

内 容 简 介

数学实验课的宗旨是：在教师指导下以学生计算机上动手、动脑、动眼为主，通过用数学软件做实验，学习解决实际问题常用的数学方法，并在此基础上分析、解决经过简化的实际问题，提高学数学与用数学的兴趣、意识和能力。本书通过 15 个实验介绍数值计算、优化方法和数理统计的基本原理、有效算法及软件实现，并提供若干简化的实际问题，让读者利用学到的数学方法及适合的数学软件在计算机上完成数学建模的全过程。本书适用于学过微积分和线性代数的读者进一步提高利用数学工具和计算机技术分析、解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校理工、经管类专业数学实验、数学建模课程的教材或参考书，大学生数学建模竞赛的辅导教材，也可供专业人员学习参考。

版权所有，翻印必究。举报电话：(010) 62770175 邮购：(010) 62786544 邮发：(010) 62776969

图书在版编目(CIP)数据

大学数学实验 姜启源等编撰—北京：清华大学出版社，1999

ISBN 7-302-04111-1

I 大...摇 II 姜...摇 III 高等数学—原实验—原高等学校—原教材摇 IV 刘...摇

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11111 号

出版者：清华大学出版社 地址：北京清华大学学研大厦

邮 编：100084

社总机：(010) 62770175 客户服务：(010) 62786544

组稿编辑：刘摇颖

文稿编辑：王海燕

封面设计：

印刷者：

装订者：

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开 本：160mm×230mm 印张：15 字数：350千字

版 次：1999年 01月第 1 版 1999年 01月第 1 次印刷

书 号：ISBN 7-302-04111-1

印 数：1 000

定 价：15.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010) 62770175 或 (010) 62786544

摇摇电子计算机的出现和飞速发展是 20 世纪科学家和工程师对人类做出的最伟大的贡献之一。今天,不论你走进大型工厂的控制间、建筑公司的设计室,还是政府机关的办公楼、学校的多媒体教室,计算机都会立刻进入你的眼帘。刷卡购物、刷卡乘车、刷卡入住、刷卡注册……人们的日常生活越来越离不开计算机。今天我们难以想像在不久的将来计算机会给人类生活带来多么巨大的变化。

数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展过程中,一直是和人们的实际需要密切相关的,历史上许多科学技术的重大发明都离不开数学,电子计算机的出现也应归功于数学家的奠基性工作。反过来,科学技术和生产活动的进步,又促进了数学的发展。特别是电子计算机技术的飞速进步为古老的数学提供了威力巨大的工具,彻底改变了长期以来仅靠一张纸、一支笔做数学题的传统,使数学的应用在广度和深度上都达到了前所未有的程度,促成了从数学科学到数学技术的转化,并使数学技术成为当今高科技的一个重要组成部分和显著标志。同时也把数学从数学家的书斋里和课本中解放出来,成为各行各业认识自然、改造社会的有力武器。

教育必须跟踪、反映并预见社会发展的需要,大学的数学教育更应如此。我们看到,先是出现了一些计算机语言和编写程序的课程,让学生熟悉和学会使用计算机,继而引入各种形式的数学建模课程,架起数学知识和应用之间的桥梁,弥补了学生学完传统数学课程仍不会用的缺陷,对数学教学改革起了显著的促进作用。但是上面两类课程尚未很好地融合,计算机程序一类课程很少涉及数学的应用,数学建模课程又往往是纸上谈兵,学生少有机会自己动手,用计算机这个强有力的工具去分析、解决哪怕是简化的实际问题。目前正蓬勃开展的全国大学生数学建模竞赛,可以说是二者相结合的一个范例,而那毕竟只是少数学生参加的课外科技活动。

作为探索计算机技术和数学软件引入教学后数学教育改革的一项尝试,1995 年在教育部立项的面向 21 世纪非数学专业数学教学体系和内容改革的总体构想中,把“数学实验”列为数学基础课之一,清华大学数学系参加了这项教改的一个课题组,并于 1995 年进行了数学实验课的试点。在此基础上姜启源等编写了《数学实验》一书(萧树铁教授主编

的面向 21 世纪课程教材《大学数学》丛书中的一本,高等教育出版社 1999 年出版)。

近几年国内不少高等院校相继开设了数学实验课,也出版了好几本教材,从中可以看出,大家对于这门课程基本宗旨的认识大体上是一致的,即以学生在计算机上动手、动脑、动脑为主,在教师的指导下,通过用数学软件做实验,学习解决实际问题常用的数学方法,分析、解决经过简化的实际问题,提高数学、用数学的兴趣、意识和能力。当然,在课程的模式和实验的内容上,各校根据各自的具体情况有所不同,这是十分正常的现象,应当鼓励不同形式的课程模式、内容和方法的大胆探索。

在清华大学新制定的非数学类专业数学教学体系中,数学实验是 3 门主干课程的最后一门(前 3 门是微积分、代数与几何、随机数学方法),起着承上(上述 3 门数学课)、启下(后续课、研究生课程及数学的应用)的作用。我们将它设计为一门重组课程,集数值计算、优化方法、数理统计、数学建模以及数学软件于一体,以“了解数学基本原理、知道主要数值算法、会用数学软件实现、培养数学建模能力”为基本要求,使之既是上述 3 门数学课程的巩固和提高,又在基本数学知识和数学的应用之间架起一座桥梁。

目前不少院校正在开展“本硕贯通”的教育改革,本科阶段的数学实验课只介绍相关数学知识的基本原理、方法、软件实现及其应用,为研究生阶段要求掌握更深入的理论和方法的数学课程(如数值分析、数学规划、高等数理统计等)提供了许多实际背景,也留下了一些需要进一步解决的问题,从而刺激了学生再学习的愿望。

按照上述的基本思路,从 1996 年起清华大学在全校范围内大规模地开设数学实验课,每学期 3 个源个大班(每班约 30 人),得到同学们的肯定和好评,我们也在教学中不断明确和修正这门课程的指导思想和目的要求,逐步改进和完善课程的具体内容和教学方法,这本教材就是在 3 年来教学实践的基础上由主要授课教师集体编写的。

基于上面的认识与实践,这本教材的编写遵循了以下原则:

1. 在上述 3 门数学主干课程的基础上,介绍一些最常用的解决实际问题的数学方法,包括数值计算、优化方法和数理统计的基本原理及主要算法,一般不讲证明,基本上不做笔头练习。

2. 选择适合的数学软件平台(以 MATLAB 为主,辅之以 FORTRAN 和 C),能够方便地满足以上内容的软件实现。

3. 数学建模的思想和方法贯穿全书,从建模初步练习开始,以建模综合练习结束,每个实验尽量从实际问题的建模引入,并落实于模型的求解。

4. 精心安排学生的实验,学生自己动手在计算机上做练习的时间和条件必须保证,建议讲课与实验的学时比例至少为 1:1,并且对实验报告的内容和格式提出明确的要求。

按照这些原则本书共包含 3 个实验:数值计算 3 个实验、优化方法 3 个实验、数理统计 3 个实验、数学建模 3 个实验,另外还有神经网络 3 个实验。这些实验基本上相互

独立 教师可根据具体情况选用。一个实验的内容可在猿 源学时内讲完。每个实验都备有充分的、供学生动手做的练习 ,部分练习题附有提示或参考答案。配 考 建 习 的基本用法编入附录。

针对数学实验课需要知识面广、实例多、计算方法与软件实现相互交叉等特点 ,课堂讲授宜采用多媒体教学 ,可以做到实例生动、信息量大、便于接受。我们研制了与本书配套的多媒体课件 ,交由清华大学出版社出版。

本书实验 员 圆 猿 源 由姜启源编写 ,实验 猿 源 猿 猿 猿 由邢文训编写 ,实验 远 苑 愿 怨 及附录由谢金星编写 ,实验 源 缘 由杨顶辉编写 ,张立平统编了部分实验练习的参考答案 ,黄红选、张立平参加了审阅 ,全书由姜启源统稿。在清华大学讲授过数学实验课的还有李建国、李津等 ,他们都对这本教材的编写做出了贡献 ,在此表示衷心的感谢。

编者

圆 园 源 苑

目 录

大学数学实验

| | |
|------------------------------|---|
| 实验 1 数学建模初步 | 1 |
| 1.1 什么是数学建模 | 1 |
| 1.2 数学建模实例与数学实验方法 | 1 |
| 1.3 数学建模的基本方法和步骤以及重要意义 | 1 |
| 1.4 实验练习 | 1 |
| 实验 2 差分方程和数值微分 | 2 |
| 2.1 一阶线性常系数差分方程 | 2 |
| 2.2 高阶线性常系数差分方程 | 2 |
| 2.3 线性常系数差分方程组 | 2 |
| 2.4 非线性差分方程 | 2 |
| 2.5 数值微分 | 2 |
| 2.6 实验练习 | 2 |
| 实验 3 插值与数值积分 | 3 |
| 3.1 实例及其数学模型 | 3 |
| 3.2 多种插值方法 | 3 |
| 3.3 数值积分 | 3 |
| 3.4 实验练习 | 3 |
| 实验 4 常微分方程数值解 | 4 |
| 4.1 实例及其数学模型 | 4 |
| 4.2 欧拉方法和龙格-库塔方法 | 4 |
| 4.3 龙格-库塔方法的 MATLAB 实现 | 4 |
| 4.4 算法的收敛性、稳定性及刚性方程 | 4 |

| | |
|-------------------------------|----|
| 源缘实验练习 | 愿源 |
| 实验 缘缘线性代数方程组的数值解法 | 愿愿 |
| 缘缘实例及其数学模型 | 愿愿 |
| 缘缘求解线性代数方程组的直接法 | 愿愿 |
| 缘缘求解线性代数方程组的迭代法 | 愿愿 |
| 缘缘超定线性代数方程组的最小二乘解 | 愿愿 |
| 缘缘线性方程组数值解法的 配 考 建 身 实现 | 愿源 |
| 缘缘实验练习 | 愿愿 |
| 实验 远缘非线性方程求解 | 愿愿 |
| 远缘实例及其数学模型 | 愿源 |
| 远缘非线性方程和方程组的基本解法 | 愿远 |
| 远缘 配 考 建 身 解非线性方程和方程组 | 愿圆 |
| 远缘分岔与混沌现象 | 愿愿 |
| 远缘实验练习 | 愿源 |
| 实验 苑缘无约束优化 | 愿愿 |
| 苑缘实例及其数学模型 | 愿愿 |
| 苑缘无约束优化的基本方法 | 愿愿 |
| 苑缘 配 考 建 身 优化工具箱 | 愿缘 |
| 苑缘实验练习 | 愿圆 |
| 实验 愿缘约束优化 | 愿愿 |
| 愿缘实例及其数学模型 | 愿愿 |
| 愿缘线性规划的基本原理和解法 | 愿圆 |
| 愿缘带约束非线性规划的基本原理和解法 | 愿愿 |
| 愿缘实例的求解 | 愿远 |
| 愿缘实验练习 | 愿愿 |
| 实验 怨缘整数规划 | 愿圆 |
| 怨缘实例及其数学模型 | 愿圆 |
| 怨缘整数规划的基本原理和解法 | 愿缘 |
| 怨缘用 蕴 晕 韵 和 蕴 晕 韵 解整数规划 | 愿源 |

| | |
|----------------------|-----|
| 实例的求解 | 100 |
| 实验练习 | 100 |
| 实验 数据的统计与分析 | 100 |
| 实例及其分析 | 100 |
| 数据的整理和描述 | 100 |
| 随机变量的概率分布及数字特征 | 100 |
| 用随机模拟计算数值积分 | 100 |
| 实例的建模和求解 | 100 |
| 实验练习 | 100 |
| 实验 统计推断 | 100 |
| 实例及其分析 | 100 |
| 参数估计 | 100 |
| 假设检验 | 100 |
| 实例的求解 | 100 |
| 实验练习 | 100 |
| 实验 回归分析 | 100 |
| 实例及其数学模型 | 100 |
| 一元线性回归分析 | 100 |
| 多元线性回归分析 | 100 |
| 非线性回归分析 | 100 |
| 实验练习 | 100 |
| 实验 人工神经网络 | 100 |
| 谵妄的诊断 | 100 |
| 单层前向人工神经网络 | 100 |
| 多层前向神经网络 | 100 |
| 配套的图形交互界面 | 100 |
| 神经网络在谵妄诊断中的应用 | 100 |
| 实验练习 | 100 |

| | |
|----------------------|----|
| 实验 源数学建模与数学实验 | 猿怨 |
| 源投篮的出手速度和角度 | 猿怨 |
| 源降落伞的选择 | 猿远 |
| 源航空公司的预订票策略 | 猿员 |
| 源实验练习 | 猿缘 |
| 部分实验练习的参考答案 | 猿员 |
| 附录 源粤语言使用入门 | 猿园 |
| 源矩阵及其运算 | 猿猿 |
| 源语句和函数以及其他数据类型 | 猿忽 |
| 源命令和窗口环境 | 源愿 |
| 源图形功能 | 源圆 |
| 源程序设计 | 源怨 |
| 源符号工具箱使用简介 | 源员 |

摇摇数学建模指的是建立、求解、分析和验证一个实际问题的数学模型的全过程,这个实验在简要说明什么是数学模型之后,通过几个实例介绍建立数学模型的过程,以及数学实验方法在建模中的应用,然后归纳数学建模的基本方法和步骤,并简单阐述学习数学建模的重要意义。

摇摇什么是数学建模

人们在认识、研究现实世界里的某个客观对象时,常常不是直接面对那个对象的原型,而是设计、构造它的各式各样的模型:玩具、照片及展览厅里的三峡大坝模型、神舟飞船模型是直观且形象的实物模型,水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能,风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的动力学特性,它们是工程师们进行舰艇、飞机设计时用的物理模型;汽车司机对方向盘的操纵,钳工师傅对工件的手工操作,依赖于他们头脑中的思维模型;人们常用的地图,电工、电子设计中用的电路图,化学中的分子结构图,是经过某种抽象并按照一定形式组合起来的符号模型。这些模型都是人们为了一定目的,对客观事物的某一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物,它虽不是原型的复制品,却集中反映了原型中人们需要的那一部分特征,因而有利于人们对客观对象的认识。

数学模型(与数学模型密切相关)当然比上面这些模型更加抽象,它是当人们要认识客观对象在数量方面的特征、定量地分析对象的内在规律、用数学的语言和符号去近似地刻画要研究的那一部分现象时,所得到的一个数学表述。建立数学模型的过程简称为数学建模(与数学模型密切相关)。

数学建模似乎是个新名词,其实作为用数学方法解决实际问题的第一步,它与数学本身有着同样悠久的历史。两千多年前创立的欧几里得几何,17世纪发现的牛顿万有引力定律,都是科学发展史上数学建模的成功范例。在我们日常生活中数学建模的应用也不少,贷款买房时比较各种不同的还款方案,校园和居民小区里为限制车速而设计路障,为

肥胖者安排合理、有效的减肥方案,都可以建立简单的数学模型加以解决。

为了具体地说明数学建模过程中的要点,举一个中学课程中学过的“航行问题”:

甲乙两地相距 200 千米,船从甲地到乙地顺水航行需 2 小时,从乙地到甲地逆水航行需 4 小时,问船的速度是多少?

读者大概是这样做的:用 v 、 w 分别表示船速和水速,列出方程

$$\begin{cases} (v+w) \times 2 = 200, \\ (v-w) \times 4 = 200. \end{cases}$$

求解得到 $v=25$, $w=5$, 于是回答船速为 25 千米/小时。

这是一个代数应用题,稍微仔细分析一下解这道题的过程,里面已经包含了建立数学模型的基本内容,即

- 根据问题背景和建模目的做出必要的简化假设——航行中船速和水速均为常数;
- 用字母和符号表示有关的量—— v 、 w 分别表示船速和水速;
- 利用相应的物理(或其他)规律——匀速运动的距离等于速度乘以时间,列出数学式子——二元一次方程;
- 求解方程,得到数学上的解答—— $v=25$, $w=5$;
- 用这个结果回答原问题——船速为 25 千米/小时;
- 对于实际问题,以上结果必须用实际信息来检验。

一般地说,为了定量地解决一个实际问题,从中抽象、归结出来的数学表述就是数学模型。详细一点,数学模型可以描述为:对于现实世界的一个研究对象,为了一个特定目的,做出必要的简化假设,根据对象的内在规律,运用适当的数学工具,得到的一个数学表述。数学建模包括模型的建立、求解、分析和检验的全过程。从实际问题到数学模型,又从数学模型的求解结果回到现实对象,数学建模的全过程可以表示为图 1-1。

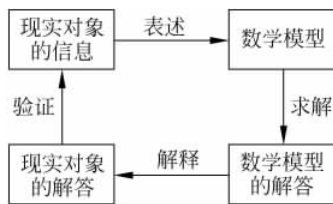


图 1-1 数学建模的全过程

图 1-1 揭示了现实对象和数学模型的关系。一方面,数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物,它源于现实,又高于现实。另一方面,只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时,才可以用来指导实际,完成实践——理论——实践这一循环。

数学建模实例与数学实验方法

本节介绍几个数学建模的实例,并说明数学实验方法在建模过程中的应用。

汽车刹车距离

汽车司机在行驶过程中发现前方出现突发事件,会紧急刹车,人们把从司机决定刹车到车完全停止这段时间内汽车行驶的距离,称为刹车距离。常识告诉我们,车速越快,刹车距离越长。那么,刹车距离与车速之间是线性关系,还是更复杂的关系?为了得到二者之间的数量规律,首先做了一组实验:用固定牌子的汽车,由同一司机驾驶,在不变的道路、气候等条件下,对不同的车速测量其刹车距离,得到的数据如表 1 所示。试从物理上的分析入手,参照这组数据,建立刹车距离与车速之间的数学模型。

表 1 车速和刹车距离的一组数据

| 车速 / km/h | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
|-----------|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 刹车距离 / m | 2 | 12 | 36 | 64 | 100 | 144 | 196 |

为了更直观起见,用图 1 对表 1 的数据作图(图 1),可以看到,刹车距离与车速之间并非线性关系,我们需要对刹车距离从机理上作较仔细的研究。

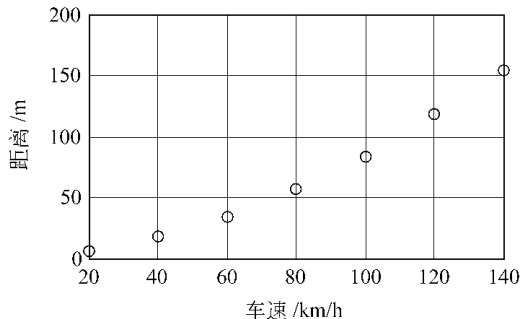


图 1 表 1 的数据(实际刹车距离)

刹车距离由反应距离和制动距离两部分组成,前者指从司机决定刹车到制动器开始起作用这段时间内汽车行驶的距离,后者指从制动器开始起作用到汽车完全停止所行驶的距离。

反应距离由反应时间和车速决定,反应时间取决于司机个人状况(灵巧、机警、视野等)和制动系统的灵敏性(从司机脚踏刹车板到制动器真正起作用的时间),对于固定牌子的汽车和同一类型的司机,反应时间可以视为常数,并且在这段时间内车速尚未改变。

制动距离与制动器作用力、车重、车速以及道路、气候等因素有关,制动器是一个能量耗散装置,制动力做的功被汽车动能的改变所抵消。设计制动器的一个合理原则是,最大制动力大体上与车的质量成正比,使汽车大致做匀减速运动,司机和乘客少受剧烈的冲击。而道路、气候等因素对一般规则来说只能看作是固定的。

员 瑶市场经济中的蛛网模型

问题瑶在自由贸易的集市上常会出现这样的现象：一个时期以来某种消费品(如鸡蛋)的上市量远大于需求,由于销售不畅致使价格下跌,生产者发现养鸡赔钱,于是转而经营其他农副业,过一段时间鸡蛋上市量就会大减,供不应求将导致价格上涨,生产者看到有利可图又重操旧业,这样下一个时期又会重现供过于求、价格下跌的局面援

商品数量和价格的这种振荡现象在自由竞争的市场经济中常常是不可避免的援进一步的观察可以发现,振荡有两种完全不同的形式,一种是振幅逐渐减小,市场经济趋向平稳,另一种是振幅越来越大,如果没有外界如政府的干预,将导致经济崩溃援建立一个简化的数学模型描述这种现象,研究经济趋向平稳的条件,并讨论当经济趋向不稳定时政府可能采取的干预方式援

蛛网模型瑶商品在市场上的数量和价格出现反复的振荡,是由消费者的需求关系和生产者的供应关系决定的援记商品第 n 时段的上市数量为 Q_n ,价格为 P_n 援这里我们把时间离散化为时段, n 个时段相当于 n 个生产周期,对于肉、禽等指牲畜饲养周期,蔬菜、水果等指种植周期援

按照经济规律,价格 P_n 依赖于数量 Q_n ,由消费者的需求关系决定,记作 $P_n = D(Q_n)$ 称需求函数援因为上市数量越多,价格越低,所以 D 是减函数援下一时段商品数量 Q_{n+1} 依赖于上一时段的价格 P_n ,由生产者的供应关系决定,记作 $Q_{n+1} = S(P_n)$ 称供应函数援因为价格越高,生产量(即下一时段上市量)越大,所以 S 是增函数援 D 的反函数为 $Q = D^{-1}(P)$,即 Q 越早 (Q 越早),早也是增函数援

在商品数量和价格变化不大的范围内,可以将 D 和 S 简化为线性函数,在图 员 瑶 葬和图 员 瑶 遭中用两条直线表示,它们相交于 $E(Q^*, P^*)$ 点援 E 点称为平衡点,意思是一旦某一时段 n 商品的上市量 Q_n 越 Q^* ,则由 $P_n = D(Q_n)$ 和 $Q_{n+1} = S(P_n)$ 可知, P_n 越 P^* , Q_{n+1} 越 Q^* , P_{n+1} 越 P^* , ... 即以后的上市量和价格将永远保持在 $E(Q^*, P^*)$ 点援但实际上由于种种干扰使得数量和价格不可能保持不变,不妨设 Q_n 偏离 Q^* ,如图 员 瑶 葬我们分析 Q_n , P_n 的变化援

商品数量 Q_n 给定后,价格 P_n 由直线 D 上的 E 点决定援数量 Q_{n+1} 又由 S 和直线 D 上的 E 点决定, P_{n+1} 由 S 和 D 上的 E 点决定,这样在图 员 瑶 葬上得到一系列的点 E_1, E_2, E_3, \dots 这些点按图上箭头方向趋向 E 点,称 E 为稳定平衡点,意味着商品的数量和价格的振荡将趋向稳定援

但是如果直线 D 和 S 由图 员 瑶 遭给出,类似的分析可以发现, E_1, E_2, E_3, \dots 沿着箭头的方向,将越来越远离 E 点,称 E 为不稳定平衡点,意味着商品的数量和价格将出现越来越大的振荡援图 员 瑶 葬和图 员 瑶 遭中的折线 $E_1 E_2 E_3 \dots$ 形似蛛网,在经济学中称为蛛网模型援

为什么会有这样截然相反的现象呢?分析一下图 员 和图 员 的不同之处就可发现,图 员 的 比 早平,而图 员 的 比 早陡.用 和 分别表示 和 的斜率(取绝对值),可以看出,当 约 时,孕 稳定;当 跃 时,孕 不稳定.

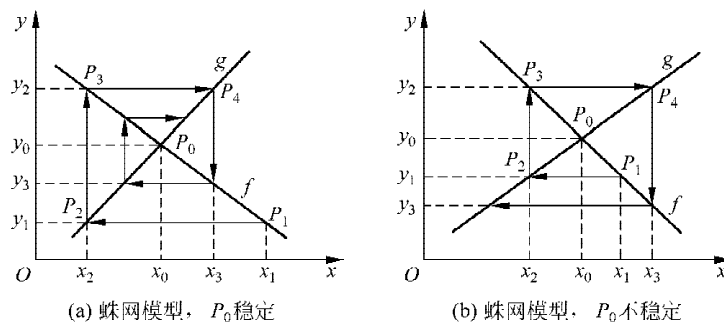


图 员 源

方程模型 为了定量地分析上述现象,将需求函数 表示为

$$\text{需求函数 } D = a - bQ \quad (1)$$

供应函数 表示为

$$\text{供应函数 } S = c + dQ \quad (2)$$

从(1)式、(2)式中消去 Q 可得

$$P = \frac{a - b(c + dQ)}{1 - d} \quad (3)$$

知道了 a, b, c, d , 可以用(1)式、(2)式或(3)式计算 Q, P .

为了讨论时间充分长以后(即 $n \rightarrow \infty$) Q 的变化趋势,由(3)式可递推地解出

$$Q_n = \frac{a - b(c + dQ_{n-1})}{1 - d} \quad (4)$$

显然,当方程的系数(取绝对值)小于 1,即

$$|1 - d| < 1 \quad \text{或} \quad |1 - d| < 1 \quad (5)$$

时 $Q_n \rightarrow Q^*$, 孕 点稳定.而当

$$|1 - d| > 1 \quad \text{或} \quad |1 - d| > 1 \quad (6)$$

时 $Q_n \rightarrow \infty$, 孕 点不稳定.

注意到(1)式、(2)式的系数 a, b 有 $a > 0, b > 0$ (因为 $b > 0$), 所以条件(5)、(6)与蛛网模型中的分析是完全一致的.

看一个例子.设某种商品在市场上处于平衡状态时的数量为 Q^* (元), P^* (元).开始时段商品数量为 Q_0 .若上市量减少 ΔQ 个单位,价格上涨 ΔP 元,而价格上涨 ΔP 元下一时段供应量增加 ΔQ 个单位,即 $\alpha > 0, \beta > 0$.则按照方程(1)及方程(2)计算得到的 Q_n, P_n (元)如图 员 所示,可以看出 Q_n, P_n 分别趋向 Q^*, P^* .当 α 升高至 α^* 时(β 不变)得到的结果如图 员 所示, Q_n, P_n 越来越大.

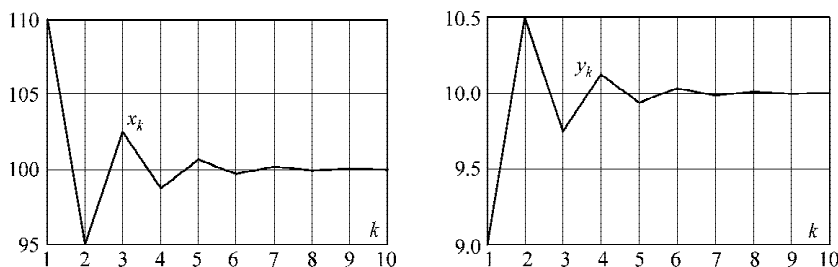


图 1 参数 α 越圆参数 β 越圆时蛛网模型 x_k, y_k 的变化

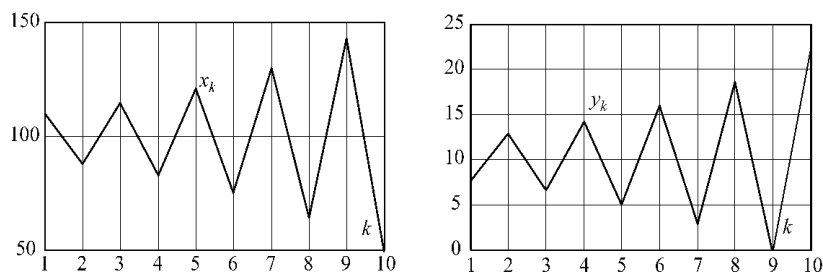


图 2 参数 α 越圆参数 β 越圆时蛛网模型 x_k, y_k 的变化

(源式、(缘式或(远式表示了 x_k 和 y_k 之间的关系,称为差分方程,实验员将专门讨论用差分方程描述的离散动态过程援

结果解释援考察 α, β 的含义,可以对市场经济是否会趋于平稳做出合理的解释援由(源式可知, α 表示商品上市量减少 1 个单位时价格的上涨幅度;由(缘式可知, β 表示价格上涨 1 个单位时(下一时段)供应量的增加援所以 α 反映消费者需求的敏感程度,如果是生活必需品,消费者处于持币待购状态,商品数量稍缺,人们立即蜂拥抢购, α 就会较大;反之,若消费者购物心理稳定,则 α 较小援 β 的数值反映生产经营者对价格的敏感程度,如果他们目光短浅,热衷于追逐一时的高利润,价格稍有上涨就大量增加生产, β 就会较大;反之,若他们素质较高,有长远的计划,则 β 较小援定量分析的结果(愿式表明,当 α, β 的乘积小于 1 时, (x_k, y_k) 是稳定平衡点,商品数量和价格的振荡会趋向平稳援

政府的干预援基于上述分析可以看出,当经济趋向不稳定时政府有两种干预办法援

一种办法是使 α 尽量小,不妨考察其极端情况 α 越圆,即需求直线 变 为 水平,这时不管供应函数如何,即不管 β 多大,(愿式恒成立,经济总是稳定的援实际上这种办法相当于政府控制价格,无论商品上市量有多少,命令价格 不得改变(图 员 苑 苑)援

另一种办法是使 β 尽量小,极端情况是 β 越圆,即供应直线 早 变为 竖直,于是不管需求函数如何,即不管 α 多大,(愿式恒成立,经济稳定援实际上这相当于政府控制商品的上市数量,当供应量少于需求时,从外地收购,投入市场,而当供过于求时,收购过剩部分,维持

上市量 曾不变(图 员 苑 遭)援当然这种办法需要政府具有相当的经济实力援

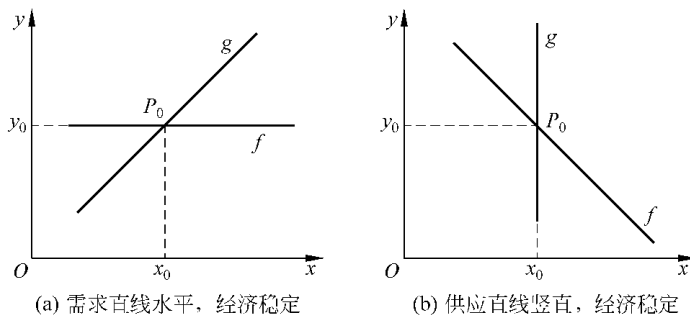


图 员 苑 苑

员 员 瑶汽车厂生产计划

问题 瑶某汽车厂生产小、中、大 猿种类型的汽车,已知生产各种类型每辆汽车需要的钢材、劳动时间以及获得的利润如表 员 苑 苑,目前汽车厂每月钢材的供应量为 远园吨,每月总的劳动时间为 远园园小时,试为该厂制订月生产计划,使得利润最大援进一步研究以下问题:由于各种条件限制,如果生产某一类型汽车,则至少要生产 缘辆,那么最优的生产计划应作何改变?

表 员 苑 瑶各种类型每辆汽车需要的钢材、劳动时间及获得的利润

| | 小型 | 中型 | 大型 |
|---------|----|----|----|
| 钢材 吨 | 员 | 猿 | 缘 |
| 劳动时间 小时 | 圆 | 猿 | 源 |
| 利润 万元 | 圆 | 猿 | 源 |

瑶瑶基本模型 瑶所谓月生产计划指的是 猿种类型的汽车每月各生产多少辆,使利润最大援记每月生产小、中、大型汽车的数量分别为 曾, 曾, 曾(非负整数),汽车厂的月利润为 援合理地假设“每辆汽车获得的利润及对钢材、劳动时间的需求量均不随生产数量变化”,则在钢材供应量和总劳动时间的约束下,以利润最大为目标的数学模型如下

$$\text{目标函数: } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad (1)$$

$$\text{约束条件: } x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 60 \quad (2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 600 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 为非负整数} \quad (4)$$

其中 曾, 曾, 曾为决策变量,式(1)为目标函数,(2)!(3)!(4)式为约束条件,它们是这个

优化模型的三要素

因为在目标函数(1)和约束条件(2)、(3)中对于决策变量都是线性的,约束条件(4)要求决策变量为整数,所以这个模型称为整数线性规划

模型求解虽然整数线性规划有多种解法,但是当决策变量和约束条件比较多时,手工计算是很困难的,可以利用现成的数学软件求解.这个具体问题的解决办法大体上有以下两种:

第一种办法是将约束条件(4)放松为“非负实数”,模型化为简单的线性规划.很多软件如 Excel 等,都可以方便地求解线性规划.其解法及软件实现将在实验 1 中介绍.这里只给出结果为 $x_1=1, x_2=1, x_3=1$.

为了得到 x_1, x_2, x_3 的整数解,可以在上面这个实数解的附近试探:如取 $x_1=2, x_2=1, x_3=1$; $x_1=1, x_2=2, x_3=1$; $x_1=1, x_2=1, x_3=2$, 等.注意:必须在满足约束条件(2)、(3)的前提下,对各种试探通过计算并比较目标函数值 Z 的大小,得到模型(1)!(4)的解.这个问题的结果是 $x_1=1, x_2=1, x_3=1$.

第二种办法是用可以直接求解整数线性规划的软件,如 LINDO 等,其解法及软件实现将在实验 2 中介绍,会得到与上面相同的结果.

虽然看起来第二种办法更方便,但是由于求解整数线性规划的复杂程度比线性规划大得多,因而用普通软件能求解的整数线性规划的规模常常受到限制.

进一步研究的问题对于提出的“如果生产某一类型汽车,则至少要生产 100 辆”的限制,上面得到的最优解显然不满足这个条件.这种类型的要求是实际生产中经常提出的.这个问题的模型应将上面的(4)式改为

$$x_1, x_2, x_3 \geq 100 \quad (1')$$

一般的解法不能直接考虑这样的约束,(1')式也无法输入数学软件.

解决这类问题的办法大体上有以下三种:

第一种办法分解为多个线性规划子模型. (1')式可分解为 3 种情况:

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 100, x_3 \geq 100; \quad (1'_{11})$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 100, x_3 \geq 0; \quad (1'_{12})$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 0, x_3 \geq 100; \quad (1'_{13})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 100, x_3 \geq 0; \quad (1'_{21})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 100; \quad (1'_{22})$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \quad (1'_{31})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 100, x_3 \geq 0; \quad (1'_{32})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 100; \quad (1'_{33})$$

(1'_{11})式显然不可能是问题的解.可以检查,(1'_{12})式和(1'_{13})式不满足约束条件