圆21世纪中学数学创新教学实验设计与探索全书（五）

总顾问摇摇摇摇摇摇

主摇编摇摇摇摇摇摇

· 内蒙少儿 出 版 社 ·
员怨怨怨圜陇

需要全本请访问 www.ertongbook.com

编摇委摇会

总顾问：柳摇斌

主摇编：黄摇济摇顾明远摇鲁摇洁

副主编：曹振国

编摇委：沈颜平摇王光军摇袁摇真

摇摇摇摇康为新摇李摇明摇萧摇珊

摇摇摇摇邢莉娅摇陈达园摇黄伟健

摇摇摇摇杨学高摇邹鲁明摇邱华运

摇摇摇摇吴素文摇孟摇彦摇郑摇敏

总策划：曹振国摇袁摇真

《圆员世纪中学数学创新教学实验设计与探索全书》编摇委摇会

主摇编：黄摇济摇顾明远摇鲁摇洁

副主编：曹振国

编摇委：王林全摇王明福摇刘哲流

摇摇摇摇顾泠沅摇刘摇坤摇常相舜

摇摇摇摇瞿宁远摇杨燕钧摇卢仲衡

摇摇摇摇任万库摇刘汉义摇陈作民

摇摇摇摇李先明摇云传潮摇李作松

摇摇摇摇彭咏松摇冯善庆摇叶尧城

摇摇摇摇孙枝德摇李学坤摇夏惠贤

摇摇摇摇陈利中摇肖柏荣摇黄荣金

目摇摇录

第二篇
中学数学教学方法实验探索专题研究

第五部分摇中学数学思维训练实验探索

❖ 中学数学思维特点和思维训练 ❖ ……（怨源

❖ 中学数学思维品质的训练 ❖ ……（怨运

❖ 中学数学思维能力的训练 ❖ ……（员员

❖ 中学数学思维方法的训练 ❖ ……（员员

第五部分

中学数学思维训练实验探索

中学数学思维特点和思维训练

要在中学开展数学思维训练活动，首先应该了解中学数学思维的特点，包括中学数学思维所特有的结构、发展过程及思维训练的基本原则和方法。需要指出，“中学数学思维”指的是了解和运用中学数学知识时的思维活动。显然，中学数学思维与其它学习阶段的思维有很多共通之处。中学数学思维所涉及的基本概念、原理和方法，在小学数学思维以至大学的、数学研究工作者的思维活动中也有所体现。同时，中学数学思维又有自身的特点，与其它阶段的数学思维有许多重要差别。我们在讨论中学数学思维特点时，要兼顾数学思维的共性，突出中学数学思维的特性，使两者有机地统一起来。

（一）中学数学思维的结构

所谓中学数学思维的结构，指的是中学数学思维的主要方面及其相互关系。一般说来，中学数学思维包括以下三个主要方面：

觷中学数学思维品质

从心理学角度讲，思维品质是思维发生和发展中所表现出来的个性差异。在中学数学教学活动中，经常可以发现有的学生思维敏捷，思路宽，有独创性；而有的学生思考问题很慢、很简单，思路狭窄，这就是思维品质的差异。良好的数学思维品质需要培养，而培养思维品质的途径就是通过相应的思维训练。在中学数学教学中，需要着重培养和训练的思维品质有：

需要全本请访问 www.ertongbook.com

（员）数学思维的灵活性

数学思维灵活性指的是不过多地受思维定势的影响，善于从旧的模式或通常的制约条件中解脱出来，及时转向，迅速找到解决问题的途径。比如德国著名数学家高斯小时候计算“员垣圆垣猿垣……垣员园园”时，没有像别的同学那样逐项相加，而是想到了“员垣员园园越园园员，圆垣怨怨越园园员，猿垣愿愿越园园员，……，源园垣缘缘越园园员，源员垣缘员越园园员”恰好共有缘园对，因而员垣圆垣猿垣……垣员园园越园园员伊缘园越缘园缘园。这就体现了思维的灵活性。在做初等几何证明题时，经常出现由于思路错误而证不出来的情况。这时数学教师应当引导学生迅速摆脱错误思路，寻找新的途径，并注意让学生在这个过程中积累和总结经验，这就是在进行数学思维灵活性的训练。

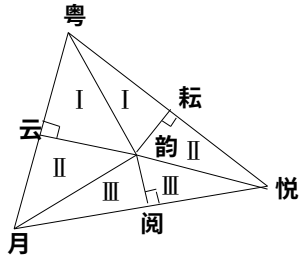
（圆）数学思维的批判性

数学思维的批判性指的是对已有的数学表述和论证能提出自己的见解，能独立思考，不盲从，不轻信。对于数学家来说，能发现前人理论中的错误和不足，加以修正和发展，体现了数学思维的批判性。对于学生们来说，能发现自己和同学们原有认识的错误和不足，不断加以改正和完善，也体现了数学思维的批判性。比如，在柯西那个时代，几乎所有的数学家都相信，凡是连续函数一定可微（当然要除去象 赠越园那样的孤立点），可是后来有一些数学家，如德国的魏尔斯特拉斯就不以为然。魏尔斯特拉斯专门构造了一个处处连续又处处不可微的函数，于是否定了前人的传统认识。这就是他的数学思维具有批判性的表现。在中学数学教学中，教师经常提醒学生要注意检查自己的解题思路，要学会验算，要能够看出自己的毛病所在，这就是在进行数学思维批判性的训练。

（猿）数学思维的严谨性。

数学思维严谨性指的是思考问题符合逻辑、严密、准确，数学运算精确无误。与严谨性相对立的是直观性。从直观上发现数字和图形的性质和相互关系，有助活跃思路，找到解决问题的正确途径。但直观性常伴随着模糊、随意、不可靠等弱点，必须通过坚持严谨性来加以克服。比如，初等几何的公理系统，最初曾包含某些直观的、不严谨的成分。在欧几里得建立的公理系统中，并没有明确给出顺序公理，因而可能导致一些错误结构的“证明”，如每个三角形都是等腰的“证明”。作△粤月悦中角 粤的平分线和 月悦的垂直平分线（图 员原员）。

如果这两条线平行，则角 粤平分线垂直于 月悦，因而这三角形是等腰的。如果这两条线相交于 韵点，那么作垂直于 粤月的线 韵云和垂直于 粤悦的线 韵耘，显然，标着 Ⅰ的两个三角形全等，因而 韵云越韵耘，标着 Ⅲ的两个三角形也全等，因而 韵月越韵悦，从而标着 Ⅱ的两个三角形也全等，所以 云月越耘悦，从标着 Ⅰ的两个三角形，我们得到 粤云越粤耘，于是，粤月越粤悦，从而三角形就是等腰的了。



图员原员

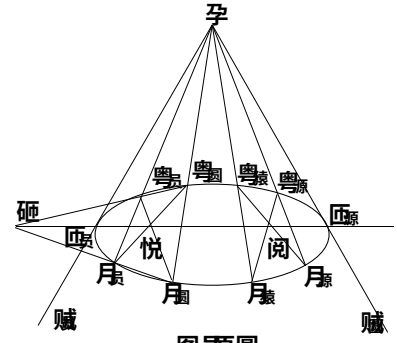
这个结果当然是荒谬的。图 员原员实际上画得并不准确。点 韵的位置应该在三角形的外部，在外接圆上，这是可以证明的。而 耘、云两点的位置也不是任意的，它们必须分别在三角形中各自边的

内部和外部。员怨世纪以前的数学家们往往只能靠画出正确图形来确定 耘和 云的位置，这当然是不够的。严格的几何证明不能依赖于直观图形给出的关系。由于缺乏对“ 在……之间 ”的关系即顺序关系的深入理解，就难免出现导致错误结论的“ 证明 ”。员怨世纪的数学家高斯、帕什等人发现了这个问题。在德国数学家希尔伯特建立的几何公理系统中，明确给出了顺序公理，完全消除了欧几里得公理系统中的逻辑缺陷。这就充分体现了数学思维严谨性的作用。在中学数学教学中，有些学生常犯类似的毛病。比如，有些学生不注意区分相近概念的细微差别，不清楚概念的内涵和外延；审题时只注意明显条件而忽视隐蔽条件，把直观上显而易见的关系当作论证的根据；答题时不完全，不能给出问题的全部答案。这都是思维不严谨的表现。克服这些毛病，就是在进行思维严谨性的训练。

（源 数学思维的广阔性

数学思维的广阔性指的是对一个问题能从多方面考虑，对一个对象能用多种角度观察，对一个题目能想出各种不同的解法，即通常所说的“ 一题多解 ”。一题多解的目的当然是为了寻找一种最简捷的解题方法，而最简捷的解法的获得只能来自尽可能广泛深入的思考和选择。大数学家高斯在这方面有卓越才能。有一次，他的一个朋友舒马赫给他写信，说明了数学家勒姆柯尔关于通过椭圆外一点 孕作椭圆切线的作图法。如图 员原圆

勒姆柯勻通过 孕点画任意四条割线 孕粤月蚤（蚤 越员，圆 猿 源，其中线段 粤员月圆 与 粤圆月员，粤猿月源 与 粤月赫猿，分别相交于 悦 阅两点，然后通过 悦 阅两点的直线交椭圆于 匝员，匝圆两点，连接 孕匝员，孕匝圆，就是所求的切线 赋员和 赋圆。舒马赫指出，这个题可用更简单的方法来解，即只需三条割线，因为 粤圆月猿 和 粤猿月圆的交点也在 悦阅线上，所以有 孕粤月蚤（蚤越员，圆 猿，就足够了。在接到舒马赫的信六天之后，高斯又给出一个更简单的解法：只需两条割线。因为他发现 粤员粤圆和 月员月圆连线的交点 砸也在 悦阅线上，所以有 孕粤员月员 和 孕粤圆月圆 就足够了。可见，对于这个问题，高斯的思路要比舒马赫和勒姆柯尔更为广阔，因而才能给出如此简捷漂亮的解法。在中学数学教学中，有很多一题多解的训练，其目的都为了训练学生思维的广阔性。



图员原圆

关于数学思维品质，学术界还有其它一些提法，如思维的敏捷性，独创性，深刻性等等。这些思维品质与上述四种思维品质实质上可归并到一起，如思维的敏捷性和灵活性实际上是相通的；独创性和批判性紧密相连；数学思维的深刻性主要讲的是抽象逻辑性，与思维的严谨性本质上是统一的。因此，只要讨论上述四种思维品质就足够了。这四种思维品质又是相互联系，相互渗透，相互制约的。没有思维的广阔性就谈不上灵活性，没有灵活性也就谈不上批判性，批判性又需以严谨性为前提，严谨性还制约着广阔性和灵活性。一般说来，思维的严谨性是思维品质的基础，灵活性和广阔性互为条件，批判性是思维品质的升华，体现了思维发展的水平。只有全面发展这四种思维品质，才

能具有较强的思维能力，掌握高超的思维方法。

圆摇中学数学思维能力

思维能力是在一定的思维品质基础上形成的分析问题和解决问题的能力。在中学数学教学活动中，经常可以见到有的学生善于思考，领悟力强，能很快想出各种可能方案，组织好解题思路；而有的学生遇到难题一筹莫展，抓不住问题的本质和关键，找不到解题的门路，这就是思维能力的差异。数学思维能力是思维品质在解题实践中的具体化，用一句通俗的话来说，是实实在在的“真本事”。如果思维能力不强，那么即使思维再灵活，再广阔，再有批判性，到了面对问题时也束手无策。数学思维能力的培养，也需要相应的思维训练。在中学数学教学中，需要着重培养和训练的思维能力主要有：

（员 数学抽象思维能力

“抽象”一词来源于拉丁文“[illegible]”，原文含有“排除，抽出”的意思。所谓抽象思维，一般指抽取同类事物的共同的、本质的属性或特征，舍弃其它非本质的属性或特征的思维过程。数学成果具有高度的抽象性，数学的抽象思维也极为发达。数学的抽象思维能力，指的是理解、掌握和运用数学抽象概念和原理的能力。在中学数学教学中，可以发现有的学生很难理解比较抽象的概念和原理，总是把自己的认识水平停留在同感性直观和经验相适应的程度上，因而总摆脱不了直观经验的局限性。比如初中代数在讲到“用字母表示数”，进而引入代数式和方程时，有的学生感到很难把具体问题中的数量关系用代数式和方程来表示，这就是抽象思维能力不强的表现。实际上，“用字母表示数”是人们数学抽象思维能力的一次飞跃。员远世纪法国数学家 云· 维叶特是第一个有意识地、系统地用字母表示未知量和一般多项式的系数的人。他的工作使代数成为一门研究一般类型的形式和方程的学问，同单纯研究数的算术分清了界限。因此，只有弄清楚“用字母表示数”与发展数学抽象思维能力的关系，才能使学生们的数学思维顺利地从算术过渡到代数。

（圆 数学收敛思维能力

“收敛思维”是近年来在创造心理学和思维科学研究中提出的一个专有名词，有时也称“集中思维”，它主要指严格的形式化的逻辑思维，其特点是思维目标集中，操作性强，能够获得明确的结果。这个特点好比数学分析上讲的收敛过程，它总是指向一个确定的极限。数学的收敛思维能力表现为理解、掌握和运用形式逻辑思维的能力。这不仅是指逻辑推演准确无误，还要求逻辑推演尽可能简捷、优美，很快获得结果。具体的数学问题往往有很多条件，很多值得考虑的解题线索，很多可以利用的数量关系和已知的数学规律。要在众多条件、线索、关系中很快理出一个头绪，形成一个逻辑上严谨的解题思路，就需要数学的收敛思维能力。在中学数学教学中，教师需要经常引导学生们理清已学过知识之间的逻辑线索，练习由某种数量关系推演出另一种数量关系，进而把问题的条件、中间环节和答案联想起来，这就是在进行收敛思维能力的训练。

（猿 数学发散思维能力

“发散思维”是同“收敛思维”特点相反的思维活动。发散思维主要是指不严格的非逻辑思维，其特点是思维目标分散，无确定的活动程序和规则，能够获得多种可能的结果。这个特点好比数学分析上讲的发散过程的特点，其目标总是不确定的。数学的发

散思维能力表现为理解、掌握和运用非逻辑思维的能力。这种能力又可具体分为以下几种基本类型：

①数学想象能力

想象是人脑中对已有表象进行加工创造新形象的心理过程。数学想象是在数学认识活动中获得和运用形象思维的过程。中学数学教学中有许多涉及形象思维的地方。如初等几何中大量涉及几何图型的直观形象；解析几何又使人们把图的形象同数的形象联系在一起。对数字之间关系也可以产生某种形象化的感觉，通常称为“数觉”，它使人们有可能想象各种数量关系之间的可能联系。几何证明题时常要靠添加“辅助线”来解决，“辅助线”的存在及其与已知图形的联系，就是靠人们想象出来的。运用“数觉”的想象要比运用几何图形的想象更困难一些，而“数觉的丰富和敏感程度往往标志着一个人思维能力的水平。有些数学家往往凭借“数觉”想象出普通人很难发现的数学联系。比如印度数学家拉玛努真的“数觉”就相当强。据说英国数学家哈代有一次乘车去看他，汽车牌号是 [illegible] 拉玛努真想了一下马上说，这是能用两种方法表示为两个整数的立方和的最小整数（[illegible]）。

②数学直觉能力

直觉是对事物本质的直接领悟或洞察。数学直觉是对数学对象事物的直接领悟或洞察。在中学数学教学活动中，经常可以遇到“灵机一动，计上心来”，突然想到解题思路的事情，这就是数学直觉能力在起作用。数学直觉的出现并不是神秘莫测的。它实际上是经过长期紧张的思考之后，适当放松情绪，让思路自由舒展，突然使各种想法融会贯通的结果。数学直觉可以用于在原来认为不相同或无关的两个事物或更多事物之间觉察到同一性或内在联系，也可以用于选择有希望的解题思路，避免在无价值的问题上耗费精力。据说，解析几何的建立就是数学直觉的产物。[illegible]年，法国大数学家笛卡儿在多瑙河畔诺伊堡军营服役时，整天沉迷在思考之中，探索几何与代数的本质联系。[illegible]月[illegible]日晚，他心中极为兴奋，为的是“发现了一种不可思议的科学的基础”。笛卡儿写道：“第二天，我开始懂得这惊人发现的基本原理。”这就是指他得到了建立解析几何的线索。显然笛卡儿高度的数学直觉能力使他获得了这一重大发现。

③数学猜测能力

猜测是根据某些已知事实和知识对未知事物及其规律性的似真推断。数学猜测是根据已知数学条件和数学原理对未知的量及其关系的似真推断。它具有一定的科学性，又具有很大程度的假定性。猜测可以通过想象或直觉来得到，也可以通过不完全归纳、类比、变换条件等途径得到。有些时候，逆向思维会带来很有价值的猜测。所谓逆向思维，是指在循着某一固定思路解决数学难题屡遭失败之后，沿着相反的方向进行思考，提出新的猜测。非欧几何学的建立实际上就是逆向思维的结果。数学猜测能力是一种具有多种成分的能力，它包含数学的想象能力和直觉能力，也包含对猜测的部分内容和中间环节进行论证和反驳的逻辑思维能力，还包含一定的经验和技巧，需要通过全面的训练加以培养。具备数学猜测能力是获得数学发现的重要因素，也是成功地运用数学知识解决实际问题所必不可少的条件。因此，在中学数学教学中进行数学猜测能力的训练，对于学生们当前和长远的需要都是很有好处的。

数学的想象能力、直觉能力和猜测能力，都是数学发散思维能力。这种能力富于创造性，能够提供大量新观点、新思维、新方法。但是单靠发散思维还不能够完成数学的创造性思维活动。著名数学家徐利治先生指出：“数学创造往往开始于不严格的发散思维，而继之以严格的逻辑分析思维，即收敛思维。”发散思维虽然能够提供有价值的重要设想，但其成果并未经过严格验证。只有经过验证的东西才是数学上可以接受的。因此，发散思维和收敛思维需要相辅相成，互相促进。发散思维能力训练和收敛思维能力训练也需要结合起来进行。

獵中学数学思维方法

思维方法是比思维能力更具体的东西，它是人们在思维过程中处理各种问题的基本方法。思维方法大体上可分为两个层次，一个层次是各学科思维都要用到的逻辑思维方法，如演绎、归纳、分析、综合、类比等等；另一层次是每个学科自身所特有的基本方法，如数学中的化归方法、模型方法、公理化方法、无穷小方法等等。根据中学数学教学的实际情况，需要着重进行训练的中学数学思维方法主要有：

（员 数学演绎与归纳方法

演绎推理是由一般性的命题推出特殊性命题的推理方法。演绎推理的主要形式是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理，这是一种必然性推理。中学数学中要大量使用演绎方法。特别是在初等几何中，证明几何定理和作几何题处处离不开演绎推理。但学生们在进行推理时有可能犯一些逻辑上的毛病，如三段论中的中项不周延、由特殊前提得出结论等等。这除了要介绍一些必要的逻辑知识外，还要加强演绎方法的训练。

归纳推理是由个别的特殊性命题推出一般性命题的推理方法。归纳推理依其概括的对象是否完全而分为完全归纳和不完全归纳。完全归纳法是根据某类事物的全体对象作出概括的推理方法，如数学上的穷举法。完全归纳法在逻辑上是确实可靠的，因而可用于数学证明。比如为了证明关于三角形的某个命题，有时需分别按锐角、直角和钝角三角形三种情况来论证，这样得出的一般性结论就是可靠的。还有一种不完全归纳法，即根据部分对象具有某种属性就作出一般性的概括。这样得出的结论实际上只是一种猜测。猜测当然也是有用的，但不一定可靠。在不完全归纳法中，有一种判别因果关系的归纳方法，叫做“穆勒五法”，由员怨世纪英国逻辑学家穆勒提出，在数学思维中很有用处。归纳方法也需要专门的训练，以便使学生能够正确地掌握并熟练加以运用。

（圆 数学分析与综合方法

分析方法是把整体分解为部分，把复杂事物分解为简单要素，并分别加以研究的一种思维方法。由于数学研究对象是各种空间形式和数量关系，完全由整体分解为各组成部分比较容易，所以，特别适于使用分析方法。在具体使用时，可以按照已知部分和未知部分的差别加以分解，也可按照难易的程度和繁简程度的不同加以分解，或者按照数学对象的自身构造加以分解，这里没有一成不变的规矩。对具体情况作具体分析，是运用数学的分析方法的根本原则。在论证某个命题时，可以运用分析方法“由果索因”，即从求证结论出发，逐步倒推，逐步分析矛盾，直到已知的根据。这种证法常能取得很好的效果。

综合方法是把对象的各个部分，各个方面和各种因素联结起来考虑的一种思维方

法，或者说是一种整体性的思维方法。把数学对象的各部分、各方面、各要素联结起来考虑问题，目的在于发现它们之间的内在联系，由此得出关于数学对象整体性质的结论。在论证某个命题时，可以利用综合方法，“由因索果”，即从已知条件出发，把各有关方面综合起来考虑问题，以得到求证结论。

数学的分析方法和综合方法需要相互补充，这两种方法的训练也需要结合起来进行。

（猿 数学化归方法

所谓“化归方法”，是指把有待解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类比较容易解决或已经解决的问题中去，最终获得原来问题答案的一种方法。这是数学思维活动中常用的一种方法。比如，在掌握了一元一次方程的解法之后，我们用加减消元法或代入消元法来解二元一次方程组（或其它线性方程组），就是把二元一次方程组的求解问题化归到一元一次方程的求解问题。又如，要计算凸多边形的内角和，可以把凸多边形分割成若干个三角形，这样就把求凸多边形内角和的问题化归为求三角形内角和的问题。化归的方向一般说来是由未知到已知，由难到易，由繁到简。化归的具体方法可以有多种多样，比如把几何图形分割、叠加，对未知成分所应满足的条件进行分解，逐步逼近，建立不同类数学对象之间的对应关系，等等。在实际问题中，化归往往不是一次完成的，而是要经历多次反复与尝试的复杂过程。熟练进行化归是一种技巧，这种技巧需要通过大量的自觉训练才能完全掌握。

（源 数学模型方法

所谓模型方法，是借用模型来研究原型的功能特征及其内在规律的一种思维方法。模型是通过对原型的形象化、模拟或抽象而得来的。数学模型是从各种现实的数学问题中抽象概括出来的，是一种形式化和符号化的模型。数学模型方法主要适于运用数学知识解决实际问题，也可用来动用一部分数学知识解决数学本身的另一部分问题。

数学模型方法的关键在于从原型中准确概括出反映原型本质特征的数学结构。这不仅需要较强的数学抽象思维能力，还需要对数学模型本身特点有较全面的了解。

在中学数学教学中，经常可以看到有的学生对于解应用题感到很苦恼。他们在进行纯粹的数学计算、变换和推演时可能感到困难不大，可是一接触现实生活中有待解决的数学问题，就感到束手无策。原来学过的数学概念、公式、定理都在脑子里转，就是不知道该用哪一个，或者先用哪个，这就是不熟悉数学模型方法的缘故。要建立一个好的数学模型，使之充分发挥作用，便于解决问题，必须使数学模型具备以下三个条件：

①数学模型必须能够反映原型的本质特征，不能人为地加以歪曲。

②数学模型必须高度抽象、高度简化，以便于利用数学理论进行分析、推导和计算。

③数学模型必须能用于实践，解决实际问题。

要使数学模型具备这样三个条件，那么在从实际问题中提炼数学模型时，必须对原型进行适当的简化，去掉一些无关紧要的枝节问题，把本质问题突出起来。当然，“简化”必须合理，既不能过分简化而歪曲原型本来面目，又不能简化不足以致不能进行数学计算和推演。这里有一些很复杂的具体问题，我们在后面再详细说明。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

（缘 数学公理化方法

公理化方法是数学思维活动中的一个重要方法。在中学数学教学中涉及的数学公理化方法，主要是初等几何的公理化方法。这是一种实质公理化方法，即初等几何的公理系统的基本概念（点、线、面、体及其相互关系）是下了定义的，是有实质内容的。实质公理化方法并未完全摆脱几何图形的直观意义，因而具有一定的局限性和缺陷。员怨世纪末期形式公理化方法的出现，使公理系统的基本概念变成不加定义的（因而具有更广泛的适用性），公理化方法由此进入了算术、概率论、拓扑学、集合论等新领域，成为数学思维中普遍适用的一种方法。在中学数学教学中使用公理化方法，主要是为了使学生对公理系统的基本性质和作用有初步的了解和掌握，以便为后来更广泛地使用公理化方法打下基础。

中学数学思维中的各种方法，也是相互影响、相互渗透的。经如在分析与综合方法、化归方法、模型方法、公理化方法中，都要用到演绎与归纳方法；化归思路的确定离不开分析与综合；模型方法的运用也要借助化归方法，等等。因此，在教学活动中，各种思维方法的训练也应结合起来进行，以达到相得益彰之目的。

总的说来，中学数学思维的基本结构，是由数学思维品质、数学思维能力、数学思维方法这三个主要方面决定的。这三方面及其各具体侧面之间的相互关系，构成了中学数学思维的基本框架。中学数学思维的结构是进行数学思维训练的对象。它从横的方面，或者说从静态的方面揭示了中学数学思维活动的特点及其规律。我们还需要从纵的方面，或者说从动态的方面揭示中学数学思维活动的特点及其规律，这就需要探讨下面的问题。

（二）中学数学思维的发展

这里所要探讨的中学数学思维的发展，主要指在中学数学教学过程中，学生们的思维特点的演变和发展过程。只有了解中学生数学思维特点和发展规律，才能找到数学思维训练的适当途径。

下面首先探讨中学生数学思维发展的一般规律，然后探讨中学生数学思维发展的个性特征，最后来讨论影响中学生数学思维发展的诸因素。

员郧中学生数学思维发展的一般规律

要弄清楚中学生数学思维发展的特点，应该先对小学生数学思维发展特点有一些必要的了解。

在我国，小学生一般是 苑至 员园岁的儿童，这个年龄段数学思维的基本特点是，以具体形象思维为主要形式逐步过渡到以抽象逻辑思维为主要形式。但这种抽象逻辑思维在很大程度上仍然是直接与感性经验相联系的，仍然具有很大成分的具体形象性。小学生的思维同时具有具体形象的成分和抽象概括的成分，它们之间的相互关系随着年级升高以及不同性质的智力活动而发生变化。到了小学高年级，已经具备了初步的从本质上抽象概括的能力，比较分类的能力，并能够进行比较自觉的演绎推理、归纳推理和类比推理（虽然他们可能并不知道有关的逻辑学术用语和规则）。

中学生一般是 员员到 员愿岁左右的青少年，这个年龄段数学思维的基本特点是，思维

能力得到迅速发展，抽象逻辑思维已处于优势地位。但初中生和高中生还有所不同。在初中生的思维中，抽象逻辑思维虽然开始占优势，但在很大程度上还属于经验型，他们的逻辑思维还需要感性经验给予直接支持。高中生的抽象逻辑思维已基本属于理论型。他们已经能够用理论来指导分析综合有关事实材料，从而不断扩大自己的知识领域。我国心理学家朱智贤和林崇德的研究表明，中学生抽象逻辑思维的发展存在着关键期和成熟期。初中二年级是中学生数学思维发展的关键期。从初中二年级开始，他们的抽象逻辑思维开始由经验型水平向理论型水平转化。到高中二年级，这种转化初步完成，这意味着他们的思维趋向成熟。这项研究的对象是 缘圆名学生，从初一到高二每个年级各员圆名，分别测定其数学概括能力、空间想象能力、数学命题能力和逻辑推理能力。其研究结果如下：

中学生数学概括能力分四个等级：（Ⅰ）数学概括水平（对数概念扩充和运算的理解）；（Ⅱ）形象抽象概括水平（对空间图形和函数图像的理解）；（Ⅲ）形式抽象概括水平（对各类代数式，方程的理解）；（Ⅳ）辩证抽象概括水平（找出各种数学运算的内在联系，理解其辩证关系）。各年级被试达到各级水平的人次列于下表 员原员（原表中有年级组之间差异和考验值，即表明其差异的显著程度。因涉及到实验统计数据处理的一些专门知识，故从略。读者从表 员原员中也可直观地发现这种差异）。

表 员原员　　各年级数学概括能力的比较

水摇平 / 人次分布 / 年级（年龄）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	备摇摇注
初一（员圆岁–员猿岁）	猿圆	远缘	缘	园	
初二（员猿岁–员源岁）	员员	苑远	员圆	猿	初二学生Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ类变化较显著
初三（员源岁–员缘岁）	远	源源	猿缘	员缘	
高一（员缘岁–员苑岁）	圆	圆圆	源愿	猿圆	
高二（员苑岁–员愿岁）	圆	员园	缘缘	猿猿	高二学生Ⅲ、Ⅳ类趋于成熟

中学生空间想象能力也分四个等级：（Ⅰ）用数字计算面积和体积，这是对三维空间的量的运算，具体形象性在运算思维中占一定优势；（Ⅱ）掌握直线、平面阶段；（Ⅲ）掌握多面体阶段；（Ⅳ）掌握旋转体阶段。这个发展趋势反映了空间想象力从感性经验型的抽象逻辑向理论型的抽象逻辑水平发展的过程。其结果如表 员原圆

中学生数学命题能力包括掌握命题结构（正命题→逆命题→否命题→逆否命题）的能力和掌握命题形成的能力。后一种能力可分三个等级：（Ⅰ）确定简单命题；（Ⅱ）掌握和判别复合命题；（Ⅲ）按照运算法则确定命题的变型。这方面研究重点分析了三个年级组，获得的结果如表 员原猿

摇摇摇

摇摇表 员原圆摇　　各年级空间想象能力的比较

水摇平 / 人次分布 / 年级（年龄）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	备摇摇注
初一（员猿-员源）	怨园	源园	园	园	
初二（员源-员缘）	怨远	愿园	员愿	愿	初二学生Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ类变化较显著
初三（员缘-员苑）	怨远	愿远	源愿	猿愿	
高一（员苑-员愿）	员园园	怨园	缘园	源园	
高二（员远-员园园）	怨愿	怨园	缘远	源愿	高二学生各类趋于成熟

表 员原猿摇　　各年级掌握命题形成能力的比较

水摇平 / 人次分布 / 年级（年龄）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	备摇摇注
初二（员源-员缘）	愿园	源园	员园	
初三（员缘-员苑）	怨园	远园	猿远	初三学生Ⅱ、Ⅲ类变化较明显
高一（员苑-员愿）	怨园	愿源	苑远	高一学生Ⅱ、Ⅲ类变化较明显

中学生数学推理能力分为四个等级：（Ⅰ）直接推理；（Ⅱ）间接推理；（Ⅲ）迂回推理；（Ⅳ）按一定数理逻辑进行综合推理。其结果如表 员原源

表 员原源摇　　各年级数学推理能力的比较

水摇平 / 人次分布 / 年级（年龄）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	备摇摇注
初一（员猿-员源）	源源	员愿	苑	园	
初二（员源-员缘）	远苑	源员	圆源	源	初二学生Ⅰ—Ⅳ类变化都较明显
初三（员缘-员苑）	愿源	缘园	猿苑	员源	
高一（员苑-员愿）	怨源	远缘	缘源	圆源	
高二（员远-员园园）	怨怨	愿源	苑员	远园	高二学生Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ类变化较明显

从上面的数学概括能力、空间想象能力、命题能力和推理能力四项指标来看，初中二年级学生的抽象逻辑思维经历了明显的变化，是发生质变的时期，因而是中学生数学思维发展的关键期。而高中二年级学生的抽象逻辑思维趋于成熟，与成年期的思维水平

相差不多。朱智贤和林崇德对北京市几所重点中学的调查证实，高一学生的智力表现和学习成绩变化较大，而高二、高三年级的学生比较稳定。几所大学学生的这四种能力基本上和高二、高三年级的学生保持一致。这表明了中学生抽象逻辑思维发展成熟期的存在，以及抓住成熟期前的时机进行思维能力与智力培养的重要性。

中学生数学思维能力发展的关键期和成熟期的存在，既可能有中学生的生理和心理发育状况方面的原因，也可能有中学生学习内容方面的原因。从初中二年级开始，学生们开始接触较深入的代数知识和初等几何知识。学习这些知识，对于促进概括能力、空间想象能力、命题能力和推理能力有明显的作用。在古希腊，人们特别推崇对几何知识的学习，其目的就在于培养和训练抽象逻辑思维能力，使其在掌握理性知识和启迪智慧方面发挥作用。至于到了高中二三年级，初等数学的基本知识已经基本学完，认识对象已开始由常量数学转入变量数学，对平面解析几何、微积分理论、概率论知识已有初步掌握。这时与初等数学相适应的抽象逻辑思维能力应该发展得基本成熟。如果到大学阶段不再从事数学专业学习，那么其抽象逻辑思维水平就不致发生大的变化。但如果从事数学专业学习，或从事需要应用较高深数学专业知识的工作，那么在抽象逻辑思维能力上还需要更大的发展。

关于中学生抽象逻辑思维发展的上述研究，只是揭示了一般的发展趋势和特点。而不同的学校、不同的班级和不同的学生之间，还存在着不少差异。上述研究的价值不仅在于揭示一般的趋势和特点，还在于提供了研究中学生抽象逻辑思维发展的一种行之有效的方法。中学教师可以运用这一方法，具体分析自己所教年级和班、组学生的思维发展水平和特点，以便采取相应的教学措施和方法。

中学生数学思维能力的发展，既然是由感性经验型的抽象逻辑思维向理论型的抽象逻辑思维不断转化，那么这两种类型的思维之间有什么差异呢？根据国内外心理学家的有关研究，可以从以下几个方面来概括这两类思维的差异：

第一，经验型思维离不开所感知的具体事物的支持，而理论型思维可以离开具体事物，在头脑中把抽象形式和具体内容分开，根据假设来进行逻辑推演。按照瑞士著名心理学家皮亚杰的说法，经验型思维仍然带有“具体运算阶段”的痕迹，而理论型思维则完全进入“形式运算阶段”。皮亚杰认为，这两个阶段的转换是在 岁到 岁之间发生的。

第二，经验型思维在解决问题时，通常从实际出发，然后向可能性方面发展。而理论型思维容易从可能性开始，然后才着手于实际。在方法上，经验型思维往往习惯于由经验到归纳，而理论型思维则习惯于先假定某种想法可能正确，然后由假设演绎出这样或那样可供验证的推论，通过验证来看最初想法是否正确。

第三，经验型思维在处理命题时，往往只是孤立地考虑各命题与经验的真实性的关系，而理论型思维往往考虑两个或更多的命题之间的逻辑关系。

第四，经验型思维往往总是以对和错看待每一件事，认为非对即错，非此即彼，别无其它情况。而理论型思维强调用多种方法来解决问题，在逻辑判断中需要感知、分析和评价。

第五，经验型思维的途径往往只是由感性的具体事物到抽象的规定，很少考虑各种

摇摇摇

抽象规定之间的相互转化和内在联系。而理论型思维的途径是由抽象的规定到思维中的具体，能在头脑中把各种抽象规定有机地结合起来，形成对于对象事物本质的整体上的认识。

考察中学生数学思维能力的发展，应从经验型思维和理论型思维这两种类型的比较出发，了解数学思维能力的发展状况和趋势，以便采取适当的措施来培养和训练思维能力。

圜中学生思维发展的个性特征

前面谈到，虽然中学生抽象逻辑思维发展有着一般的发展趋势和特点，但不同学校、不同班级和学生之间还存在不少差异。这就是中学生数学思维发展的个性特征。这种个性特征具体表现为不同学生之间思维品质的差异。在中学数学教学活动中，经常可以发现同一年级、班级各学生思维发展水平的差异，相应地造成其学习成绩的差异。对这种情况需要进行具体分析，以便掌握其规律性。

（员 数学思维灵活性的个性差异

中学数学教学强调要培养学生正确而迅速的运算和推理能力。而要具备这种能力，必须能从不同角度、不同方面，运用多种方法来思考问题，采取灵活善变的解题策略，因而思维的灵活性与敏捷性是相通的。数学思维灵活性的发展，总的趋势是随年龄增大而逐渐提高，但每个学生思维灵活性的发展速度不同。一般说来，中学生思维灵活程度上的差异从初中一年级就已出现，初中二年级更为显著。年级越高，差异越大。初三以后，思维灵活程度的个体差异渐趋稳定，而到高中阶段则基本定型。有些智力超常的学生，其思维敏捷、反应灵活，可以在很短时间内完成规定的解题任务。而智力低常的学生思维迟缓，反应很慢，要比正常的学生多用一、两倍甚至更多时间，才能完成规定的解题任务。把解题的正确程度和解题速度综合起来考虑思维灵活性，便于对每个学生的思维灵活程度作出准确评估。

（圆 数学思维批判性的个性差异

数学思维批判性的发展，总的说来也是随年龄增长而逐渐提高的。但初中生和高中生的思维批判性有一定差别。初中生的批判性不够成熟。虽然他们能比较自觉地反思自己的思维活动，有意识地调节、检查和论证自己的思维过程，但容易产生片面性和表面性，容易毫无根据地争论，肯定一切或否定一切。在正常教育条件下，高中生的思维批判性比较强。他们在思考问题时不肯盲从，喜欢探求事物表面现象的根本原因；他们在提出争论的观点时，往往要求具有一定的说服力的逻辑论证。但高中生的思维活动有时也难免带有一定程度的片面性和主观性。智力超常的学生，一般说来思维批判性也较强。他们善于提出问题，发表自己的独立见解，能够发现一般学生意识不到的逻辑缺陷和知识错误。而智力低常的学生则人云亦云，没有自己的见解。评价数学思维批判性的标准，主要应看学生提出独到见解与常规见解的差异程度。一个学生提出的见解越是不同凡响，越具有独到性，表明其批判性思维能力就越强。

（猿 数学思维严谨性的个性差异

数学思维严谨性的发展，总的趋势是随年龄增长而逐渐提高，同时也随学习内容的变化而有起伏。学生们最初接触一门新的学科时，在运算和推理过程中都可能有不同程

度的不严谨现象，这种现象随着学习的深入和知识的系统化逐步得到消除。但是在学完一门分支学科知识后，如果有较长一段时间不接触，还可能滋生某些不严谨的现象。在经过多次复习和反复运用之后，一门学科内的不严谨现象可能大大减少，以至消除。数学思维的严谨性与逻辑性密切相关。严谨性发展的个性差异也与中学生逻辑思维发展有密切联系。一般说来，初中学生在教学活动中能够逐步学会有意识地使推理合乎逻辑，基本上掌握了各种逻辑推理的形式。但初中生，特别是初一学生的逻辑推理自觉性还不很强。他们对于一些与感性经验关系密切的问题，往往能很好地进行推理；而对一些比较抽象的和困难的问题，常有乱猜乱碰或违反逻辑的情况，表现出思维很不严谨。高中学生进行逻辑思维的自觉性较强，能进行恰当的合乎逻辑的推理，抽象概括性和逻辑条理性不断提高，因而其思维严谨性就得到很大的发展，智力超常的学生，一般说来思维严谨性也较强，他们在抽象概括和逻辑推理方面极少出错误，善于透过现象看本质，准确地使用概念和判断，在数学以至其它学科学习中都表现出很强的逻辑思维能力。而智力低常的学生则思维混乱，漏洞百出，很难使抽象概括和逻辑推理正常进行。评价数学思维严谨性的标准，主要应看在抽象概括和逻辑推理方面出现缺陷和错误的比率。显然，其比率越低，数学严谨性越强。

（源 数学思维广阔性的个性差异

数学思维广阔性的发展，与年龄增长的关系比较特殊。一般说来，数学思维的灵活性、批判性、严谨性的发展与年龄增长大体上呈正比关系，呈现稳步增长的趋势。而数学思维广阔性的发展则随年龄增长有“加速”趋势。因为学生所学到的知识面越宽，其思路就越加开阔，各知识领域之间的相互联系就越多。这里有一种类似几何级数的关系。

由于初中数学内容的限制，初中学生思维的广阔性发展速度可能要慢一些。因为初中代数和平面几何是分别讲授的，各主要知识点之间的交叉并不很多。到了高中阶段，由于接触到解析几何和三角学知识，数与形的方法相互贯通，数学思维广阔性就有了比较充分的发展余地。对于高二和高三年级学生，应对其数学思维广阔性有较高要求，这样才能为学习更高深的数学知识打下坚实基础。智力超常的学生一般说来思维广阔性也较强。他们对所学知识之间的内在联系有较好的把握，联想丰富，思路开阔，善于一题多解，尤其是能想出一般学生想不到的方法。而智力低常的学生思路很狭窄，只习惯于一两种固定解题方法，甚至于对需要综合运用所学知识的题毫无办法。评价中学生数学思维广阔性的标准，主要应看一题多解的能力。一个学生对某个数学问题想到的解法越多、越新奇、越简捷，说明其思维广阔性发展得越充分。

獭影响中学生数学思维发展的因素

影响中学生数学思维发展的因素是多方面的，这里只就其中主要因素进行讨论：

（员 生理和心理因素的作用

数学思维的发展需要一定的生理和心理基础。研究表明，儿童数学运算思维能力的发展变化，与脑重量发展变化存在一致性。小学三年级和四年级学生（怨-员园岁）脑重量增长较快，恰好也是数学运算思维能力发展的加速期。刚上中学的少年的脑重量已和成人接近。但脑电波的发展在 员源至 员愿岁有一个显著加速期，这个时候（初中二年级）

摇摇摇