普通高等学校“十一五”精品规划教材

大学文科数学

主　编　李成福
副主编　梁开福　骆先南
　　　　王晓萍　刘树人
主　审　周　勇

復旦大學出版社

内 容 简 介

这是专为经济管理、文史哲及外语等系科大学生编写的数学教材. 全书含微积分、线性代数、概率论与数理统计、数学规划 4 个部分. 微积分部分分别介绍了极限、函数的连续性与间断点、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数的基本知识;线性代数部分分别介绍了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容;概率论与数理统计部分分别介绍了随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理和数理统计的基本方法;数学规划部分分别介绍了运筹学的发展和运用、线性规划模型、运输问题、整数规划和指派问题. 各节后配有适量的习题,书末并有附录和习题参考答案.

本书内容丰富,条理清楚,重点突出,难点分散,注重数学思想的介绍,力求做到深入浅出. 可作为高等院校管理、文史哲、外语类本科生教材,也可作为实际工作者的自学参考书.

前　　言

随着科学技术的发展和社会的进步，数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学、社会科学和人文科学在内的各个领域渗透.数学不仅是一门科学，而且已经成为人们终生受益的文化力量.

本书贯彻“导引”的思想，为读者充当近现代数学知识的“导游”，力求让广大文科大学生接触到更为广泛、更具有实用价值的数学知识.考虑到文科大学生的特点，我们对每章都作了深入浅出的介绍，相信他们通过学习，对数学的本质也会有更深的理解.

本教材分微积分、线性代数、概率论与数理统计、数学规划，共4章.第一章为微积分，分别介绍了极限、函数的连续性与间断点、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数的基本知识；第二章为线性代数，分别介绍了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容；第三章为概率论与数理统计，分别介绍了随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理和数理统计的基本方法；最后一章为数学规划，分别介绍了运筹学的发展和运用、线性规划模型、运输问题、整数规划和指派问题.各节后配有适量的习题，书末有附录和习题参考答案.

本书适合高等学校管理、哲学、文史、外语类各专业学生和教师使用，也可供科技工作者参考.

本教材由李成福、梁开福、骆先南、王晓萍、刘树人编写，周维楚教授在本书的编写过程中提供了许多指导性的意见，周勇教授认真审阅了此书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.本教材在编写过程中得到了湘潭大学数学与计算科学学院的大力支持，在此一并表示衷心感谢.

虽然编写组的各位作者作了许多努力，但鉴于水平有限和成书时间仓促，书中定有许多不足之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2007年12月

目　　录

第一章　微　积　分

牛顿和莱布尼茨在 17 世纪后半叶建立了微积分. 微积分及其有关的后续内容,是数学最重要的组成部分,可以说微积分的创立是现代数学最重要的成就,从来没有一个数学分支有如此广泛有效的应用. 它已成为数学的种子,大多数现代数学理论由它生长繁育而来. 没有它,在它之后的大多数现代科学的进步就不可能实现. 由于微积分的基础性和重要性,我们把它作为本教材的第一章. 相信文科学生能从这一章的学习中,进一步感觉到数学的奇妙与价值.

本章简要介绍微积分的主体部分:微分和积分.

§1.1　极　　限

一、数列的极限

极限作为一种方法在我国古代就已经使用. 例如,我国古代数学家刘徽,利用"割圆术"来计算圆面积. 他首先作圆的内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;循此下去,每次边数加倍,一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n,其中 n 为正整数. 这样,我们就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们构成一数列. 当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取值如何大,只要 n 取定了,A_n 终究只是多边形的面积,仍然还不是圆面积. 因此,设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作"n 趋于无穷大"),即内接正多边形的边数无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,与此同时,A_n 也无限接近于一个确定的数值(这一数值在数学上称为数列:$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,当 $n\to\infty$ 时的极限),这个确定的数

值就理解为圆的面积. 正如刘徽所言"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣". 这里已经有极限的思想.

文科学生在中学已学过数列,下面是一些数列的例子:

(1) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$;

(2) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;

(3) $1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$;

(4) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$;

(5) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$;

(6) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

一般地,无穷多个按自然数顺序排列的数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列,记作$\{x_n\}$,其中每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称做数列的一般项或通项. 若数列$\{x_n\}$满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$,则称该数列为单调递增数列;反之,若有 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$,则称该数列为单调递减数列. 例如,数列$\{n\}$为单调递增数列,而数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$为单调递减数列.

人们关心当 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$变化的趋势. 今后用 $n\to\infty$表示"n 无限增大". 从上面给出的一些数列可以发现,当 $n\to\infty$时,它们的变化有不同的特点. 其中有些数列,如数列(1),(2),(3),(4),当 $n\to\infty$时,x_n 与某个常数 a 无限接近. 具体来说:

对于数列(1),当 $n\to\infty$时,$x_n=\frac{n+1}{n}$与常数 $a=1$ 无限接近;

对于数列(2),当 $n\to\infty$时,$x_n=\frac{1}{2^n}$与常数 $a=0$ 无限接近;

对于数列(3),当 $n\to\infty$时,$x_n=\frac{n-1}{n}$与常数 $a=1$ 无限接近;

对于数列(4),当 $n\to\infty$时,$x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$与常数 $a=0$ 无限接近.

而数列(5),(6)没有上述性质. 数列(5),当 $n\to\infty$时,x_n 无限增大;而数列(6),当 $n\to\infty$时,x_n 在 1 和-1 之间不停地"摆动".

若一个数列$\{x_n\}$,当 $n\to\infty$时,x_n 与某个常数 a 无限接近,则称这个数列

$\{x_n\}$以 a 为极限或称$\{x_n\}$收敛到 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a\ (n\to\infty).$$

因此，对数列(1)，(2)，(3)，(4)有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \quad \text{或} \quad \frac{n+1}{n}\to 1\ (n\to\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2^n}\to 0\ (n\to\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1 \quad \text{或} \quad \frac{n-1}{n}\to 1\ (n\to\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0 \quad \text{或} \quad (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty).$$

数列(5)，(6)不存在极限，称这样的数列$\{x_n\}$发散.

请注意以下情况：

数列$\{x_n\}$趋向于 a 的过程是多种多样的，它可以大于 a 而趋于 a，如数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$，当 n 无限增大时，x_n 大于 1 而趋于 1；可以是小于 a 而趋于 a，如数列 $x_n=1-\frac{1}{n}$，当 n 无限增大时，x_n 小于 1 而趋于 1；还可以有时大于 a，有时小于 a，如数列 $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$，当 n 无限增大时，x_n 有时大于 1，有时小于 1 而趋于 1.

二、函数的极限

类似于数列的极限，也可以考虑当自变量 x 的绝对值$|x|$无限增大时，函数 $y=f(x)$的极限问题.

例如，对于函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$，当$|x|$无限增大时，$f(x)=1-\frac{1}{x}$和常数 $a=1$无限接近. 我们称当 x 趋于无穷(记为 $x\to\infty$)时，$f(x)=1-\frac{1}{x}$以 1 为极限或 $f(x)=1-\frac{1}{x}$收敛到 1，记为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \quad \text{或} \quad 1-\frac{1}{x}\to 1\ (x\to\infty).$$

一般地，若$|x|$无限增大时，函数 $y=f(x)$与某个常数 a 无限接近，则称

当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 以 a 为极限或称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 收敛到 a，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a\ (x\to\infty).$$

类似地，如果当 x 取正值且无限增大（记作 $x\to+\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 a，则称当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 以 a 为极限或称当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 收敛到 a，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a\ (x\to+\infty).$$

如果当 x 取负值而 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 a，则称当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 以 a 为极限或称当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 收敛到 a，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a\ (x\to-\infty).$$

不难看出：当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{1+x^2}$ 的极限为 0；当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的极限为 0；当 $x\to-\infty$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的极限不存在. 对于函数 $y=\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，函数值在 -1 和 $+1$ 之间来回“摆动”，不存在极限，是发散的. 对于函数 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时，函数值无限增大，也不存在极限，即 $x\to\infty$ 时，$y=x^2$ 也是发散的.

对于函数 $y=f(x)$，不仅可以考虑 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的变化趋势，也可以考虑当自变量 x 无限接近某个常数 x_0 时，$f(x)$ 的变化趋势. 例如，当 x 无限接近 2 时，$f(x)=x^3$ 无限接近 8，这一结果记为

$$\lim_{x\to2}x^3=8 \quad 或 \quad x^3\to8\ (x\to2).$$

一般地，对给定的函数 $y=f(x)$，当自变量 x 无限接近某个常数 x_0 时，如果 $f(x)$ 无限接近一个确定的常数 a，那么称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 a 为极限或 $f(x)$ 收敛到 a，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a\ (x\to x_0).$$

若 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的极限不存在，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 是发散的. 例如，当 x 趋于 1 时，$\frac{1}{x-1}$ 的极限不存在，是发散的. 当 x 趋于 0 时，$\cos x$ 无限接近常数 1，所以 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ 或 $\cos x\to1\ (x\to0)$.

在上述函数极限的讨论中，x 是以任意方式趋近于 x_0，即 x 可以从 x_0 的左侧逐渐增大而趋近于 x_0（记为 $x\to x_0-0$），也可以从 x_0 的右侧逐渐减少趋近于 x_0（记为 $x\to x_0+0$），甚至按任意方式沿 x 轴趋近于 x_0. 但有时我们只能或只需考虑 x 从其一侧趋近于 x_0，如从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，相应函数值

的变化趋势. 例如,对于函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x<0, \end{cases}$$

当 x 从 0 的右侧趋近于 0 时,$f(x)$无限接近常数 1;当 x 从 0 的左侧趋近于 0 时,$f(x)$无限接近常数 -1.

不难看出,当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$极限存在的充要条件是当 $x\to x_0+0$ 和 $x\to x_0-0$ 时,$f(x)$的极限都存在,而且相等.

三、极限的性质

并不是所有的极限,都能从直观上很容易看出. 例如:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$;　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

我们的问题是:上面的极限存在吗?如果极限存在,它们等于多少?

人们常常以为,数学只是计算和逻辑推理,其实不然,对于"$x\to 0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}$趋近于什么?"这一类问题,不是靠逻辑推导出来的. 它依赖于人们的直觉、经验与猜想,依赖于数学实验,需要探索与发现. 利用数学软件,在计算机上很容易得到下表(见表 1.1).

表 1.1

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005
$\sin x$	0.841 5	0.479 4	0.099 8	0.049 979	0.009 999 8	0.004 999 9
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 5	0.958 9	0.998 3	0.999 583	0.999 983 3	0.999 995 8

由此看来,当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}$应趋近于常数 1. 类似地,对于问题$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$,我们通过计算,有如下结果:

$$\sqrt{2}\approx 1.414\,2,\qquad \sqrt[5]{5}\approx 1.379\,1,\qquad \sqrt[10]{10}\approx 1.258\,9,$$
$$\sqrt[100]{100}\approx 1.047\,1,\qquad \sqrt[1\,000]{1\,000}\approx 1.006\,9,\qquad \sqrt[10\,000]{10\,000}\approx 1.000\,9,$$

可以猜测应该有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

但是,数学不能仅仅靠猜测和直觉,还需要对这些猜测严格加以证明. 因

为，一方面，直觉与经验有时可能会是错误的；另一方面，直觉与经验有时很难说清楚问题. 接下来，我们利用人们的直观给出一些极限的性质，在此基础上，利用这些性质来分析和计算极限.

单调递增的数列不一定有极限. 例如，数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 是单调递增的，但当 $n\to\infty$ 时，$x_n=n$ 无限增大，所以 x_n 不可能无限接近某个常数，从而极限不存在. 类似地，我们很容易举例说明单调递减的数列也不一定有极限.

若单调递增数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限，此时，不难看出，对一切自然数 n，均有 $x_n\leqslant a$ 成立. 例如，数列 $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递增，其极限为 1，显然有 $1-\dfrac{1}{n}\leqslant 1$ 成立.

对于数列 $\{x_n\}$，若存在一个数 M，使得对一切自然数 n，均有 $x_n\leqslant M$ 成立，则称数 M 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界. 由于 $1-\dfrac{1}{n}\leqslant 2$，所以 2 是数列 $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ 的一个上界. 从上界的定义可以看出，若数列 $\{x_n\}$ 有上界，则其上界不止一个，事实上，它的上界有无穷多个.

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一族动点，它依次取数轴上的点 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$. 读者不难看出，一个单调递增的数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增加时，或者 x_n 无限增加，没有极限，此时 $\{x_n\}$ 没有上界；或者 x_n 尽管单调增加却有上界，此时点 x_n 会无限趋近于某一个定点，从而数列 $\{x_n\}$ 有极限.

因此，我们得到一个判别数列收敛的重要准则.

定理 1.1.1 单调递增且有上界的数列必有极限.

这里我们不给出这个准则的证明，而将精力集中于利用该准则来讨论一个重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，我们来证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增并且有上界. 利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(a_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,n),$$

得到

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leqslant\left[\frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1},$$

这表示 $\{x_n\}$ 单调递增.

以下证明数列$\{x_n\}$有上界. 由牛顿二项式公式,有

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+C_n^3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+C_n^n\cdot(\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<3.$$

利用单调递增并且有上界的数列必有极限这一准则,可知数列$\{x_n\}$的极限存在,通常用字母 e 来表示,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

这个数 e 是无理数,它的值是

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 04\cdots.$$

类似地,我们可以定义数列的下界. 可以证明:单调递减并且有下界的数列必有极限.

下面我们给出极限存在的夹逼性准则.

定理 1.1.2 若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在,并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明从略.

极限存在的夹逼性准则在直观上是显而易见的,它是说,一个数列$\{x_n\}$的项 x_n 夹在两个数列$\{y_n\}$及$\{z_n\}$的对应项 y_n 和 z_n 之间,当 n 无限增大时,y_n 和 z_n 无限接近于同一个常数 a,则由此可以断言,数列$\{x_n\}$的极限存在并且等于常数 a.

若把数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$换成 $f(x)$,$h(x)$,$g(x)$,把 $n\to\infty$ 换成 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$,类似的结论也成立. 于是,我们得到函数极限的夹逼性准则.

定理 1.1.2′ 如果对于充分趋近 x_0 的点 x,有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

并且
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=a,\ \lim_{x\to x_0}h(x)=a,$$

那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，并且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

现在，我们利用定理 1.1.2′来证明前面的猜测

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注：当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$的分子、分母都趋近于 0，这类问题称为$\dfrac{0}{0}$型的极限问题. 当问题是$\dfrac{0}{0}$型的极限问题时，极限不一定存在. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{x^2}$的极限问题是$\dfrac{0}{0}$型问题，它的极限不存在.

取一个半径为 1 的圆（见图 1.1），用 x 表示以弧度计的圆心角$\angle AOB$，设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. 因为

$$\triangle AOB\text{ 面积}<\text{扇形 }OAB\text{ 面积}<\triangle AOC\text{ 面积},$$

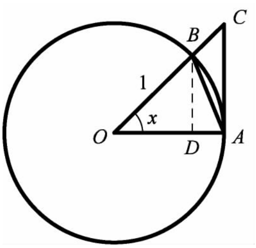

图 1.1

所以有
$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即
$$\sin x<x<\tan x.$$

不等式各边都除以 $\sin x$，有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

即
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

显然
$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim_{x\to 0}1=1.$$

由夹逼性准则，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 x 取负值时上式仍成立.

最后，我们介绍极限的四则运算法则，利用这些法则，可以求某些数列和函数的极限.

定理 1.1.3 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=a \cdot b, \lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 c 为常数；

（4）当 $y_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $b\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}.$$

证明从略.

和定理 1.1.2′一样，若把数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$分别换成函数 $f(x)$，$g(x)$，把 $n\to\infty$换成 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，上述结论仍成立. 极限的四则运算法则使得人们可以借助一些简单的极限来计算一些复杂的极限. 下面我们通过一些例子来加以说明.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4)=\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}4=1+4=5.$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-x+5)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(2x^3-x+5)&=\lim_{x\to 2}2x^3-\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5\\&=2\lim_{x\to 2}x^3-\lim_{x\to 2}x+5\\&=2\cdot(\lim_{x\to 2}x)^3-\lim_{x\to 2}x+5\\&=2\cdot 2^3-2+5=19.\end{aligned}$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$.

解　当 $x\to 2$ 时，分母的极限不为 0，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+4}{2+2}=2.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解　当 $x\to 1$ 时，分子、分母都趋于 0，这是$\dfrac{0}{0}$型的极限问题，不能直接利用定理 1.1.3. 我们先化简，得到

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1=2.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)\\&=\left(2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$=(2+0)\cdot(3-0)=6.$$

例 6 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,分子、分母的极限都为 0,这是$\dfrac{0}{0}$型的极限问题,不能直接利用定理 1.1.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{6x}{3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}.$$

令 $6x=t$,当 $x\to 0$ 时,有 $t\to 0$,于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=2.$$

习题 1.1

1. 观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势,指出哪些数列是收敛的,哪些数列是发散的;对收敛的数列,指出其极限.

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\cdots,\dfrac{1}{2n},\cdots$;

(2) $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$;

(3) $\dfrac{2}{3},\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\cdots,\left(\dfrac{2}{3}\right)^n,\cdots$;

(4) $-1,2,-3,\cdots,n\cdot(-1)^n,\cdots$;

(5) $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n+1}{n+2},\cdots$;