矩阵， $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ 为未知实常矩阵。

2° 是否存在状态反馈控制器

$$u_{12}(t) = K_{12} x_2(t), \quad (4)$$

$$u_{21}(t) = K_{21} x_1(t), \quad (5)$$

使得如下关联Lurie控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1 + B_{12} u_{12} + b_1 f_1(\sigma_1), \\ \dot{x}_2(t) = B_{21} u_{21} + A_2 x_2 + b_2 f_2(\sigma_2) \end{cases} \quad (6)$$

绝对稳定。

3 主要结论

首先，我们研究Lurie控制系统的关联绝对稳定问题。

定理 1 若存在实数 $\gamma > 0$, 矩阵 A_{12} , A_{21} , P_{12} 和正定矩阵 P_{11} , P_{22} 满足矩阵线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

和双线性矩阵不等式

$$\mathcal{B}(A_{12}, A_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{22}, \gamma)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & d_{11} & d_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} & d_{21} & d_{22} \\ d_{11}^T & d_{21}^T & c_1^T b_1 & 0 \\ d_{12}^T & d_{22}^T & 0 & c_2^T b \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

则关联Lurie控制系统(3)绝对稳定。

这里： $\Sigma_{11} = A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + A_{21}^T P_{12}^T + P_{12} A_{21}$,

$$\Sigma_{12} = A_1^T P_{12} + P_{12} A_2 + A_{21}^T P_{22} + P_{11} A_{12},$$

$$\Sigma_{22} = A_2^T P_{22} + P_{22} A_2 + A_{12}^T P_{12} + P_{12}^T A_{12},$$

$$d_{11} = P_{11} b_1 + \frac{1}{2} A_1^T c_1 + \frac{1}{2} \gamma c_1, \quad d_{12} = P_{12} b_2 + \frac{1}{2} A_{21}^T c_2$$

$$d_{21} = P_{12}^T b_1 + \frac{1}{2} A_{12}^T c_1, \quad d_{22} = P_{22} b_2 + \frac{1}{2} A_2^T c_2 + \frac{1}{2} \gamma c_2.$$

证： 取Lyapunov函数

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \int_0^\infty f(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^\infty f(\sigma_2) d\sigma_2$$

当不等式(7)成立时， $V(x)$ 为正定Lyapunov函数(这里： $x = [x_1^T, x_2^T]^T$)。

由于矩阵不等式(8)成立时，如下矩阵不等式成立。

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

若记： $A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$, $P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$, 则不等式(9)可写为：

$$A^T P + P A < 0,$$

因而矩阵 A 为稳定矩阵。其次, Lyapunov函数系统 $V(x)$ 沿系统(3)的任意轨线对时间的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}|_{(3)} &= [\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + f_1(\sigma_1)\dot{\sigma}_1 + f_2(\sigma_2)\dot{\sigma}_2]_{(3)} \\ &= x^T [A^T P + P A] x + 2x^T P \begin{bmatrix} b_1 f_1(\sigma_1) \\ b_2 f_2(\sigma_2) \end{bmatrix} \\ &+ c_1^T A_1 x_1 f_1(\sigma_1) + c_1^T A_{12} x_2 f_1(\sigma_1) + c_1^T b_1 f_1^2(\sigma_1) \\ &+ c_2^T A_2 x_2 f_2(\sigma_2) + c_2^T A_{12} x_1 f_2(\sigma_2) + c_2^T b_2 f_2^2(\sigma_2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & d_{11} & d_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} & d_{21} & d_{22} \\ d_{11}^T & d_{21}^T & c_1^T b_1 & 0 \\ d_{12}^T & d_{22}^T & 0 & c_2^T b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ &- \gamma \sigma_1 f_1(\sigma_1) - \gamma \sigma_2 f_2(\sigma_2) \end{aligned}$$

因而系统(3)绝对稳定。定理证毕。

下面我们讨论Lurie控制系统的协调控制问题。考虑系统(6)在状态反馈控制器(4)和(5)作用下的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1 + B_{12} K_{12} + b_1 f_1(\sigma_1), \\ \dot{x}_2(t) = B_{21} K_{21} + A_2 x_2 + b_2 f_2(\sigma_2) \end{cases} \quad (10)$$

定理 2 若存在实数 $\gamma > 0$, 矩阵 K_{12} , K_{21} , P_{12} 和正定矩阵 P_{11} , P_{22} 满足线性矩阵不等式(7)和双线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}(K_{12}, K_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{22}, \gamma) \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & d_{11} & d_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} & d_{21} & d_{22} \\ d_{11}^T & d_{21}^T & c_1^T b_1 & 0 \\ d_{12}^T & d_{22}^T & 0 & c_2^T b_2 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

则关联Lurie控制系统(3)绝对稳定。这里:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + K_{21}^T B_{21}^T P_{12}^T + P_{12} B_{21} K_{21}, \\ \Pi_{12} &= A_1^T P_{12} + P_{12} A_2 + K_{21}^T B_{21}^T P_{22} + P_{11} B_{12} K_{12}, \\ \Pi_{22} &= A_2^T P_{22} + P_{22} A_2 + K_{12}^T B_{12}^T P_{12} + P_{12}^T K_{12} B_{12}, \\ d_{11} &= P_{11} b_1 + \frac{1}{2} A_1^T c_1 + \frac{1}{2} \gamma c_1, \\ d_{12} &= P_{12} b_2 + \frac{1}{2} K_{21}^T B_{21}^T c_2 \\ d_{21} &= P_{12}^T b_1 + \frac{1}{2} K_{12}^T B_{12}^T c_1, \\ d_{22} &= P_{22} b_2 + \frac{1}{2} A_2^T c_2 + \frac{1}{2} \gamma c_2. \end{aligned}$$

证: 该定理的证明与定理1类似, 只要将定理1中的 A_{12} 和 A_{21} 分别用 $B_{12} K_{12}$ 和 $B_{21} K_{21}$ 替代即可。

注 1 在定理1和定理1中, 并没有要求矩阵 A_1 , A_2 为渐近稳定矩阵, 因而两个非绝对稳定的Lurie控制系统系统是可以由关联或协调控制来构成绝对稳定的关联大系统的。在后面将给出两个非绝对稳定的Lurie控制系统通过关联或协调控制构成绝对稳定关联大系统的例子。

注 2 矩阵不等式(8)为关于矩阵变量 P_{11} , P_{22} , P_{12} , A_{12} , A_{21} 的双线性矩阵不等式, 而矩阵不等式(11)为关于矩阵变量 P_{11} , P_{22} , P_{12} , K_{12} , K_{21} 的双线性矩阵不等式。到目前为止, 双线性矩阵不等式还没有直接有效的求解方法。目前常用交替算法^[27]来求双线性矩阵不等式的可行解。

下面我们分别讨论求矩阵不等式组(7)-(8)、(7)和(11)可行解的计算方法。

首先考虑矩阵不等式(7)-(8)的计算问题, 注意到对于给定的 $\gamma > 0$, 当变量 P_1, P_2, P_{12} 固定时, 双线性矩阵不等式

$$\mathcal{B}(A_{12}, A_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{22}, \gamma) < 0, \quad (12)$$

为关于矩阵变量 A_{12}, A_{21} 的线性矩阵不等式; 当 A_{12}, A_{21} 固定时, 则为关于矩阵变量 P_1, P_2, P_{12} 的线性矩阵不等式。因而可用如下算法来求矩阵不等式(7)-(8)的可行解。

算法1

初始化 令: $k = 0$, 给出初始值 $(P_{11}, P_{22}, P_{12}) = (P_{11}^{(0)}, P_{22}^{(0)}, P_{12}^{(0)})$ 满足不等式(7);

循环 令 $k = k + 1$; 求解线性矩阵不等式

$$\mathcal{B}(A_{12}, A_{21}, P_{11}^{(k-1)}, P_{22}^{(k-1)}, P_{12}^{(k-1)}) < 0$$

的可行解 A_{12}, A_{21} , 并记: $(A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}) = (A_{12}, A_{21})$; 求解线性矩阵不等式(7)和

$$\mathcal{B}(A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}, P_{11}, P_{22}, P_{12}) < 0$$

的可行解 P_{11}, P_{22}, P_{12} , 并记: $(P_{11}^{(k)}, P_{22}^{(k)}, P_{12}^{(k)}) = (P_{11}, P_{22}, P_{12})$ 。

结束 直到 $\|P_{ii}^{(k)} - P_{ii}^{(k-1)}\| < \varepsilon, i = 1, 2; \|A_{ij}^{(k)} - A_{ij}^{(k-1)}\| < \varepsilon, i = 1, 2; i \neq j$ 。

这里 ε 为给定的分离常数。

同理, 注意到对于给定的 $\gamma > 0$, 当变量 P_1, P_2, P_{12} 固定时, 双线性矩阵不等式

$$\mathcal{B}(K_{12}, K_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{22}, \gamma) < 0, \quad (13)$$

为关于矩阵变量 K_{12}, K_{21} 的线性矩阵不等式; 当 K_{12}, K_{21} 固定时, 则为关于矩阵变量 P_1, P_2, P_{12} 的线性矩阵不等式。因而可用如下算法来求矩阵不等式(7)和(11)的可行解。

算法2

初始化 令: $k = 0$, 给出初始值 $(P_{11}, P_{22}, P_{12}) = (P_{11}^{(0)}, P_{22}^{(0)}, P_{12}^{(0)})$ 满足不等式(11)。

循环 令 $k = k + 1$; 求解线性矩阵不等式

$$\mathcal{B}(K_{12}, K_{21}, P_{11}^{(k-1)}, P_{22}^{(k-1)}, P_{12}^{(k-1)}) < 0$$

的可行解 K_{12}, K_{21} , 并记 $(K_{12}^{(k)}, K_{21}^{(k)}) = (K_{12}, K_{21})$; 求解线性矩阵不等式(7)和

$$\mathcal{B}(K_{12}^{(k)}, K_{21}^{(k)}, P_{11}, P_{22}, P_{12}) < 0$$

的可行解 P_{11}, P_{22}, P_{12} , 并记 $(P_{11}^{(k)}, P_{22}^{(k)}, P_{12}^{(k)}) = (P_{11}, P_{22}, P_{12})$. 结束 直到 $\|P_{ii}^{(k)} - P_{ii}^{(k-1)}\| < \varepsilon, i = 1, 2; \|K_{ij}^{(k)} - K_{ij}^{(k-1)}\| < \varepsilon, i = 1, 2; i \neq j$. 这里 ε 为给定的分离常数.

4 数值例子

下面将给出本文结果的一个示例.

例 1 考虑两个Lurie控制系统(1)和(2)的协调控制问题, 假定:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_2 = [-0.5; -1], c_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

可以验证, A_1, A_2 均不稳定, 因而Lurie控制系统(1)和(2)均非绝对稳定.

当 $\gamma = 0.01$ 时, 取初值

$$P_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{22}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

用Matlab Toolbox可求得不等式(7)和(11)的一组可行解:

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0.1458 & 0.6521 \\ -0.8122 & 1.4594 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -0.5329 & 0.2399 & -1.9199 \\ -0.0289 & 1.7648 & -1.4802 \end{bmatrix};$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1.5657 & -0.7224 & -0.1481 \\ -0.7224 & 1.5213 & -0.1475 \\ -0.1481 & -0.1475 & 1.4476 \end{bmatrix},$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} -0.1547 & 0.2115 \\ 0.0388 & 0.6236 \\ -0.4633 & 0.5539 \end{bmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 0.3987 & -0.6266 \\ -0.6266 & 1.6200 \end{bmatrix}.$$

图2-图5为 $f_1(\sigma_1) = \sigma_1^3, f_2(\sigma_2) = 4\sigma_2^3 e^{-\sigma_2^2}$ 时系统变量随时间的变化曲线图.

5 结论

研究了Lurie控制系统的关联绝对稳定性和协调控制问题. 研究表明: 两个非绝对稳定的Lurie控制系统可以通过关联或协调控制构成绝对稳定的关联大系统, 同时给出了基于双线性矩阵不等式的可用MATLAB工具箱求解的计算关联矩阵或设计协调控制器的有效算法.

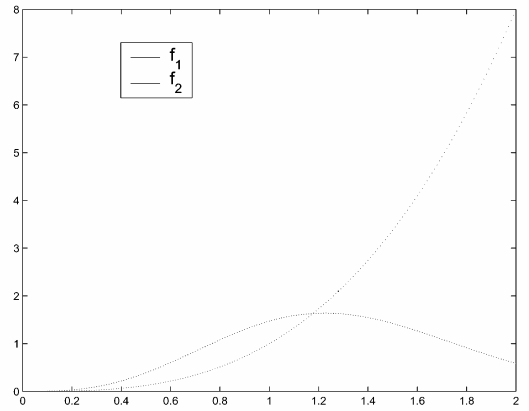


图2 函数 f_1, f_2 的图象

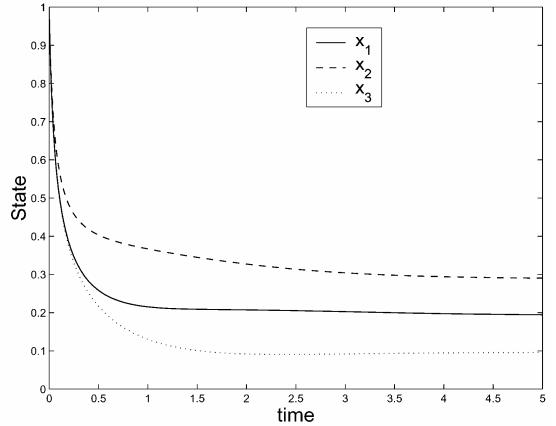


图3 子系统I变量的变化曲线

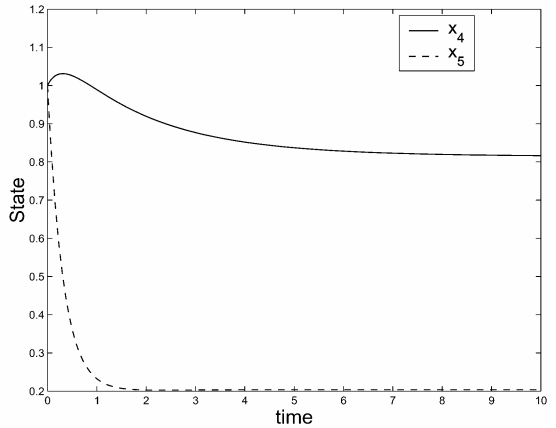


图4 子系统II变量的变化曲线

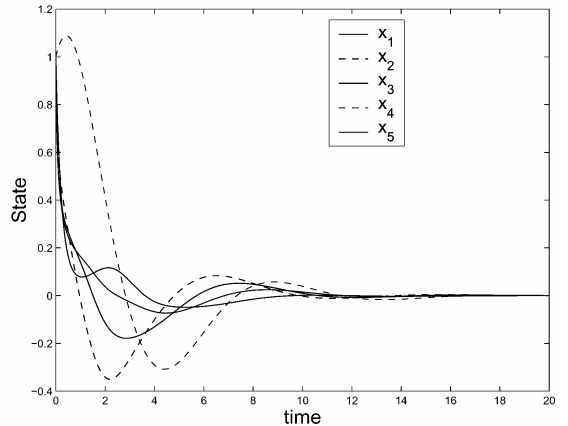


图5 协调控制系统变量的变化曲线

参考文献:

- [1] Siljak D. D. Large-scale dynamic systems: stability and structure. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] Mahmoud M. S. M. F. Hassan and M. G. Darwish, Large-scale control systems: theories and techniques. Dekker, New York, 1985.
- [3] Siljak D. D. Decentralized Control of Complex Systems. Academic Press, New York, 1991.
- [4] 高为炳, 霍伟, 大系统的稳定性、分散控制及递阶控制基础. 北京航空航天大学出版社, 1994.
- [6] Bailey F. N. The application of Lyapunov's second method to interconnected systems, J. SIAM Control, 1966, Ser. A, Vol. 3, No. 3: 443-462.
- [7] Thompson W. E. Exponential stability of interconnected Systems IEEE Trans. Automat. Control, 1970, 15: 504-506.
- [8] Araki M. and Kondo B. Stability and transient behavior of composite nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1972, 17: 537-541.
- [9] Wang S H, Davison E J. On the stabilization of decentralized control systems. IEEE TAC, 1973, 18(5): 473-478.
- [10] Davison E J. The decentralized stabilization and control of a class of unknown nonlinear time-varying systems. Automatica, 1974, 10(4): 309-366.
- [11] Sezer M E, and Huseyin O. Stabilization of linear time-invariant interconnected systems using local state feedback. IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, 1978, SMC-8: 751-756.
- [12] Ikeda M, Siljak D D. On decentrally stabilizable large-scale systems. Automatica, 1980, 16(4): 331-334.
- [13] Sezer M E, Siljak D D. On decentralized stabilization and structure of linear large scale systems. Automatica, 1981, 17(4): 641-644
- [14] Ikeda M, Siljak D D, Yasuda K. Optimality of decentralized control for large scale systems. Automatica, 1983,19(4): 309-316.
- [15] Shi Z C, Gao W B. Stabilization by decentralized control for large scale interconnected systems. Large Scale Systems,1986, 10(2): 147-155.
- [16] Duan Zhisheng, HUANG Lin, WANG Jinzhi, WANG Long. Harmonic control between two systems Acta, Automatica Sinica, 2003, 29(1), 14-22.
- [17] Duan Zhisheng, Lin Huang, Long Wang, Jinzhi Wang, Some applications of small gain theorem to interconnected systems, Systems and Control Letters, to appear.
- [18] Duan Zhisheng, Jinzhi Wang, Lin Huang. The actions of interconnections in linear and nonlinear systems, International Journal of Control, Revised. 9
- [19] Lurie, A. I., On some nonlinear problems in the theory of automatic control, H. M. Stationery Office, London, 1951.
- [20] 谢惠民, 绝对稳定性理论与应用, 科学出版社, 1986.
- [21] Liao Xiaoxin, Absolute stability of nonlinear control systems, Science Press, Beijing, and Kluwer Acadmic Press, Amsterdam.
- [22] 赵素霞,多个执行部件的控制系统的绝对稳定性,中国科学, 1987,A(8):785-792.
- [23] RaPopert, L. B., Problem of absolute stability of control systems with several nonlinear stationary compositions, Avtomat. Telemekh., 1987, (5): 66-74. 1
- [24] Wassim W. Haddad, and Vikram Kapila, Absolute Criteria for Multiple Slope-Restricted Monotonic Nonlinearities, IEEE Trans. Automat. Control, vol. 40, no. 2, pp. 1995, 361-363.
- [25] 年晓红,具有多个执行机构的Lurie控制系统的鲁棒稳定性,自动化学报, 1998,Vol. 24, no. 4: 562-565. 10
- [26] 年晓红,具有多个独立执行机构的Lurie控制系统的鲁棒稳定性, 控制理论与应用, 1999, vol.16, no. 1: 43-46
- [27] Goh, K. C., Turan, L. Safonov, M. G. et al. : Baffine matrix inequality properties and computational methods, Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, 850-855.

混杂系统中的混沌控制：脉冲时延反馈控制方法

田玉平

(东南大学 自动控制系, 南京 210096)

E-mail: yptian@seu.edu.cn

摘要: 论文分三部分, 第一部分简单回顾混沌控制中的一些重要课题及其研究进展, 如不稳定周期轨道的镇定、混沌控制中的参数辨识问题、用于不稳定周期轨道镇定的时延反馈控制和广义时延反馈控制方法, 以及该类方法的“奇数限制”及其完全刻画。第二部分考虑混杂系统中的混沌动力学及其控制。第三部分介绍镇定混杂系统中不稳定周期轨道的脉冲时延反馈控制方法。

关键词: 控制混沌, 时延反馈控制, 脉冲控制, 周期轨道, 混杂系统

Controlling Chaos in Hybrid Systems: Impulsive Delayed Feedback Control Approach

Yu-Ping Tian

(Southeast University, Nanjing, 210096)

Abstract: This paper consists of three parts. In the first part, we give a brief review of some important topics and related results in control of chaos, such as stabilization of unstable periodic orbits (UPOs), identification of parameters in chaos control, odd number limitation and full characterization of the limitation of delayed feedback control and generalized delayed feedback control for stabilization of UPOs, etc. In the second part, chaotic dynamics and controlling chaos in hybrid systems are considered. In the third part, we introduce a new control technique – impulsive delayed feedback control - for stabilizing UPOs in hybrid systems.

Key words: controlling chaos, delayed feedback control, Impulsive control, periodic orbits, hybrid systems

1 Control of chaos: a brief survey

Stabilizing unstable periodic orbits (UPOs) embedded in chaotic dynamics has drawn much attention recently and become a very active multidisciplinary research area. The first chaos control, known as the OGY method proposed by Ott, Grebogi and Yorke, stabilizes UPOs using small discontinuous parameter perturbations [14]. In the language of control theory, OGY method is essentially a switching control with a sliding mode, which suppresses the system state on a local stable manifold around the target point. Further extensions based on the OGY method [5,6] and using the concept of invariant manifolds have been developed [21,22]. When a chaotic system contains some

uncertain parameters, adaptive control mechanism can be useful. However, unlike conventional adaptive control problems, in order to stabilize the system at the target UPO, which is dependent of the uncertain parameters, parameter estimation in adaptive control for chaotic systems should usually converge to the true value of the parameter. In this context, the ergodicity of chaotic signals is very important for meeting the persistence excitation condition [22,24].

While conventional control methods are applied to control of chaos, they require information about inherent UPOs, which are very difficult to derive by mathematical means or to implement by electronic circuits due to the unstable nature of the inherent UPO. Pyragas proposed a delayed feedback control

(DFC) method for stabilization of inherent UPO in chaotic systems, that requires only a period constant instead of the exact information of the orbit to be stabilized [16]. A dynamical version of the time-delayed feedback control using output information was presented in [25].

For chaotic discrete-time systems, Ushio used the DFC to stabilize unstable fixed points and found a limitation [31], called odd number limitation, which can be stated as follows: if the system Jacobi about the target fixed point has an odd number of real eigenvalues greater than unity, then the system is not stabilizable by DFC. A similar limitation exists in control of chaotic continuous-time systems [12]. Nakajima and Ueda further proved that the odd number limitation holds for a generalized delayed feedback control including extended time-delayed auto-synchronization, exponential DFC among others [13]. In [25], Tian and Chen showed the limitation is inherited in an observer-based dynamical DFC for continuous-time systems. To overcome the odd number limitation, various extensions of the method have been investigated [10,17,23,26,35].

The odd number limitation actually describes a necessary condition for stabilizability via DFC. The problem of finding necessary and sufficient conditions has attracted much attention and remained open for a long time [8,9]. For the first-order and second-order discrete-time systems, Ushio obtained necessary and sufficient conditions using Jury's stability test [31]. In paper [32], Ushio and Yamamoto extended DFC to the nonlinear estimation case, and reduced the stabilization problem to solving linear matrix inequalities (LMIs). But the solvability of the LMIs was not addressed. Recently, it was proved that $0 < \det(I - A) < 2^n$ is a necessary and sufficient condition of stabilizability via DFC for an n -order system with Jacobi A [36]. This result shows that the odd number limitation actually only characterizes the lower bound of $\det(I - A)$. But the upper bound has not been pointed out before. In

another recent paper [29], the stabilizability problem for discrete-time systems under the generalized delayed feedback control (GDFC) is solved. It is proved that $0 < \det(I - A) < 2^{n+m}$ is a necessary and sufficient condition of stabilizability via m -step GDFC for an n -order system with Jacobi A . This result shows that the upper bound in the above condition can be arbitrarily enlarged by increasing the number of delays in the feedback. In other words, a system which can not be stabilized by the conventional DFC may still be stabilized by GDFC, while early results show that GDFC has no advantage over the conventional DFC in overcoming the odd number limitation [13].

2 Chaos and control in hybrid systems

Hybrid systems are systems which involve both continuous-time dynamics and discrete events. Hybrid behaviors arise in many situations both in man-made systems and in nature. Continuous-time systems, which have a phased operation, such as walking robots, nonlinear electronic circuits, biological cell growth, are well-suited to be modeled as hybrid systems, as are the continuous-time systems which are controlled by a discrete logic, for example, chemical plant controlled with valves and pumps, aircraft with a switching controller.

Because of the coupling and interaction of discrete and continuous-time phenomena, behaviors of hybrid systems can be extremely complex. Even relatively simple hybrid systems, such as piecewise linear systems, may exhibit very rich and typical nonlinear dynamics such as bifurcations and chaos. A well-known example of piecewise linear chaotic systems is the Chua's circuit and its extensions [3]. There are many other examples. For instance, Chua and Lin showed that chaos and fractal phenomena could occur in a second-order piecewise linear digital filter [4]. Ushio and Hsu [30], and Yu [34] analyzed chaotic dynamics in switching control systems. Chase et al. [2] analyzed chaotic and periodic dynamics in a switched flow model which