普通高等教育‘十五’国家级规划教材

（高职高专教育）

微　积　分

孙薇荣　谢国瑞　汪国强　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材，适合高等职业教育、高等专科教育及成人高等教育各专业使用。在教学时可按一学期每周 4～5 学时安排。内容包括函数、导数与微分、导数的应用、积分、微分方程及多元函数微积分初步。每章配有习题和自测题，书末附有习题及自测题答案与提示，并附有不定积分表及“专升本”全国统一试卷。

本书充分注意高职高专教育和成人高等教育的特点，对教学内容的选取，力求应用性、削减计算技巧、淡化数学理论，重视日常的、经济的应用，同时兼顾为学生“专升本”的继续学习或其他形式深造提供必备的微积分基础。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/孙薇荣，谢国瑞，汪国强主编. —北京：高等教育出版社，2004.6

ISBN 7-04-014703-3

Ⅰ.微… Ⅱ.①孙…②谢…③汪… Ⅲ.微积分-高等学校 技术学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046471 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	10.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	240 000	定　　价	11.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19 号)，提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。编写本书的目的是提供一本为高等职业教育、高等专科教育、成人高等教育专科各专业所适用的《微积分》。

本书是《高职高专数学教程》(谢国瑞、汪国强主编)的第2篇微积分概要的延伸，是配套教材的组成部分。众所周知，微积分是每个接受高等教育者都应该了解的数学分支，它既为学习其他课程打好应有的基础，同时也致力于提高学生的数学素养。

现行的高职高专《高等数学》教材几乎都是依本科相应教材的模式编写的，内容求全、体系一成不变，使学生对数学的学习倍感困难。因此，根据以培养高级应用性人才为目标，应具有较强的动手能力及一定的基础理论知识的要求，对微积分课程的内容和体系进行了较大的改革。具体地说，本书有以下特点：

1. 按照教学基本要求，充分注意高职高专教育的特点，以“必需”“够用”为度。

2. 重点突出微分(导数)、积分两大基本内容，并注重微分、积分的应用(特别是经济方面的应用)。

3. 对传统教材中关于极限的计算技巧作了很大的削减，在教材体系上作了较大的改革(极限、连续不单独成章)。

4. 为使学生掌握所学的基本概念、基本理论和基本方法，每章配有必要的练习题和自测题。

由于对高职高专教育数学课程教学内容体系改革的认识还不是很深刻，对传统的微积分内容和体系改革如何深化、方向是否找准都在探索之中，因此本书仅起抛砖引玉的作用，殷切期望同行专家，特别是广大读者批评指正，共同推进高职高专微积分课程的教学改革和教材建设。

最后，我们要对组织和帮助我们进行项目研究和教材编写的教育部高教司及高等教育出版社的领导，上海交通大学教务处、成人教育学院的领导表示衷心的感谢，也要对上海杉达学院及上海工商外国语职业学院等领导的支持表示由衷的感谢。上海交通大学景继良教授、郑麒海副教授等也参与了具体的工作。但由于水平有限、书中的错、漏、不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2004.2

目　　录

第一章　函　　数

函数是微积分的研究对象，是微积分中最重要的基本概念. 本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上，进一步讨论函数的性质和结构，为研究微积分问题打下基础.

1.1　预备知识

1.1.1　实数

由中学数学知道，有理数和无理数统称为实数，实数与数轴上的点建立了一一对应关系，所以通常把一个实数称为(数轴上的)点，反过来称(数轴上的)点为实数.

常用的数集是：

实数集 $\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 是实数}\}$；正实数集 $\mathbf{R}_+=\{x \mid x\in\mathbf{R}, x>0\}$；

有理数集 $\mathbf{Q}=\{x \mid x \text{ 是有理数}\}$；

非负整数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

正整数集 $\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots\}$等.

1.1.2　绝对值

实数 x 的绝对值 $|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ $|x|$的几何意义为数轴上的点 x 到原点的距离.

由绝对值的几何解释，容易了解下列性质：

若 $x\in\mathbf{R}$，$a\in\mathbf{R}_+$，则

(1) $|x|\geqslant 0$ 且 $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$；

(2) $|-x|=|x|=\sqrt{x^2}$；

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(4) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；

(5) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

实数四则运算的绝对值，有以下公式：

若 x，$y\in\mathbf{R}$，则

(1) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$　(称为三角不等式)；

(2) $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|$；

(3) $|xy|=|x||y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

三角不等式(1)可以根据绝对值性质(3)证明．不等式(2)可由三角不等式(1)推得，事实上，在(1)中将 $x+y$ 换成 x，则 x 换成 $x-y$，而 y 不变，于是(1)变为 $|x|\leqslant|x-y|+|y|$，即

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|,$$

由 x，y 的任意性，知 $|y|-|x|\leqslant|x-y|$，即

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|$$

从而有

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|,\text{即}$$

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|.$$

公式(3)、(4)直接由绝对值定义得到.

1.1.3 区间

区间是一种常用的实数集．它包括有限区间和无限区间．有限区间的记号和定义如下：

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

无穷区间的记号和定义如下：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},\quad (a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

邻域是微积分中经常用到的一种实数集 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，它表示以点 x_0 为中心，δ $(\delta>0)$为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

在 $U(x_0,\delta)$ 中去掉中心点 x_0 所得的实数集，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，称为点 x_0 的去心邻域，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

1.2 函数概念

在研究实际问题、观察某些现象的过程中，通常要关注数量这一侧面．在数学中常抽去考察对象的具体意义，把数量分为常量和变量．习惯上，常用字母 a，b，c 等表示常量，而用 x，y，z 等表示变量．在微积分中若不作特殊说明，数量都在实数集中取值.

在研究事物的某一变化过程中，常出现多个变量，它们以一定方式相互联系着．例如在民航客机固定航线执行航班飞行任务的过程中，飞行的时间 t，距目的地的距离 d，剩余燃料的重量 W 等是依照确定的关系同时在变化着的量．如果以飞行时间 t 作为飞行过程的(自)变量，那么 d 和 W 等都看作因 t 变化而变化的(因)变量，d 与 t，W 与 t 之间的那种确定的依赖关系就是所谓变量之间的函数关系.

1.2.1 函数的概念

定义 1.1 设 x 和 y 是同一过程中的两个变量. 若当 x 取其变化范围 D 内任一值时，按某种对应规则 f，总能惟一确定变量 y 的一个值与之相对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，也称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，表示对应规则的 f 是函数的记号，D 称为函数的定义域.

由定义可知，定义域与对应规则是决定函数的两个要素. 集合 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域，它由定义域和对应规则所确定.

通常把函数 f 的定义域记为 $D(f)$，值域记为 $Z(f)$.

在实际问题中，函数的定义域是由实际意义来确定的. 例如时间 t，航距 d 和燃料的重量 W 都是非负实数. 在研究用公式表达的函数时，函数的定义域是指能使表达式有意义的自变量的一切实数值所成的数集，也叫做函数的自然定义域. 若不加说明，函数的定义域是指函数的自然定义域.

例 1 据邮局公布，国内异地信件质量 m（单位：g）与邮资 P（单位：元）的关系为每 20 g 资费为 0.8 元，则资费与信件质量的函数关系可表示为

$$P(m)=\begin{cases}0.8, & 0<m\leqslant 20,\\ 1.6, & 20<m\leqslant 40,\\ 2.4, & 40<m\leqslant 60,\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}}{x+1}$ 的定义域.

解 由于负数的平方根在实数范围内没有意义，且分式的分母不能为零，所以函数的定义域为

$$\begin{cases}2-x-x^2\geqslant 0,\\ x+1\neq 0\end{cases}$$

的解集，因此函数的定义域 $D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1]$.

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(2)$，$f(-x)$，$f(1-x)$.

解 易知 $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以

$$f(2)=\frac{1-(2)}{1+(2)}=-\frac{1}{3}.$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}\quad(x\neq 1).$$

$$f(1-x)=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x}\quad(x\neq 2).$$

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法通常有公式法、表格法及图示法三种：

(1) 公式法——用具体的数学运算式表示自变量和因变量之间的函数关系的方法. 如例 1，例 2，例 3 中的函数都是用公式法表达. 用公式法表达的函数简明准确，便于运算和分析，

但不够直观.

(2) 表格法——将一系列自变量值与其对应的因变量值用表格形式来表示函数的方法. 平方根表、对数表、三角函数表等是常见的用列表法表示的函数，科学实验中也常用这种方法来表示函数关系，列表法表示的函数使用方便，但数据不全，不便于运算和分析.

(3) 图示法——用坐标平面上的曲线来表示函数的方法. 自变量 x 和因变量 y 的每一对值，对应于 Oxy 平面上的一个点(x,y)，这些点的全体通常形成一条曲线，因此曲线 $y=f(x)$ 就是函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$的图形. 用图示法表示的函数直观性强，但不便于分析运算. 例如心电图(电流关于时间的变化关系)显示被检查者的心率变化，医生从心电图得到所需的信息进行诊断.

在微积分学习中最常用的是用公式表示的函数，为了对函数有直观的了解，有时需要作出函数的图形. 在实际问题中往往很难用公式来表示函数关系，因此常用列表法或图示法得到函数关系，为便于进行理论分析和推理运算，有时需要用公式近似表达所给的函数关系.

用两个或两个以上的公式所表示的函数称为分段函数，确切地说，分段函数是在其定义域的不同范围用不同的公式所表达的函数，例 1 是分段函数.

例 4　画出下列常用分段函数的图形：

(1) 绝对值函数　$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(2) 符号函数　$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

(3) 取整函数　$y=[x]=$ 不超过 x 的最大整数.

解　(1)　　　　(2)

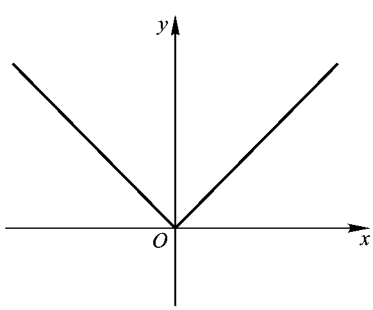


图 1－1

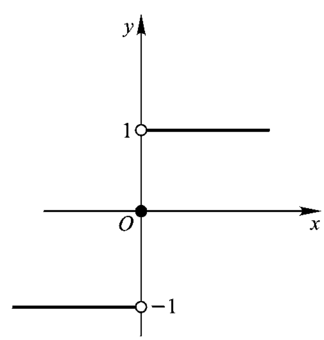


图 1－2

(3) 取整函数可表示为分段函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

例如，$[1.2]=1$（因 $1.2\in[1,2)$），$[-1.7]=-2$（因 $-1.7\in[-2,-1)$）. 由取整函数的分段表示可知，当 $x\in[0,1)$时，$y=0$；当 $x\in[1,2)$时，$y=1$；当 $x\in[-1,0)$时，$y=-1$；当 $x\in[-2,-1)$时，$y=-2$；等等. 其图形如图 1－3.

例 5 试作出分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 4-2x^2, & x\geqslant 1\end{cases}$$

的图形.

解 这是一个分段函数，它表示在 $x<0$ 时为直线 $y=-x$；在 $x\in[0,1)$ 时为开口向上的抛物线 $y=1+x^2$；在 $x\geqslant 1$ 时是开口向下的抛物线 $y=4-2x^2$. 所以这个分段函数的(整体)图形如图 1－4.

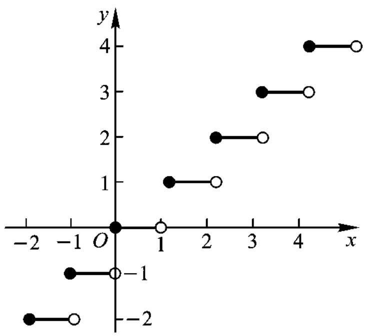


图 1－3

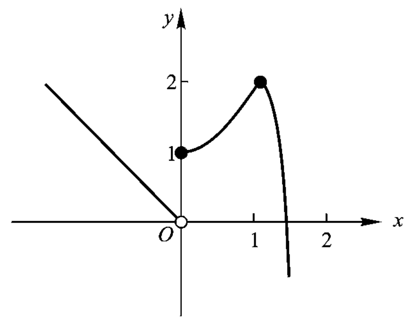


图 1－4

例 6 某城市出租车起步价为 10 元(不超过 3 km)，超过 3 km 后，按每 1 km 加价 2 元计算，试写出车费 y (单位:元)与行车距离 x (单位:km)的函数关系.

解 因为当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=10$；而当 $x>3$ 时，超过路径为 $x-3$，以每 1 km 2 元计价，此时 $y=10+2(x-3)$. 于是

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 10+2(x-3), & x>3.\end{cases}$$

如果车费计价器不显示角、分，则函数关系为

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 10+2(x-3), & x=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\\ [10+2(x-3)]+1, & x>3,\ x\neq 4,\ 5,\ 6,\ \cdots.\end{cases}$$

例如，$x=3.2$ km，则 $y=11$ 元；$x=3.6$ km，则 $y=12$ 元；$x=5$ km，则 $y=14$ 元.

注 本题解答中[ ]表示取整函数.

1.2.3 函数的几种特性

关于函数与它的图形有关的几种特性叙述如下.

1. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在正数 M，使对 X 内任一点 x，对应的函数值 $f(x)$都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在 X 上有界，若这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$在 X 上无界.

当函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界时，它的图形夹在两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$，$\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，这是因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 而函数 $y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ 在其定义域上是无界的.

应该指出，函数的有界性与自变量的取值范围 X 相关联，例如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的，事实上对任意 $x\in[1,2]$ 都有 $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，区间 $I\subset D(f)$. 若对任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上[严格]单调增加（或单调减少）. 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 称为函数的单调区间.

单调增加（或减少）函数的图形将随 x 的增加而上升（或下降）（图 1－5（a）、（b））.

例如函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 单调增加，但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不是单调函数，因此函数的单调性与其定义域内的某些区间相关联.

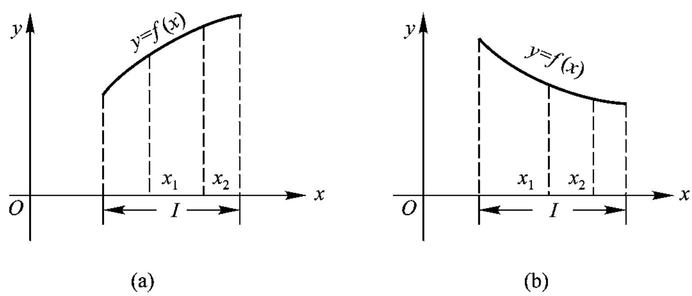


图 1－5

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称. 若对任一 $x\in D(f)$ $(-x\in D(f))$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若对任一 $x\in D(f)$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称. 例如，函数 $y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数；函数 $y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 都是奇函数；而函数 $y=x+1$ 既不是偶函数也不是奇函数.

例 7 讨论下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=2x^2+\cos x$；

（2）$f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$；

（3）$f(x)=\frac{1}{x}+1$.

解 (1) $f(x)=2x^2+\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，又因为 $f(-x)=2(-x)^2+\cos(-x)=2x^2+\cos x=f(x)$，所以 $2x^2+\cos x$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称，且 $f(-x)=\log\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\log\frac{1+x}{1-x}=-\log\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，所以函数 $\log\frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

(3) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 虽然关于原点对称，但 $f(-x)=\frac{1}{-x}+1=-\frac{1}{x}+1$ 既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以函数 $\frac{1}{x}+1$ 既非偶函数，也非奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，若存在非零常数 T，使对任一 $x\in D(f)$，有 $x+T\in D(f)$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

由周期函数及周期的定义可知，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $2T$，$3T$，…，nT，…都是 $f(x)$ 的周期. 例如 $y=\sin x$ 是一个周期函数，其周期为 2π（4π，6π，…都是它的周期），而 2π 是它的最小正周期，通常所说的周期函数的周期是指最小正周期(注意,并非每一个周期函数都有最小正周期).

周期函数的图形可以通过它在一个周期 T 内的图形向左或向右平移周期 T 的整数倍而得到.

例 8 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，求证函数 $g(x)=Af(ax+b)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数，其中 A，a，b 为常数，且 $A\neq 0$，$a\neq 0$.

证 因为对任意 x，$f(x+T)=f(x)$，$f(ax+b+T)=f(ax+b)$，

于是
$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=Af\left(a\cdot\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=Af(ax+b+T)$$
$$=Af(ax+b)=g(x),$$

所以 $g(x)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

由例 8 知，函数 $g(x)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$ $(\omega\neq 0)$.

1.3 初等函数

这一节将在中学数学的基础上进一步讨论函数的一些基本运算并介绍初等函数的概念.

1.3.1 反函数与复合函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，其值域为 $Z(f)$. 若对应规则 f 建立了定义域 $D(f)$ 与值域 $Z(f)$ 的一一对应，即对任意 $x_0\in D(f)$，存在惟一的 $y_0\in Z(f)$，反之对任一 $y_0\in Z(f)$，存在惟一 $x_0\in D(f)$，使得 $f(x_0)=y_0$，按照函数的定义，当我们把 y 看成自变量，x 看成因变量，便得到一个新的函数，则称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$，其定义域为

$D(\varphi)=Z(f)$，值域 $Z(\varphi)=D(f)$.

若 $y=f(x)$是[严格]单调函数，则必存在反函数 $x=\varphi(y)$并且具有相同的单调性.

习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以可以把 $y=f(x)$的反函数改写为 $y=\varphi(x)$，于是函数$y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$的图形在坐标系 Oxy 中关于直线$y=x$ 对称.

例如 $y=x^3$ 在 **R** 上是单调增函数，其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$也是 **R** 上的单调增函数；$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上是单调增函数，它的反函数 $y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$也是单调增函数，$y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上是单调减函数，它的反函数 $y=-\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$也是单调减函数. 而 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不存在反函数.

设 $y=f(u)$，$u\in D(f)$，$u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$，且 $\varphi(x)$的值域 $Z(\varphi)\subset D(f)$. 则 y 通过 u 与 x 联系起来，得到的函数称为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in D(f\varphi)=D(\varphi)$$

其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

例如，由 $y=u^3$，$u\in \mathbf{R}$，$u=\sin x$，$x\in \mathbf{R}$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin^3 x$，$x\in \mathbf{R}$. 一般说来，若函数 $u=\varphi(x)$的值域不完全包含于 $y=f(u)$的定义域中，且它们的交集 $D(f)\cap Z(\varphi)=U$ 非空，对应于 $\varphi(x)$的定义域中集合 $X\subset D(\varphi)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域$D(f\varphi)=X$. 例如，$y=\sqrt{2-u}$，$u\leqslant 2$，$u=x^3$，$x\in \mathbf{R}$，则复合函数 $y=\sqrt{2-x^3}$的定义域 $X=(-\infty,\sqrt[3]{2}]\subset \mathbf{R}$.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成，例如函数 $y=\sin^3 2x$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=2x$ 复合而成，其中 u，v 都是中间变量.

例 1 分别写出函数(1) $y=2^{\sin x^2}$；(2) $y=\ln\cos^2 x$ 是由哪些函数复合而成的.

解 (1) $y=2^{\sin x^2}$是由函数 $y=2^u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成的，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\ln\cos^2 x$ 是由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\cos x$ 复合而成的，其定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=0$，± 1，± 2，$\cdots$.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f[f[f(x)]]$.

解

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}\quad(x\neq 0,1)；$$

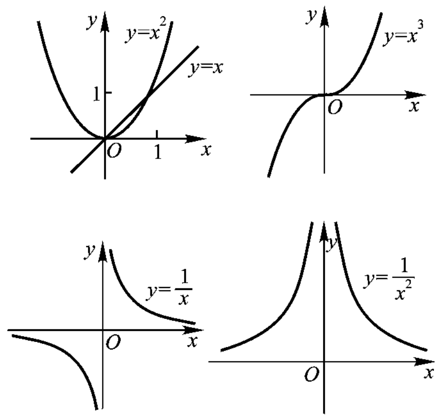
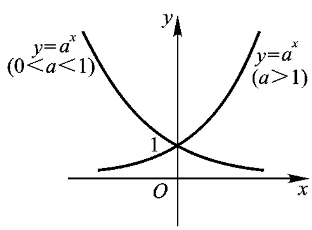
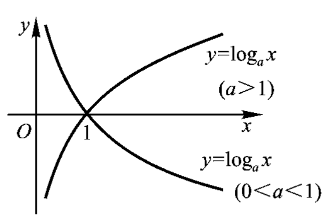
$$f[f[f(x)]]=1-\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1-x}}=x\quad(x\neq 0,1).$$

1.3.2 基本初等函数

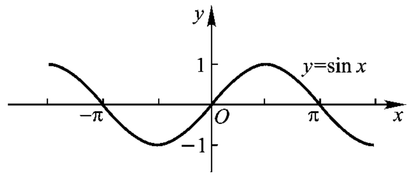
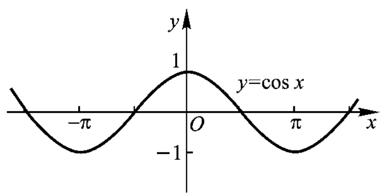
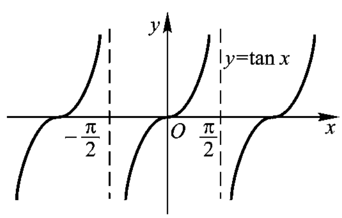
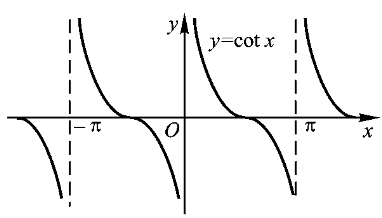
在中学数学课程中，我们已经学习过五类函数：幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实常数），指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$. 这些函数统称为基本初等函数.

现将这些基本初等函数及其特性列表如下：

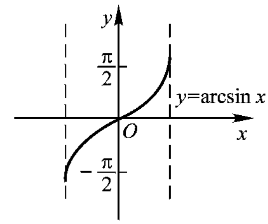
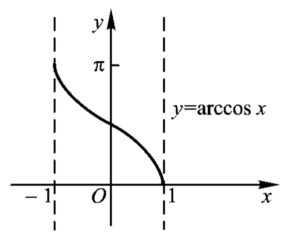
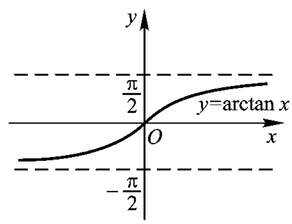
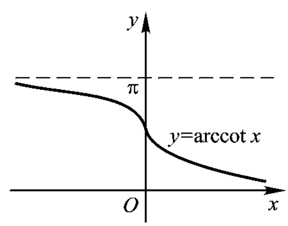
表 1－1

名称	表达式	定义域	图形	函数特性
幂函数	$y=x^{\mu}$ (μ 是实常数)	在$(0,+\infty)$内总有定义. 当 μ 为不同实数时，定义域可不同. 如 μ 为正整数时，定义域为$(-\infty,+\infty)$；$\mu=1/2$ 时，定义域为$[0,+\infty)$；$\mu=-1/2$ 时，定义域为$(0,+\infty)$		μ 为任何值时，都是无界函数；图形均经过点$(1,1)$；$\mid\mu\mid$为偶数时，函数为偶函数，图形关于 y 轴对称；$\mid\mu\mid$为奇数时，函数为奇函数，图形关于原点对称；μ 为负数时，图形在原点间断，$x=0$ 为垂直渐近线
指数函数	$y=a^{x}$ $a>0$ $a\neq1$	定义域为 $(-\infty,+\infty)$		图形均在 x 轴上方且经过点$(0,1)$；当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$ $a\neq1$	定义域为 $(0,+\infty)$		对数函数是指数函数的反函数；图形均在 y 轴右方且经过点$(1,0)$；当 $a>1$ 时，对数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数单调减少

续表

名称	表达式	定义域	图 形	函 数 特 性
三角函数	$y=\sin x$	定义域为 $(-\infty,+\infty)$		正弦函数是有界函数，图形介于 $y=\pm 1$ 两条平行线之间；正弦函数是以 2π 为周期的奇函数
	$y=\cos x$	定义域为 $(-\infty,+\infty)$		余弦函数是有界函数，图形介于 $y=\pm 1$ 两条平行线之间；余弦函数是以 2π 为周期的偶函数
	$y=\tan x$	定义域为 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$(k\in\mathbf{Z})$		正切函数是以 π 为周期的奇函数；其图形在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 处间断
	$y=\cot x$	定义域为 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$		余切函数是以 π 为周期的奇函数；其图形在 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 处间断

续表

名称	表达式	定义域	图 形	函数特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	定义域为 $[-1,1]$		反正弦函数是正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	$y=\arccos x$	定义域为 $[-1,1]$		反余弦函数是余弦函数在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，它是单调减少的有界函数，值域是 $[0,\pi]$
	$y=\arctan x$	定义域为 $(-\infty,+\infty)$		反正切函数是正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
	$y=\operatorname{arccot} x$	定义域为 $(-\infty,+\infty)$		反余切函数是余切函数在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数，它是单调减少的有界函数，值域是 $(0,\pi)$

1.3.3 初等函数

定义 1.2 **由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成，并可用一个解析式表示的函数，称为初等函数.**

例如，多项式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$**，分式函数** $y=\dfrac{3x+2}{4x-3}$**，** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$