上海徐汇教育丛书

# 聪明的钥匙

## ——初中数学方法23讲

编者　沈为民　童立贤　童灵窕
　　　管　理　朱月娥　陈永明

上 海 交 通 大 学 出 版 社

## 内 容 提 要

本书讲述由初中数学教学中归纳出来的23种数学方法，如化归、换元、方程思想、参数、割补法等。每种方法为一讲，每讲从例子开始，归纳出这种方法的基本思想和基本方法，然后用例子来说明这种方法的应用并有练习，帮助巩固所讲知识。这些数学方法的掌握有助于初中学生数学解题能力的提高和数学素质的升华。书后附有解答。

本书可供广大初中学生阅读，也是初中教师理想的教学参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

聪明的钥匙——初中数学方法23讲/沈为明等编著. —上海：上海交通大学出版社，2005

（上海徐汇教育丛书）

ISBN7—313—04103—9

Ⅰ. 聪... Ⅱ. ①沈... Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第085132号

聪明的钥匙——初中数学方法23讲

沈为民等 编著

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路877号 邮政编码200030）

电话：64071208 出版人：张天蔚

昆山市亭林印刷有限责任公司 印刷 全国新华书店经销

开本：880mm×1230mm 1/32 印张：8.625 字数：243千字

2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷

印数：1—5 050

ISBN7—313—04103—9/G·743 定价：14.00元

版权所有 侵权必究

# 写在前面

学数学难不难？我说也难，也不难。

说难，是因为我们有相当多的同学靠操练，靠题海战术的方法在学数学，在这些同学的脑子里，数学是一盘散砂，最多是几种类型。这样学习当然是花时间多，效益低了。

说不难，是因为任何学科都有自己独特的知识结构和思维方式，如果你掌握了这种思维方式，学习起来就多快好省了。对数学来说，就有一整套的数学思想和方法，它并没有写在数学教科书的第几章第几节，但是它是贯穿在整个数学教材里，贯穿在整个数学课里，贯穿在解数学习题的过程里。教育家把方程，相似三角形……叫做“显性知识”，因为它是看得见，摸得着的，是直接写在教科书上的。而把数学思想方法这种东西叫做“隐性知识”，因为它不是一下子可以看见的，好像披了一层薄薄的轻纱，模模糊糊，要我们去琢磨，去体会，去“悟”的。掌握了数学思想方法，学数学就不难了。

本书的目的就是想掀开这层轻纱，“掀开它的盖头”，让大家把原本比较隐蔽的数学思想方法看得比较清楚些。本书将针对初中学生，大致介绍了解数学题中常用的思想方法，数学中的逻辑方法以及探索方法三个部分，但是数学思想方法很难绝对分得“井水不犯河水”，因此交叉是难免的；同时又是对初中同学讲这个课题，遗漏也是必然的了。但是数学方法，讲和不讲不一样，因此我们主张老师在讲定理，解例题之后要点一下——这里面有某种思想方法(仅仅点一下，不必大动干戈)；数学方法，学和不学不一样，你知道了数学思想方法之后，将有助于你学习定理，解数学题，因为你会有意无意地把知识和思想方法联系在一起；数学方法，主动用和不主动用不一样，主动用了，你的思维会上升到一个新高度，会变得更理性，会有质的飞跃。

2004 年上海高考有一个信息，值得大家注意。数学考试，一向是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

硬碰硬的解数学题，但是这次高考出现了“解析几何的本质是什么？”这样的“文科味”很重的题目，而且还在一道题里面出现了数学方法中的术语：基本量——本书也将谈到它，看来，数学思想方法这样的“隐性知识”在“显性化”了；数学思想方法从“后台”走向“前台”了。

同学们，你从这个信息里得到什么？

编　者

2005 年 6 月

# 目　　录

# 1. 化归

给你一把水壶、一盒火柴，请你利用自来水笼头及煤气灶烧一壶开水，你该怎么做？

你一定会说，这最简单不过了，只要：

1. 打开自来水笼头，把水壶注满水；

2. 用火柴点燃煤气；

3. 把水壶放在煤气灶上，把水烧开。

将问题改一下，其余条件都不变，只是水壶里已经注满了水，要你烧一壶开水，你又该怎么做？

你大概会说，这更简单了，只要：

1. 用火柴点燃煤气；

2. 把水壶放在煤气灶上，把水烧开。

这个回答完全正确。但是，如果你是数学家，你或许不是这样解答的。数学家会说：把水壶里的水倒掉，问题2就化归为问题1。而问题1已经解决，所以，问题2也解决了。

上面这段称不上故事，也称不上笑话的文字，出自数学哲学家、数学方法论专家郑毓信教授的著作。据郑教授说，它在国外流传甚广。

你看了这段文字或许会发笑，把已经满了的水壶倒空，说是化归为问题1了，而解决问题1时，第一步还得把水壶注满，不就更麻烦了吗？不错，要讲究经济、实用，这是工程师思考问题的特征。数学家，特别是纯粹数学家颇有“大将风度”，首先着眼于理论上的解决，技术上

的改进只在其次，把问题 2(未知的)“化归”为问题 1(已知的)，从理论上说，问题已经解决。这里，并没有轻视工程师的意思，也没有全盘肯定数学家的意思，只是想说，化归实实在在是数学家解决问题的重要方法之一。

使用化归法时，常是把一个未知的或者较难的问题，通过某种手段转化为另一个已知的或者容易的问题，这分别叫作化归的熟化原则和简化原则。但对一个具体的问题来说，可能熟化原则和简化原则同时具备，很难区分。下面的讨论仅仅是一个大致上的划分。

可以说，数学中处处有化归。

## 1.1　把复杂的问题化为简单的形式

**例 1**　美国《数学月刊》上有这样一道题目：有人在如图 1-1 所示的小路上行走，当他从 $A$ 处走到 $B$ 处时，共走了几米？假设小路宽度都是 1 米。

南京师大附中的老校长、数学特级教师马明看到这道题时，室内电视机里正在转播排球比赛。运动员挥汗如雨，休息时，服务员用阔阔的扁平拖把在地板上擦汗迹。马明老师灵机一动，他想，如果这个扁平的拖把的宽度为 1 米，如果那行人就是服务员，并带着扁平拖把沿着小路向前进，那么，行人走遍小路，相当于拖把拖遍整个场地。而拖 1 平方米面积的场地，相当于行人前进了 1 米。整个场地面积为 $8\times16$，即 128

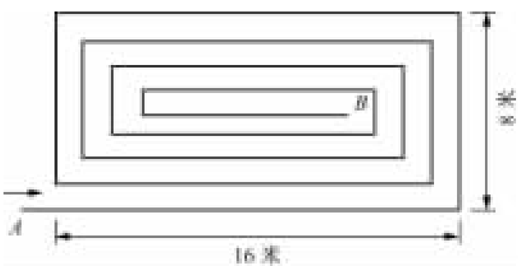


图 1-1

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

平方米，所以，行人在小路上从 $A$ 走到 $B$，共行进了 128 米（见图 1-1）。

你看，把长度问题巧妙地化归为面积问题，从而免去了烦琐的计算。

**例 2** 已知 $x^2+4y^2+8x-12y+25=0$，求代数式 $x+2y$ 的值。

**解** 因为

$$x^2+4y^2+8x-12y+25=0,$$

所以

$$(x+4)^2+(2y-3)^2=0。$$

由“若两个非负数的和等于零，则这两个非负数同时为零”，知

$$\begin{cases} x+4=0, \\ 2y-3=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=1.5, \end{cases}$$

所以

$$x+2y=-4+2\times1.5=-1。$$

把一个求二元不定方程的解转化成非负数的问题，计算会变得如此简单。

**例 3** 如图 1-2，以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 $AC$、$BC$ 为边在三角形外作正方形 $ACDE$、$BCFG$，$AG$、$BE$ 分别与 $BC$、$AC$ 交于点 $N$、$M$。

求证：$CM=CN$。

**证明** 设正方形 $ACDE$、$BCFG$ 的边长分别为 $a$、$b$，

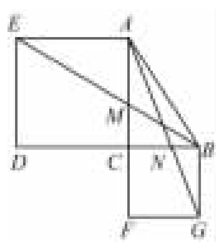


图 1-2

$$\because AC /\!/ ED, \quad \therefore \frac{MC}{ED}=\frac{BC}{BD},$$

即

$$MC=\frac{ED\cdot BC}{BD}=\frac{ab}{a+b}。$$

同理可得

$$CN=\frac{FG\cdot AC}{AF}=\frac{ab}{a+b}。$$

$$\therefore\ CM=CN。$$

这样，把几何证明题转化成简洁的代数计算题。

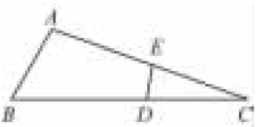


图1-3

**例4** 如图1-3，在$\triangle ABC$中，$E$是$AC$的中点，$D$是$BC$边上一点，若$BC=1$，$\angle ABC=60°$，$\angle BAC=100°$，$\angle CED=80°$。

试求$\triangle ABC$的面积与2倍的$\triangle CDE$面积之和。

**分析** 设$S=S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}$，

由于

$$\angle CED=80°,\angle BCA=20°,$$

所以

$$\angle EDC=80°,CE=CD。$$

注意到$\angle ABC=60°$这个条件所提供的信息，想到构造一个等边三角形。

为此，延长$BA$到$G$，使$BG=BC=1$，连接$CG$。

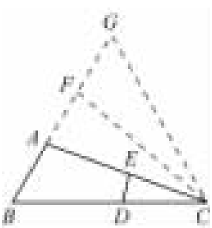


图1-4

在$AG$上取$F$点，使$BA=GF$，连接$CF$（如图1-4）。

易证$\triangle ABC\cong\triangle FGC$，得$AC=CF$，$\angle ACF=20°$。

于是

$$\triangle ACF\backsim\triangle CDE,$$

但

$$CA=2CE,$$

$$\therefore\ S_{\triangle ACF}=4S_{\triangle CDE},$$

$$S_{\triangle BCG}=2S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle CDE}。$$

$$\therefore S=S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times BC^2=\frac{\sqrt{3}}{8}。$$

解由读者自己完成。

通过添辅助线有助于把复杂的图形分解成简单的图形，或者把不规则图形转化为规则图形。

## 1.2 把陌生的问题化为熟悉的内容

**例 5** 已知 $4x-3y-6z=0$，$x+2y-7z=0\ (z\neq 0)$，求 $\dfrac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$ 的值。

**解** 关于 $x$、$y$ 的方程组 $\begin{cases}4x-3y=6z,\\ x+2y=7z,\end{cases}$

得
$$\begin{cases}x=3z,\\ y=2z。\end{cases}$$

把 $x=3z$，$y=2z$ 代入 $\dfrac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}=\dfrac{18z^2+12z^2+6z^2}{9z^2+20z^2+7z^2}=1$。

方程的个数少于未知数的个数，$x$、$y$、$z$ 的值不能唯一确定，似乎"山重水复疑无路"，如果把 $z$ 看成已知常数，就可以把问题转化成解有两个二元一次方程组成的方程组，于是"柳暗花明又一村"。

**例 6**[*] 已知：$\triangle ABC$ 的边 $BC=5$，$\angle B=30°$，$AB-AC=2$，

求作：$\triangle ABC$。

**分析** 设想 $\triangle ABC$ 已经画出。在 $AB$ 上截取 $AD$，使 $AD=AC$，则 $BD=2$。可先作 $\triangle BDC$，使得 $BD=2$，$BC=5$，$\angle B=30°$。然后再画 $\triangle ABC$（如图 1-5）。

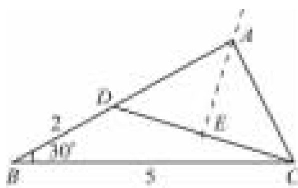


图 1-5

**作法**

1. 作 $\triangle BDC$，使 $\angle B=30°$，$BC=5$，$BD=2$；

2. 作 $DC$ 的垂直平分线，与 $BD$ 延长线交于 $A$，连接 $AC$，$\triangle ABC$ 就是所要求作的。

---

* 表示超出教育大纲要求的题。

**证明**　设 $DC$ 的垂直平分线与 $DC$ 交于 $E$。显然有

$$\triangle ADE \cong \triangle AEC,$$

$$\therefore AD=AC。$$

即

$$AB-AC=AB-AD=BD=2。$$

同时，不难知道，$BC=5$，$\angle B=30°$。可见，$\triangle ABC$ 符合要求。

这个例子，是把条件分散的求作$\triangle ABC$ 问题，化归为已经会解的“已知两边一夹角求作三角形”的问题。

**例 7**　若 $0<a<1$，$0<b<1$。

**证 明**：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$。

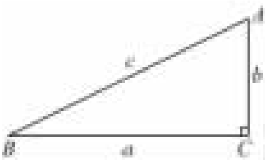

图 1-6

在平面几何中，勾股定理告诉我们：直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。如图 1-6 所示，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，直角边 $BC=a$，$AC=b$，斜边 $AB=c$，得 $a^2+b^2=c^2$，或者 $c=\sqrt{a^2+b^2}$。勾股定理的表达式与求证的式子何等相似，由此可想到用勾股定理来证。

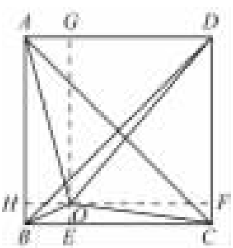

图 1-7

**证明**　设四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $AB=BC=CD=DA=1$，(如图 1-7)，所以对角线 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$，同理 $BD=\sqrt{2}$，所以

$$AC+BD=2\sqrt{2}。$$

在正方形 $ABCD$ 内部任取一点 $O$，过点 $O$ 作 $GE\perp BC$，交 $AD$，$BC$ 于点 $G$、$E$；作 $HF\perp AB$，交 $AB$，$DC$ 于点 $H$，$F$。

又设 $AG=HO=BE=a(0<a<1)$，$GD=OF=EC=1-a$，$AH=GO=DF=b(0<b<1)$，$HB=OE=FC=1-b$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle AGO$ 中，

$$OA=\sqrt{AG^2+GO^2}=\sqrt{a^2+b^2};$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 中，

$$OC=\sqrt{OE^2+EC^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2};$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$OA+OC\geqslant AC,$$

所以 $$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant\sqrt{2}。 \quad ①$$

又因为，在 Rt$\triangle OEB$ 中，

$$OB=\sqrt{OE^2+BE^2}=\sqrt{a^2+(1-b)^2};$$

在 Rt$\triangle OGD$ 中，

$$OD=\sqrt{GD^2+GO^2}=\sqrt{(1-a)^2+b^2};$$

$$\because\quad OB+OD\geqslant BD,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}。 \quad ②$$

将①、②两式相加，得：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}。$$

## 1.3 关于基本图形问题

把平面几何中常见的、具有一些相同性质、用途很广泛的图形归纳出来，成为通常所说的基本图形，如(1) 角平分线＋平行线→等腰三角形，角平分线＋垂线→等腰三角形；(2) 轴对称型、中心对称型、旋转型的三角形；(3) 梯形中常用的五种辅助线的添法等。这样在解几何证明题时，可以先把基本图形挑出来，或者根据题目中的条件制造基本图形，再从这里下手研究。有时一道综合题，拆开来看，往往是由几个基本图形组合而成的。有了基本图形，就可以根据它的性质，找到解题线索。这实际上就是将复杂的、陌生的几何问题化归为简单的熟悉的几何问题。

**例 8** 如图 1-8，已知 $AD$ 是$\triangle ABC$ 中$\angle A$ 的平分线，$BF\perp AD$ 交 $AD$ 的延长线于 $F$，$E$ 是 $BC$ 的中点。

求证：$EF=\frac{1}{2}(AB-AC)$ 。

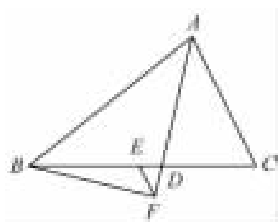

图 1-8

**分析** 由“$AD$ 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$BF\perp AD$”，可以从基本图形“角平分线＋垂线

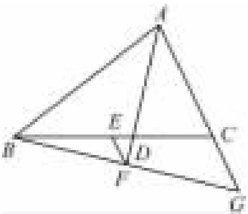


图 1-9

→等腰三角形”着手，构造出$\triangle ABG$是等腰三角形（见图1-9）。

所以　　$CG=AB-AC, BF=FG$，

再由中位线性质，得

$$EF=\frac{1}{2}(AB-AC)。$$

**证明**　（略）

**例9**　如图1-10，已知：$\triangle ABF$、$\triangle ACE$、$\triangle BCD$都是等边三角形。

**求证**：$AF=ED, AE=FD$。

**证明**　∵ $\triangle ABF$、$\triangle ACE$、$\triangle BCD$都是等边三角形，

∴　$AB=FB, AC=EC, DB=BC=DC$，

且

$$\angle FBA=\angle DBC=\angle DCB=\angle ACE=60^{\circ},$$

$$\therefore\ \angle FBD=\angle ABC, \angle ACB=\angle ECD,$$

$$\therefore\ \triangle FBD\cong\triangle ABC\cong\triangle EDC,$$

$$\therefore\ AF=AB=DE, AE=AC=FD。$$

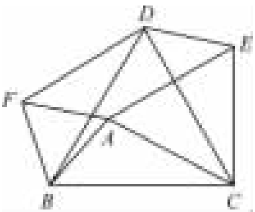


图 1-10

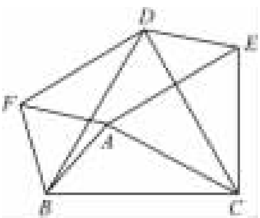


图 1-11

这就是想到“旋转型全等三角形”基本图形后（见图1-11），马上采取的解题过程。

**例10**　如图1-12，在梯形$ABCD$中，已知$AB=AD+BC$，$E$是$CD$的中点。

**求证**：$AE$、$BE$分别是$\angle A$、$\angle B$的角平分线。

**分析**　由条件“$AB=AD+BC$”想到延长$BC$到$F$，使$BF=AB$，因此可得基本图形“中心对称型全等三角形”。如图1-13，易证

$$\triangle ADE\cong\triangle FCE,$$

得

$$AE=EF。$$

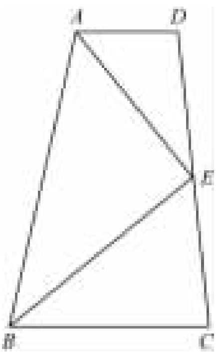


图 1-12

在等腰三角形$ABF$中，可得

$$\angle ABE=\angle FBE,\angle BAE=\angle F=\angle DAE。$$

**证明** 如图 1-13，延长 $BC$、$AE$ 交于 $F$，在梯形 $ABCD$ 中，

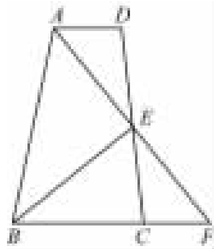

图 1-13

$\because$ $AD/\!/BF$，

$\therefore$ $\angle DAE=\angle CFE$。

$\because$ $DE=EC,\angle AED=\angle FEC$，

$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$，

$\therefore$ $AE=EF,AD=CF$。

$\because$ $AB=AD+BC$，

$\therefore$ $AB=CF+BC=BF$，

$\therefore$ $\angle ABE=\angle FBE,\angle BAE=\angle F=\angle DAE$。

**例 11** 如图 1-14，已知 $E$、$F$ 分别是正方形 $ABCD$ 的边 $AD$、$AB$ 上的点，$\angle ECF=45°$，且 $CG\perp EF$，$G$ 是垂足。

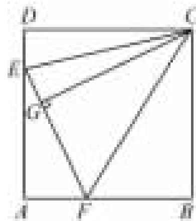

图 1-14

**求证**：$CG=CD$。

**分析** 证明 $CG=CD$，就是证明 $CG=CB$，在求证 $\triangle CGF\cong\triangle CBF$ 时，条件 $\angle ECF=45°$ 用不上去，所以从基本图形“轴对称型全等三角形”着手，作 $\triangle CBH$，使 $\triangle CBH\cong\triangle CDE$（见图 1-15）。

如图 1-15，在正方形 $ABCD$ 中，

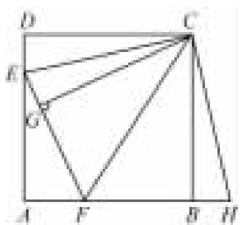

图 1-15

$\because$ $\angle ECF=45°,\angle DCE+\angle BCF=45°$。

$\therefore\angle ECF=\angle HCF$，

$\therefore\triangle ECF\cong\triangle HCF$。

$\therefore\angle CFE=\angle CFH$。

再证

$$\triangle CGF\cong\triangle CBF,$$

就可证得

$$CG=CB=CD。$$

**证明** （略）。

**例 12*** 如图 1-16，已知：$P$ 是 $\square ABCD$ 内一点，且

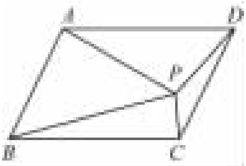


图 1-16

$\angle PAB=\angle PCB$。

**求证**：$\angle PBA=\angle PDA$。

**分析** 通过将 $\triangle ABP$ 平行移动，得 $\triangle DCE$，使 $\angle PAB$、$\angle PCB$、$\angle PBA$、$\angle PDA$ 四个角之间的关系，成为四边形 $PCED$ 中的四个角 $\angle EDP$、$\angle CPE$、$\angle PEC$、$\angle DPE$ 之间的关系。

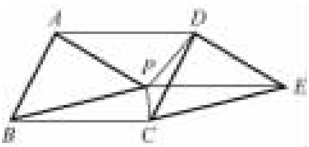


图 1-17

**证明**：过点 $P$ 作 $PE\parallel AD$，且 $PE=AD$，连接 $DE$、$CE$，由 $AD\parallel BC$，得 $PE\parallel BC$；由 $AD=BC$，得 $PE=BC$（见图 1-17）。

$\therefore$ 四边形 $ADEP$、$PECB$ 都是平行四边形。

$\because$ $\angle EDC=\angle PAB=\angle PCB=\angle EPC$，

$\therefore$ $P,C,E,D$ 四点共圆，

$\therefore$ $\angle PDA=\angle DPE=\angle DCE=\angle PBA$。

构造"平移型全等三角形"，使它成为基本图形，把条件集中起来。

## 练习题

1. 若 $a>0,b>0$。设计一种几何方法证明：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。

2. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ 有最大值还是有最小值？并求最大值或最小值。

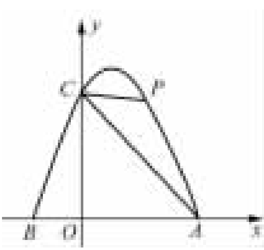


图 1-18

3. 如图 1-18，$y=-x^2+2(m+1)x+m+3$ 与 $x$ 轴交于 $A$、$B$，且 $A$ 在 $x$ 轴正半轴，$B$ 在 $x$ 轴负半轴。$OA$ 的长为 $a$，$OB$ 的长为 $b$。

(1) 若 $a:b=3:1$，求 $m$ 的值；

(2) 如(1)中求得的抛物线与 $y$ 轴交于点 $C$。问：在抛物线上是否存在一点 $P$，使 $\triangle PAC\cong\triangle OAC$？如果存在，求点 $P$ 的坐标；

如果不存在，请说明理由。

4. * 已知：角 $\alpha$、$\beta$、线段 $m$。

求作：$\triangle ABC$，使 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\triangle ABC$ 的周长 $=m$。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是角平分线，$AE=AC$，$EF /\!/ BC$（见图 1-19）。

求证：$CE$ 平分 $\angle DEF$

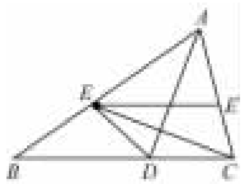

图 1-19

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知：$AC=3AB$，$AO$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，$CD\perp AO$ 交 $AO$ 的延长线于 $D$（见图 1-20）。求证：$AO=DO$。

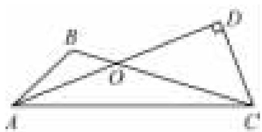

图 1-20

7. 已知：$E$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 上的一点，$CE=CB$，过 $E$ 作 $EF\perp AC$ 交 $AB$ 于 $F$（见图 1-21）。求证：$AE=EF=FB$。

8. 如图 1-22，一单杠高 2.2 米，两立柱之间的距离为 1.6 米，将一根绳子的两端拴于立柱与铁杆结合处，绳子自然下垂呈抛物线状。

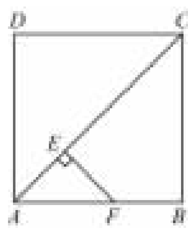

图 1-21

(1) 一身高 0.7 米的小孩站在离立柱 0.4 米处，其头部刚好触上绳子。求绳子最低点到地面的距离（如图 1-22）。

(2) 为供孩子们荡秋千，把绳子剪断后，中间系一块长为 0.4 米的木板（如图 1-23）。除掉系木板用

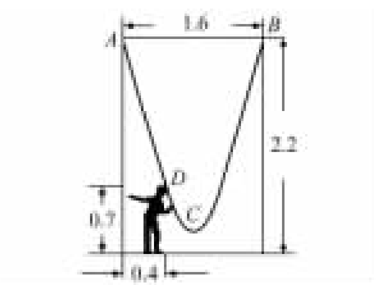

图 1-22

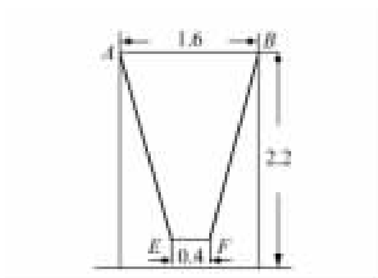

图 1-23

去的绳子后，两边的绳子长正好各为 2 米，木板与地面平行。求这时木板到地面的距离.（供选用数据：$\sqrt{3.36}\approx 1.8$，$\sqrt{3.64}\approx 1.9$，$\sqrt{4.36}\approx 2.1$）

**参考解答或提示**

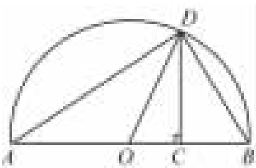


图 1-24

1. **证明**：设 $AC=a$，$BC=b$，则，$OD=\frac{a+b}{2}$，$OC=\sqrt{ab}$。∵ $OD\geqslant DC$，当 $DC$ 是半径时取等号，∴ $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（如图 1-24）。

2. **解**：$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 有最小值，当 $x=1$ 时，最小值是 1；∴ $\sqrt{x^2-2x+2}$ 有最小值，当 $x=1$ 时，最小值是 1；∴ $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ 有最大值，当 $x=1$ 时，最大值是 1。

3. **解**：(1) $a=3b$，设 $A(x_1,0)$、$B(x^2,0)$，则 $x_1=a=3b$，$x_2=-b$，$x_1+x_2=2(m+1)=2b$，$x_1x_2=-(m+3)=-3b^2$，$m=0$ 或 $m=-\frac{3}{5}$。当 $m=0$ 时，$y=-x^2+2x+3$，$A(3,0)$，$B(-1,0)$；当 $m=-\frac{5}{3}$ 时，$y=-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$，$A(-2,0)$，$B\left(\frac{2}{3},0\right)$，此时不符合题意“$A$ 在 $x$ 轴正半轴，$B$ 在 $x$ 轴负半轴”，应该舍去。∴ $m=0$；(2) 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 $y$ 轴交于 $C(0,3)$，此时这样的 $\triangle PAC$ 不存在，如果 $\triangle PAC\cong\triangle OAC$，则点 $P$ 的坐标为 $(3,3)$，这时点 $P$ 不在函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图象上。∴ 在抛物线上不存在一点 $P$，使 $\triangle PAC\cong\triangle OAC$。

4. **作法**：(1) 作 $\triangle CDE$，使 $\angle D=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle E=\frac{1}{2}\beta$，$DE=m$；(2) 分别作 $CD$、$CE$ 的垂直平分线与 $DE$ 交于 $A$、$B$；(3) 连接 $CA$、$CB$。所以 $\triangle ABC$ 就是所要求作的（图 1-25）。

5. **证明**：∵ $\angle EAD=\angle CAD$，$AE=AC$，$AD=AD$，∴ $\triangle AED\cong$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com