

# 大学文科数学

汪国柄摇编著

清华大学出版社  
北摇京

## 内 容 简 介

本书是由编者对清华大学文科数学教学所写的试用讲义修改而成的,它凝聚了作者多年的教学经验。全书分为五部分:数学概观、一元微积分、多元微积分、线性代数初步和概率论初步。

每个部分的内容都经过精细筛选,重点突出,层次分明,叙述清楚,深入浅出,简明易懂。全书例题丰富,每节之后均配有适当数量的习题,每章之后附有复习题,书末附有习题答案与提示,便于教师教学,也便于学生自学。

本书适用于文学、历史学、哲学及其他文科类专业的本科生,也可作为一些工科类专业的教材和教学参考书。

版权所有 翻印必究 举报电话: (010) 62770175 转 602 或 (010) 62770176 转 602

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学 / 钱国柄编著. —北京: 清华大学出版社, 2005. 12

ISBN 7-302-12100-0

I ①大...摇 II ②钱 III ③高等数学—高等学校—原教学参考资料 IV ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 121000 号

出 版 者: 清华大学出版社 地址: 北京清华大学学研大厦

邮 政 编 码: 100084

邮 政 编 号: 010084

社 总 机: (010) 62770175

客 户 服 务: (010) 62770176

组稿编辑: 刘颖

文稿编辑: 佟丽霞

封面设计: 常雪影

印 刷 者:

装 订 者:

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 摇 本: 16 开 印 张: 8 印 字 数: 200 千 字

版 摇 次: 2005 年 1 月 第 1 版 2005 年 1 月 第 1 次 印 刷

书 摇 号: ISBN 7-302-12100-0/O1

印 摇 数: 1 万 册

定 摇 价: 15.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010) 62770175 或 (010) 62770176

# 前摇摇言

猿年,联合国教科文组织在里约热内卢宣言中指出:“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”,各个学科都需要这把钥匙,文科当然也不能例外援文科学生系统地学习一些基础数学理论十分必要援

文科学生学习数学理论不外有三个目的援其一是提高数学方面的素质修养援数学是人类文化的一个重要组成部分,作为一个受过高等教育的文化人,如果连什么是微积分,什么是矩阵都一无所知,无论如何也说不过去援古希腊大哲学家柏拉图(孕猿缘年公元前源年-前猿年)在他创办的学园大门口高挂着“不懂几何者不得入内”的牌子,表明了他对学生在数学方面的素质要求援在我国古代的科举考试中,似乎未见有数学的内容,但是在历代国子监里,数学都是必修课,教材是《算经十书》援在我国现在的高考中实行“猿圆曾的模式,对于文科学生,数学也是必考课程之一援订见,古今中外,对文科学生在数学方面的素质都有极高要求援其二是提高逻辑思维能力援文科主要使用形象思维,形象思维丰富多彩,数学使用逻辑思维,逻辑思维严谨援将两种思维方式结合起来,必然效果更佳援其三是要学会运用数学理论去解决文科领域中的一些实际问题援缘多年来,随着电子计算机的出现与迅猛发展,数学在文科领域中的应用性大大增加了,特别是对于那些从事文科课题研究的人,数学工具更是不可缺少援

编者针对文科特点编写的讲义,在清华大学人文学院、法学院和新闻与传播学院诸文科专业中试用过猿年,效果相当好援本教材就是在试用讲义的基础上,结合这几年的教学具体情况修改而成的援全书分为缘个部分:数学概观、一元微积分、多元微积分、线性代数初步和概率论初步,共计源章援

数学概观部分阐述了数学的本质和特性,数学与其他各个学科的关系,特别是数学与人文学科的关系,以期加深学生对数学的认识,激发学习积极性援在这一部分还介绍了中外数学发展简史:从西方的毕达哥拉斯学派与欧几里得的《几何原本》到东方的墨家学派与《墨经》、刘徽与《九章算术》;从古老的结绳记数、刻画记数到阿拉伯数字的出现与数系的形成;从神秘的《周易》与八卦到现代的吴文俊与机器证明、陈景润与哥德巴赫猜想;从《庄子》的极限思想到牛顿-莱布尼茨创建的《微积分》等数学史上的光辉成就援以期开阔学生的视野,拓宽知识面,提高数学素养援

本教材的主要内容是一元微积分与线性代数初步、微积分与线性代数不仅应用性强,而且也是学习其他数学分支理论的基础。特别是微积分,它是数学发展史上的一座伟大里程碑。相对于初等数学,有着崭新的思维方式,正如恩格斯所指出的那样:“只有微积分才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,而且也表明过程。”运动学好一元微积分,再学多元微积分就比较简单了。概率论不仅应用性强,更是数理统计的理论基础。对于文科学生来说,无论出于什么目的,微积分、线性代数和概率论都应当是必须具备的数学理论知识。但考虑到文科教学计划安排数学学时相对较少,只能将多元微积分和概率论放在次要位置。

本教材在写法上力求引导学生用辩证唯物主义的观点去分析问题和解决问题。在分析数学的本质时就已突出了这一点。数学中充满着辩证法,而且用自己的特殊的符号语言,简明的公式表达出各种辩证关系和转化。例如,极限概念能很好地体现出有限与无限,近似与精确的辩证关系;牛顿-莱布尼茨公式描述了微分和积分两种运算之间的联系及相互转化。由于极限概念贯穿整个微积分,所以在第 1 章中,通过求曲边三角形的面积的实例来探讨“极限法中的辩证思想”。

经过调研,文科新生多数未学过参数方程和极坐标,所以第 1 章补充了这部分内容。

教材内容学时安排大致为:“数学概观” 2 学时,“一元微积分” 12 学时,“线性代数初步” 8 学时,共 22 学时。这是必修课,按每周 2 学时算,可在一个学期内上完。多元微积分和“概率论初步”各 8 学时,按每周 2 学时,正好一个学期。这两部分内容既可以作为必修课,也可以作为选修课。

附录 1 给出了清华大学 1994 年入学的法律和新闻专业本科生的《文科数学》期终试题。一个班加上若干个重修学生,共 150 名学生参加了考试,结果有 120 人成绩在 70 分以上,只有 30 人不及格。成绩分布表明文科学生对于学习数学知识的积极性相当高,很多学生都想多学一些数学理论。

对于文科数学的教学试验以及本教材的出版,清华大学教务处、人文学院和数学系都给予了大力支持和鼓励;中文系孙殷望教授积极策划,费了不少心血。在此一并表示感谢!

本书的出版还得到了清华大学出版社刘颖先生热诚帮助,他提出了许多建设性的修改意见,并提供了不少参考资料,在此表示衷心的感谢!

本书定有许多不妥之处,敬请批评指正!

编摇者

1994 年 缘月于清华园

# 第 1 章 数学概观

本章首先从数学与文科的关系谈起,也谈到数学与其他各个学科领域的关系,讨论数学的特点和本质,介绍数学发展简史,涉及数字的起源和中、外数学发展对比,有助于读者对数学的全面了解,然后着重介绍微积分的创建过程,微积分的出现,是数学发展史上的重要里程碑,微积分是本书的主要内容,本章最后详细介绍数学命题的概念及常用的证明方法,有助于读者对数学严谨的逻辑推理过程有个认识,也为今后的学习打下基础。

## 1.1 文科与数学

数学是人类文化的一个重要组成部分,在人类社会文化活动中,起着越来越重要的作用。过去人们认为与数学没什么关系的文科,如文学、语言学、历史学、考古学、心理学等,如今数学也能在其中起到令人信服的作用。文科学生需要提高在数学方面的素质修养,需要增强逻辑思维的能力,尤其是在电子计算机高度发展的时代,数学在文科领域内的应用日益广泛,将高等数学列入文科教学计划,是一项十分必要的措施。本节谈谈文科和数学的关系。

### 1.1.1 文学中有数学

字典中的字词排列严谨有序就是一种很好的数学方法,在数学中称之为字典排列法,被用来排列有序数组的先后顺序。

在我国古典名著《水浒传》中描写一百单八将,在《红楼梦》中描述贾宝玉和金陵十二钗等诸多人物的音容笑貌,行为举止,个个栩栩如生,就好像我们真的亲眼目睹一般。这正是现代发展起来的模糊数学和模式识别的雏形。

大西南人爱吃辣椒是出了名的。在曾经流行一时的《辣妹子》中,四川人说“不怕辣”,云南人说“怕不辣”,贵州人说“辣不怕”。其实这就是数学上的排列与组合,这里只是“不”、“怕”、“辣”三个字的三种排列而已。常用汉字三千多个,一句完整的话就是一些单字的一种排列。英文字母 26 个,每个英文单词就是若干个字母的一种排列。

白居易诗曰:

琴诗酒友皆抛我 雪月花时最忆君

其句型的结构可以用数学公式

(粤月悦)酝越粤垣月垣悦垣

表示出来。在上句中,粤、月、悦分别表示“琴友”、“诗友”、“酒友”,酝表示“我”,乘积表示“抛弃”;在下句中,粤、月、悦分别表示“下雪时”、“月明时”、“花开时”,酝表示“君”,乘积表示“最想念”。等式左端是诗句的句型,等式的右端是诗句的分解意义。

在一些对联、诗词中巧用数字是常见的事,这样使得这些文学作品更加脍炙人口,令人印象更加深刻。且看几例。

例 1951年,新中国首次派科学家代表团出国访问,成员中有著名科学家钱三强、茅以升、华罗庚、赵九章等人。在飞机上闲着无事,华罗庚看看钱三强和赵九章,突发灵感,脱口说出了个上联:

三强韩赵魏

让大家对下联。虽然在座的都是学富五车的人物,也都想到下联中应该有李四光或赵九章的大名出现,可一时也难以完整地出下联来。华罗庚笑指赵九章,道出下联:

九章勾股弦

上联中的韩赵魏是战国时期(公元前 475年—公元前 221年)的三个强国。下联中的勾股弦表示直角三角形的三条边,这里是指勾股定理。勾股定理是我国古代数学名著《九章算术》的研究内容之一。上下联对仗工整,天衣无缝,堪称绝对。

这副对联只有一对数,有的对联可以有好几对数,甚至全由数对组成。

例 郑板桥是清代乾隆年间的文学家和书画家。他在山东潍坊任县令时,一年春节,他与朋友外出,在南门外见到这样一副春联:

二三四五

六七八九

横批是“南北”二字。他赶紧回衙取了一些粮食和衣物,给这户人家送去。朋友忙问:“你怎么知道他家就没有这些东西呢?”郑板桥回答:“对联上都写着啦。上联缺一(衣),下联少十(食)。横批只有南北,没有东西。当他们敲开这家门时,果然这一家大小都挤在一张破床上,衣单灶冷,全无一点过年的气氛。见此情景,朋友十分佩服郑板桥的洞察才能和体惜民情的作风。”

例 钱谦益幼时读过一首古诗:

一去二三里,

烟村四五家。

亭前六七树,

八九十枝花。

句句有数字,一环扣一环,朗朗上口,几十年过去了,仍记忆犹新。

例 据说在乾隆五十年(1795)召开的一次千叟宴上,赴宴的有三千九百多位老人,其中最年长者已一百四十一岁,仍然精神矍铄,这似乎是国泰民安的象征,乾隆心喜,即以这位老寿星的年龄为题出了一个上联:

花甲重开,又加三七岁月

100岁为一个花甲,这个上联用算式

$$100 = 6 \times 10 + 40$$

点出了老寿星的年龄为100岁,掇才子纪晓岚如法炮制,对出的下联为

古稀双庆,更多一度春秋

古稀就是70岁,下联以另一个算式

$$70 = 5 \times 10 + 20$$

点出了老寿星的年龄为100岁,掇君臣二人,巧妙地将数学上的四则运算应用在对联中,给千叟宴增添了不少欢乐的气氛

将人文融于数学,体现出数学的生命,将数学思维运用于人文问题,体现出人的聪明与才智

### 文学与数学相辅相成

文学和数学有许多共性,两者是相辅相成的。一个作家如果想写出好的作品,必须深入基层体验生活,文学源头在生活。数学的发展也取决于人类社会活动,数学的源头在实践。两者是相似的。数学主要运用形象思维,形象思维丰富多彩,文学描绘社会的方方面面。数学使用逻辑思维,逻辑思维严谨,数学研究现实世界的空间形式和数量关系。两者是互相补充的。数学家需要一些逻辑思维,有助于创作。数学家需要一些形象思维,有助于展开丰富的想像力,取得新的成果。

文学中使用的语言是生活习俗自然形成的语言,姑且称之为自然语言。自然语言的语义十分丰富,比如张三说“昨天我未看见一个人”这句话,可能有三种情况,或是他昨天任何人都未见到过,或是他昨天看见了两个以上的人,或是他昨天没有看见他想见的某个特定的人。自然语言便于情感交流,可以从说话的神态和语气上来判断其语义。对于书面文字,由于其多义性,则容易产生意义上的混乱。国际公约采用多国文字,就是为了避免产生误会。

数学符号是文字,数学概念要用文字和数学符号来描述,因此,数学也是语言。数学语言单义准确。对于从事文科事业的人,掌握一些数学语言的精神,定会受益匪浅。数学是科学的语言,没有数学语言,宇宙都似乎难以描述。大家知道,光速为 $3 \times 10^{10}$ 米/秒,天文学中用光在一年中所走过的路程来表示距离的单位,称之为光年。光年等于 $9.46 \times 10^{15}$ 米。在微观世界中,核子的直径约为 $10^{-14}$ 米。对于这样一类非常巨大或极其微小的数字进行运算,仅靠自然语言,实在难以表达清楚。很多自然规律必须用微分方程来描述;一些庞大系统则需要用矩阵去概括;自然语言就显得无能为力了。

## 数学在文科领域中的应用

数理语言学(或称数学语言学)是随着计算机的发展而兴起的数学和语言学之间的一门边缘学科,它以数理逻辑、集合论和统计数学为工具,以定量化和形式化的方法研究语言学中的语言结构、两种语言之间的对应规则等诸多问题,可为机器翻译和通讯技术设备提供有关语言结构的情况资料。数理语言学有三个主要分支:①统计语言学用统计方法处理语言资料,衡量各种语言的相关程度,比较作者的文体风格,确定不同时期的语言发展和特征等;②代数语言学借助数学与逻辑方法构造数学模型,并把语言改造为现代科学的演绎系统,以便适用于计算机处理;③算法语言利用图论研究语言的各种层次,挖掘语言的潜在本质,解决语言中的难题。

1984年,在美国威斯康星大学召开的首届国际《红楼梦》研讨会上,华裔学者陈炳藻宣读了《从词汇的统计论《红楼梦》的作者问题》,此后,他又发表过多篇用电脑研究文学的论文。

从1983年开始,东南大学和深圳大学相继开展了《红楼梦》作品研究的计算机数据库建立工作。1985年,复旦大学李贤平教授在美国威斯康星大学对《红楼梦》进行了统计分析和风格分析,提出了震惊红学界的《红楼梦》成书过程的新观点。

近年来,有两位日本著名作者多久正和安本美典,成功地将数学物理中的频谱分析方法应用于文学研究,取得了令人惊喜的成果。他们应用这种方法对文章的句型风格进行研究,从一小段文字中就可判断出作者是谁,就像法医根据指纹破案一样,准确无误。

将数学应用到考古学和历史学的研究中去,可以大大提高研究进程。我国的“夏商周断代工程研究”课题组,根据对甲骨文<sup>14</sup>C-<sup>13</sup>C含量的测定,解开了很多历史谜团,取得了突破性的进展。<sup>14</sup>C是一种衰变元素,含量与时间之间的函数关系,很容易通过微分方程求出来。

哲学与数学始终密不可分,唯物主义与唯心主义的斗争贯穿于整个数学发展史之中。自古以来,很多著名学者既是数学家,也是哲学家。例如古希腊大数学家毕达哥拉斯(约公元前570—前500)也是一位哲学家。毕达哥拉斯学派企图用数来解释一切,不仅认为万物都包含数,而且认为万物都是数。古希腊大哲学家柏拉图(约公元前427—前347)非常重视数学,他于公元前385年左右在雅典创办了一所学园,哲学和数学是学园的主要课程。在学园门口高挂“不懂几何者不得入内”的牌子。柏拉图对数学研究有过巨大的推动作用。英国的怀特黑德(1888—1963)和罗素(1872—1970)是上个世纪两位赫赫有名的大数学家、逻辑学家和哲学家,两人合著了《数学原理》一书。怀特黑德于1936年5月在美国哈佛大学作过一次重要的讲演,题目就是《数学与善》。善与恶的概念属于哲学范畴,他精辟地阐述了数学与善的概念、数学与理想之间的联系。罗素曾于1959年来中国讲过学,推动了我国数学界对哲学问题的关心。

1999年,联合国教科文组织在里约热内卢宣布“2000年是世界数学家年”,里约热内卢宣言指出:纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙,世界需要这把钥匙,文科也不可缺少这把钥匙。

## 习题 缘缘

缘缘文科为什么要学习数学?

缘缘试举出数学在文科领域内应用的实例。

缘缘谈谈你所学的专业与数学的关系。

缘缘以“择泽蹀躞”分别代表琴、诗、酒、友;以“曾赠澡泽”分别代表雪、月、花、时;试将白居易诗中的“琴诗酒友,雪月花时”用数学分解式表示出来。

缘缘自然语言与数学语言有何异同?

## 缘缘 数学的特性和本质

### 缘缘 数学的特性

缘缘我们在小学时代学过数字的四则运算,在中学时代学过代数、几何与三角学等数学课程,即使从这些初等数学里也不难觉察到数学有三大特性:抽象性、精确性和应用性。

抽象性在简单的数字运算中就已体现出来。比如两个抽象数字相乘,我们并不关心是孩子的数目乘以苹果的数目,还是苹果的数目乘以苹果的单价。几何中的直线只留下在一定方向的延伸的意义,而不是拉紧了绳索。

抽象性并不是数学独有的属性,其他任何学科,乃至人类思维都有抽象性。比如说“人”就是一个抽象的概念,我们只见过张三、李四等,何曾见过“人”?文学中经常涉及的“爱”也是一个非常抽象的概念。不过,数学的抽象性又不同于其他学科的抽象性。首先,数学的抽象性远远超过其他学科的抽象性,以至于抽象到几乎难以琢磨的程度。比如说,我们生活的这个现实世界是个三维空间,人们对于一维、二维及三维空间很熟悉;在这三种空间中任何两点间的距离可以度量出来,很直观。四维以上的空间,我们就看不见摸不着了,至于无限维空间是什么样就很难理解。其次,在数学的抽象中,仅保留量的关系和空间形式,舍弃掉其他一切。这里量是抽象的,空间也是抽象的。最后一点,也是最惹人注意的一点,那就是数学几乎完全在抽象概念间周旋。

总之,数字是抽象的,量是抽象的,空间是抽象的,一切数学概念是抽象的,数学的方法也是抽象的。

数学的精确性,确切地说是指逻辑的严格性和结论的确定性。数学推理和论断证明对

于每个了解它的人来说,都是确定无疑和无可争辩的。这一点对于其他学科影响很大,以致有些学科中的理论,如果不能上升到用数学模型表达就不能令人信服。不过,数学的精确性并不是绝对的,数学的原则也不是一成不变的。这一点后面还要提到。

数学的广泛应用性是任何其他学科所不能比拟的。几乎所有学科都或多或少地应用着数学。天气预报、地震预报离不开数学;电影电视中引人入胜的动画制作,离不开数学;经济学离不开数学;力学、物理学以及天文学上的定律就是用数学公式的形式来描述的。援过去化学和生物学与数学联系较少,现在也需要借助数学来发展自己。农业方面要想提高农产品的产量和质量,就需要应用试验设计和优选法;兴修水利,防止堤坝渗水则需用到更高深的数学知识。没有数学的发展,卫星就上不了天,没有数学的发展,人类就不可能遨游太空。我国著名数学家华罗庚曾经指出:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在。

数学应用的实例不胜枚举,这里仅介绍两个具有特殊意义的例子。

例 1 海王星的发现

海王星是太阳系最远的行星之一,是根据力学法则,通过数学计算,于 1846 年发现的。天文学家阿达姆斯和勒未累分析天王星运动的不规律性,应该是受到另外一颗行星的引力作用而产生的,他们计算出这个行星所处的位置。观察员果然从望远镜中发现了这颗新的行星,这颗新的行星就是海王星。

例 2 电磁波的发现

英国物理学家麦克斯韦(1831—1879)概括了由实验建立起来的电磁现象规律,以方程的形式表述出来,通过纯数学的方法,推导出电磁波的存在,且以光速传播着。这一学说奠定了全部无线电技术的基础。

对于海王星和电磁波的发现,数学所起的作用功不可没。

## 2 数学的本质

恩格斯在《自然辩证法》和《反杜林论》中反复强调指出:数学是反映现实世界的,产生于人类的实际需要。数学最初概念与原理的建立,是以经验为基础的长期历史发展的结果。这深刻地道出了数学的本质。

数学概念是从大量不同类型的实际问题中提炼概括出来的,它只保留了这些实际问题的共同的空间形式和量的关系,舍弃掉其他一切具体性质,是独立于这些实际问题的抽象概念。这些实际问题只是纯数学概念的特例而已。生产、科学、技术的进步促进了数学理论的发展,数学理论的发展又促进了生产、科学、技术的进步。

数学发展到一定阶段,可以有其相对的独立性,并不是数学的每一个概念都要由实践直接产生。例如虚数只是从方程  $x^2 + 1 = 0$  求根的过程中产生的;由于其现实意义长期不为人们所认识,因此才称之为虚数。直到 17 世纪初,虚数有了几何解释以后,才逐渐为人

们所理解的以虚数为基础的复变函数理论,正在科学技术中起着不可估量的作用。同样,非欧几何也不是直接从实践产生的,它已成为广义相对论的基础之一。这些数学理论虽不是直接产生于实践,但它们也同样经得起实践的检验,造福于人类。

数和物质的关系是一个很重要的哲学问题,人们必须作出回答。在我国最先回答这个问题的《老子》一书中有“道生一,一生二,二生三,三生万物”之说,这里将一种非物质的,且虚无缥缈的“道”看作是数的源泉,而万物却又是数的派生物。在古希腊,毕达哥拉斯学派也提倡“数为万物之源”说。这些完全是唯心主义的观点,颠倒了数和物质的关系。

《周易》即《易经》,是一本很古老的书籍,相传是伏羲、文王、孔丘所著,不尽可靠。在《周易·系辞上》中记载着“河出图,洛出书,圣人则(效法)之”,后人据此编造出种种离奇的神话故事,说是从河里跳出一匹龙马,驮着一幅图,这就是所谓“河出图”;从洛水中爬出一只神龟,背着一本书,这就是所谓“洛出书”。到了宋代,以唯心主义哲学家朱熹(1130—1200)为代表的一批人,不断宣扬数起源于“河图、洛书”的谬论。秦九韶(约1202—1261)则认为是“河图、洛书”揭开了数学的奥秘。明代程大位在他所著的《算法统宗》(1592年)卷首画了一幅“龙马负图”,并注明“数何肇?其肇自图书乎?伏羲得之以画卦,大禹得之以序畴,列圣得之以开物”。清代的《数理精蕴》(1703年)上编卷一有“粤稽上古,河出图,洛出书,八卦是生,九畴是序,数学亦于是乎肇焉”。直到乾隆元年(1736年),梅毂成在校勘《算法统宗》后,出版《增删算法统宗》时,才大胆地打破了过去的迷信,提出“毋庸效尤,故去之”,删除了河图、洛书之类的神话。这类神话流传很久,对我国数学发展起着消极的作用。本节我们将详细讨论数字的起源。

19世纪二三十年代,在数学基础研究中形成了三个唯心主义学派:直观主义、形式主义和逻辑主义。

直观主义认为数学的来源在于直觉,只有能直觉感受到的东西才有意义。因此,他们完全否定康托尔的无穷集合理论,甚至否认任何代数方程均存在实根的论断。在他们看来,在未找出求根的方法之前,谈论根的存在性毫无意义。直观主义完全否认数学的客观意义。

形式主义的思想实质,则是将数学理论完全归结为根据约定的规则,对数学符号作纯粹形式的运算。数学仅仅是符号与运算规则而已。

在三个唯心主义学派中,以罗素为代表人物的逻辑主义学派影响最大。这一派将数学看作是一种逻辑结构,片面夸大逻辑的作用,认为数学与客观世界无关。罗素认为:“纯粹数学完全包含这样的论断,如果某命题对于某些事物是真的,那么另外的某命题对于那些事物就是真的。”根本不讨论第一个命题是否确实是真的,也不管所假定的那些事物是否是真的……如果我们的假设是关于一般事物,而不是某些特殊事物的话,我们的推论就构成了数学。这样的数学可以定义为一种科目,我们决不知道其中说的是什么,也不知道所说的是真还是假。(见《月阿奈第...》)

这样的论点,真让人觉得数学似乎是一种莫名其妙的科目援

直觉主义、形式主义、逻辑主义以及其他形形色色的唯心主义学派的共同特点都是片面地、绝对化地夸大了数学的某一方面的特点,将数学同实际割裂开,忘却了数学的整体特性援

同唯心主义和形而上学的各种思潮相对立,辩证唯物主义将数学以及整个科学按其本来的面目,在其联系和发展的全部丰富性和复杂性中加以考察研究,引导自己同科学的客观内容、科学的新发展相适应辩证唯物主义是唯一真正科学的哲学,可使我们对科学,包括数学保持正确的认识,促进数学和其他科学进一步发展援

## 习 题 园

1. 数学有些什么特性?

2. 你是怎样理解抽象性的?

3. 数学的本质是什么?

4. 有些数学理论不是直接来源于实践,对此你是如何认识的?

5. 我国数学家华罗庚对于数学应用的广泛性是如何评价的?

6. 中国古代对于数字起源的认识有哪些唯心主义观点?

7. 国际上对于数学的认识有哪些唯心主义学派?

## 1.1 数的起源与数系

抽象数目概念的形成,是人类长期在对具体物件观察和总结的基础上,认识上所产生的一个飞跃援可以肯定地说,表示数目的数字的形成,远在一般文字出现之前援大约在五千年前,人类对数、量已有相当程度的认识援

### 1.1.1 两种原始记数法

结绳记数和刻画记数是两种最古老的记数方法援

在《周易·系辞传》中有“上古结绳而治,后世圣人易之以书契”之说援结绳记事大约盛行于我国的新石器时代援三国时吴人虞翻在其所著的《易九家义》中引用汉代郑玄的话说:“事大,大结其绳;事小,小结其绳;结之多少,随物众寡”援这里把结绳的用法解释得清清楚楚援结绳记事的方法不限于在中国,诸如日本、非洲、澳洲及南美洲等地区的古代人类都使用过这种方法援

甲骨文“𠄎”是“数”的原形,这是一个象形文字,左边是一根杆上打了许多结,上下是

散乱的绳头 右边后来变成篆文“点”，“又”是右手掣以整体字形刻画出用手结绳记数的形象援

刻画记数起源于原始社会援根据现有考古资料 在我国最早可以追溯到一万多年前的山顶洞人 遗址中出土的四根有磨刻符号的骨管 可能就是一种刻画记数的实物掣刻画记数方法沿用了较长时期 原始社会末期 奴隶社会 直至封建社会都可找到这方面的资料援

我国的少数民族 在没有文字之前 也都采用结绳和刻画记数的方法掣解放后 在云南等地收集到不少这方面的实物掣直到 20世纪 50年代 傣族还用板上刻画符号来记事或表意掣新疆巴尔坤草原的哈萨克族牧民至今仍在使用羊毛绳打结的方法来记羊的数目掣这些都是古代刻画记数和结绳记数的遗风援

### 圆数字的出现

在结绳和刻画记数的基础上 经过长期演变 进而形成数目字掣墟甲骨文卜辞中有很多记数的文字 大于 10的自然数无一例外地都用十进制 ；与现代一样 用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万 共十三个单字来记十万以内的任何自然数 只是有些记数文字的形体和现在的数目字有所不同掣甲骨文相应的十三个记数单字为

一、二、三、三、又、人(或八)、十、百、九、一、百、千、万、

可以看出 现在我们所用的这十三个记数单字是从甲骨文演变来的援

在山东城子崖出土的陶片 距今已有四千多年 其上刻有与甲骨文相近的记数符号 ；比甲骨文要早数百年到一千年掣说明早在四千多年前 我国已逐步形成了数目字援

现在国际通用的阿拉伯数字 圆员圆猿源缘远苑愿怨实际上起源于印度 由阿拉伯商人于 7世纪传入欧洲 欧洲人称其为阿拉伯数字掣原来的形体与现在的形体也不尽相同 ；经历好几个世纪 才演变成现在这样掣阿拉伯数字传入我国 最早也就是在 8到 9世纪之间 但却迟迟不被采用 直到 10世纪末 11世纪初才逐渐使用援

### 圆印度“圆”与中国“〇”

用阿拉伯数字表示多位数时 必须区分数字在多位数中的位值 ；如 26中的 2位值为二十 6位值为六掣数符“圆”在区分数字的位值时 起着关键作用掣数符“圆”是由印度人在公元 628年以后开始使用的援

用中文数字表示多位数 一般不会引起位值混淆 ；如“圆六”等价于“二十六” ；“圆六”等价于“二百零六”掣中文的“零”起到了数符“圆”的作用 ；因此 通常将“圆”称作“零号”掣不过 “圆”与“零”在意义上略有差异 ；“圆”表示空无所有 而“零”在《说文解字》上解释为“余雨也 从雨令声” 就是雨后的小水滴 后来引申作“零头”解掣如“二百零六”表示在二百之外 还有一个零头六援



对有理数作开方运算,其结果有可能不是有理数,例如 $\sqrt{2}$ 是一个无穷不循环小数,不是有理数.这种类型的数,称为无理数.常见的无理数还有圆周率 $\pi$ 及 $\sqrt{5}$ 等.

有理数集合与无理数集合一起构成实数集合.

在一条直线上取定一点,称为坐标原点,再规定其正方向,以箭头表示,并取定单位长度,如图 1.1 所示.这样的有向直线称为数轴.数轴上原点  $O$  对应数  $0$ ,则数轴上的点与全体实数一一对应.数轴上点所对应的实数,称为该点的坐标,如点  $A$  的坐标为  $2$ ,点  $B$  的坐标为  $-3$ .

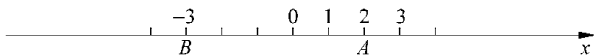


图 1.1

上节已经提到,人类对于虚数的认识较晚.记号  $i$  (称为虚数单位,  $i^2 = -1$ , 遭为实数)称为复数,其中  $a$  称为实部,  $bi$  称为虚部.当  $b=0$  时,即  $ai$  称为纯虚数;当  $a=0$  时,就是实数.可见复数是一种最为广义的数.

至此,我们已经讨论了各种类型的数,归纳为数系.数系的框图如下(图 1.2):



图 1.2

今后,我们只在实数范围内讨论问题.

## 习题 1.1

1. 抽象数字的概念是怎么形成的?

2. 人类最原始的记数方法有哪几种?

3. 阿拉伯数字最早是哪个国家创造的?何时传入我国?

4. 中国“〇”是怎么演变来的?与阿拉伯数符中的“0”有无区别?

5. 数系是如何形成的?

## 1.1 数学发展的几个阶段

数学的发展历史,大致分为三个时期:

### 1.1.1 数学萌芽时期(公元前 4 世纪以前)

公元前一千多年,人类历史从铜器时代过渡到铁器时代,生产力大大提高了。随着社会财富的增加,促进了商业贸易的发展。由于社会经济生活的需要,人们越来越多地要计算产品的数量和劳动时间的长短,测量建筑物的大小,丈量土地的面积等。人类在长期的生产实践中,逐渐形成了数的概念,产生了关于数的运算方法,几何学也有了初步发展。

在这个阶段,人类虽然积累了许多数学知识,但这些知识只是片断的、零碎的,还没有形成严整的体系,缺乏逻辑推理,尚不见有命题的证明。

### 1.1.2 初等数学时期(公元前 4 世纪至 17 世纪中叶)

公元前六七世纪,地中海一带成为文化昌盛地区。在生产、商业、航海以及社会政治生活发展的影响下,研究自然界的兴趣增加了,探索客观现实及其发展规律的愿望,逐渐代替了旧的宗教神话的世界观。这时在数学方面已积累了大量资料,有待进一步去整理和深刻化。一些希腊学者开始尝试对命题加以证明。所谓证明,就是借助一些真实性已经确定的命题去论证某一命题真实性的逻辑推理过程。

证明命题是希腊几何学的基本精神,是数学发展史上一件大事。从此,数学由具体的实验的阶段过渡到抽象的理论的阶段。数学经过这样根本性的变革,逐渐形成了一门独立的演绎的科学。这便是数学发展第二个阶段的开始。之后,初等几何、算术、初等代数和三角学逐渐形成为相互独立的科目。这些科目所研究的对象都是常量,称之为初等数学。

### 1.1.3 变量数学时期(17 世纪中叶至 19 世纪 40 年代)

17 至 17 世纪,欧洲封建社会开始解体,资本主义兴起,生产力大大解放。工场手工业蓬勃发展且向机器生产过渡,促使科学技术和数学急速地向前发展。例如在航海方面,为了确定船只的位置,要求更加精密的天文观测;在军事方面,弹道学成为研究的中心课题;准确的时计的制造,吸引着许多优秀的科学家;运河的开凿,堤坝的修筑,行星的椭圆轨道理论等,都需要很多复杂的计算。初等数学已经不能满足需要了,在数学研究中引入变量与函数的概念是很自然的发展趋势。

从此,数学进入了第三个发展阶段——变量数学时期。这一时期和上一个时期的区别在于:上一个时期用静止的孤立的方法研究客观世界,这一时期则用运动的和变化的观点去探索事物的内在联系、变化和发展。辩证法进入了数学。

变量数学时期,以笛卡儿(1596—1650)的解析几何学的建立为起点,接着牛顿(1643—1727)和莱布尼茨(1646—1716)创立了微积分学,亦称数学分析,微积分以汹涌澎湃之势向前发展,在17世纪达到辉煌,其内容之丰富,应用之广泛,盛况空前,微积分的发明在科学史上具有决定性的意义。

在这一时期还出现了概率论和射影几何等新的数学分支。

### 近代数学时期(17世纪40年代至二次大战)

从17世纪40年代开始,在数学界又一次掀起了革命的浪潮,发生了一连串本质的变化。首先是罗巴切夫斯基(1792—1856)创立了非欧几何,非欧几何是在否定欧几里得(约公元前300—前250)平行公理的基础上建立起来的一种新型几何学,其研究对象与使用范围迅速扩大。其次是阿贝耳(1780—1829)和伽罗瓦(1811—1832)开创了近世代数的研究,近世代数是相对于古典代数而言的,粗略地说,古典代数以讨论方程的解法为中心,近世代数是以一般代数方程的根式求解问题为基础,导致对于群的结构的研究。随后,多种代数系统——环、域、格、布尔代数、线性空间等被建立,代数学呈现出崭新的面貌。

在这个时期内,波尔察诺(1781—1842)和柯西(1791—1859)重新奠定了分析的严格的逻辑基础,拓扑学、复变函数论等崭新的数学分支相继涌现。

19世纪40年代以后,康托尔(1845—1918)的集合论开始发展,1890年,勒贝格(1875—1941)在点集测度理论的基础上给出了新的积分定义,奠定了实变函数论的基础。此外,微分方程、微分几何、数理逻辑、概率论以及19世纪初出现的泛函分析等,在这一时期内都取得了长足的发展。

### 现代数学时期(20世纪40年代以后)

20世纪中叶,世界科学史上,发生了几件惊天动地的大事:一是原子能的利用,以1945年8月6日,在美国新墨西哥州的洛斯阿尔莫沙沙漠中,第一颗原子弹爆炸为起点;二是电子计算机的出现,以1946年2月第一台电子计算机,即ENIAC(电子数字积分仪与计算器)的制造成功为起点;三是空间技术的兴起,以1957年10月,前苏联发射第一颗人造地球卫星为起点。

现代科学技术的研究对象,日益超出人类的感官范围,向高温、高压、高速、高强度、远距离和自动化方向发展,很多测量和研究都不能依赖于直接经验,必须以理论计算为指导。一些科学实验的规模空前巨大,要耗费大量的人力和物力,例如,一个跨音速风洞,其耗电量就相当于一个中等城市的用电;人造卫星的发射与核武器的研制耗费更大;人类要